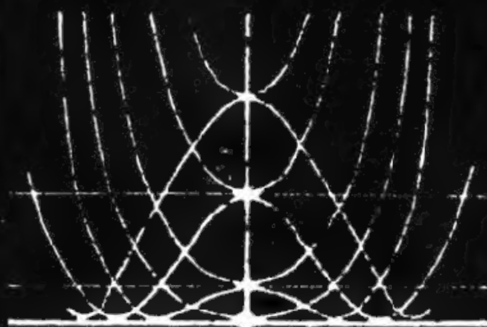
Г. Әһмәдов
Һ. Һәсәнов
М. Јагубов

Ади диференсиал тәнликләр



Маариф - 1978

Г. ӘҺМӘДОВ,
К. ҺӘСӘНОВ,
М. ЈАГУБОВ

АДИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР КУРСУ

АЛИ МӘКТӘБЛӘР ҮЧҮН ДӘРСЛИК

Азәрбајҹан ССР Али вә Орта Ихтисас Тәһсили Назирлији тәрәфиндән тәсдиг едилмишдир

«МААРИФ» НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы—1978

517(075)
Ә 96

Дәрслик ади диференсиал тәнликләр курсунун мүасир сәвиј̈јәсинә ујғун јазылмышдыр. Китабда университет курсларында кечилән програмдан әлавә, ади диференсиал тәнликләрин мүасир мәсәләләринә һәср олунмуш материал верилир вә нәзәри мәсәләләрин чоху мисалларла изаһ олунур.

Университет тәләбәләри үчүн нәзәрдә тутулмуш бу дәрсликдән дикәр али мәктәбләрин тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

Дәрслијә Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасынын Ријазијјат вә Механика Институту рә'ј вермишдир.

Елми редактору: М. ГАСЫМОВ
проф., физика-ријазијјат елмләри доктору

2—3—1 / М—652 132—78

КИРИШ

Диференсиал тәнликләр нәзәријјәси XVII әсрин ахырларында механика вә физика мәсәләләринин һәлли илә әлагәдар олараг јаранмышдыр. Садә диференсиал тәнликләрә һәлә Нјутон вә Лејбнисин әсәрләриндә раст кәлинирди. Классик диференсиал тәнликләр нәзәријјәси исә ајрыча бир фәнн кими XVIII әсрдә јаранмышдыр.

Диференсиал тәнликләр ади вә хүсуси төрәмәли тәнликләрә бөлүнүр: бирдәјишәнли функсијанын төрәмәләри дахил олан ади диференсиал тәнликләр, чохдәјишәнли функсијанын хүсуси төрәмәләри дахил олан хүсуси төрәмәли тәнликләр.

Али мәктәб тәләбәләри үчүн јазылмыш бу дәрслик ади диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинә һәср олунмушдур. Китаб он бир фәсилдән ибарәтдир.

I фәсилдә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли тәнликләр нәзәријјәсинин әсас анлајышлары верилир вә квадратура илә һәлл олунан бә'зи тәнликләр өјрәнилир.

II фәсилдә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри арашдырылыр.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш биртәртибли тәнликләр нәзәријјәсинин әсас анлајышлары, belə тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри III фәсилдә верилмишдир.

Китабын IV фәслиндә тәнликләр системинин вә јүксәк тәртибли тәнликләр нәзәријјәсинин әсас анлајышлары верилир, һәллин варлығы вә јеканәлији һаггында теоремләр исбат олунур. Сонра исә квадратура илә һәлл олунан бә'зи тәнликләр өјрәнилир. V фәсилдә хәтти системләрин үмуми нәзәријјәсиндән бәһс едилир. Бурада системин фундаментал һәлләринин хассәләри, сабитләрин вариасијасы үсулу вә сабит әмсаллы системин һәлләринин гурулма гајдасы верилир. Сонра исә ујғун фактлар јүксәк тәртибли хәтти тәнликләрә көчүрүлүр. Бундан әлавә, бу фәсилдә периодик әмсаллы хәтти системләр үчүн Флоке теореми исбат олунур.

VI фәсил нормал системин һәллинин параметрләрдән вә башланғыч гијмәтләрдән асылылығы мәсәләләринә һәср олунмушдур. Бу фәсилдә һәмчинин нормал системин үмуми интегралынын варлығы исбат олунур, һәллин аналитиклији мә-

сәләси арашдырылыр вә сингулјар һәјачанланмыш системләр һаггында гыса мә'лумат верилир.

Нормал системин һәллинин Лјапунов мә'нада дајаныглыгы мәсәләси VII фәсилдә өјрәнилир. Бурада әввәлчә хәтти системләрин дајаныглыгы һаггында теоремләр исбат олунур. сонра исә Лјапунов функсијалары үсулу вә биринчи јахынлашмалар үсулу илә гејри-хәтти системләрин дајаныглыгы арашдырылыр. Фәслин сонунда дајаныгсызлыг һаггында теоремләр исбат олунур.

VIII фәсилдә икитәртибли хәтти тәнликләрин һәлләринин бә'зи хассәләри өјрәнилир, сәрһәд мәсәләси, Грин функсијасы анлајышлары верилир, мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында теоремләр исбат олунур. Сонра исә садә гејри-хәтти сәрһәд мәсәләсинин һәллинин варлыгы вә јеканәлији мәсәләләри арашдырылыр. Бунлардан әлавә, бу фәсилдә Бессел тәнлији вә Бессел функсијалары һаггында мә'лумат верилир.

IX фәсилдә автоном системләрин һәлләринин хассәләри өјрәнилир. мүстәви үзәриндә трајекторијаларын јерләшмәси арашдырылыр вә мәхсуси нөгтәләрин тәснифаты верилир.

Китабын IV фәслиндә нормал системләри арашдыраркән көстәрилмишдир ки, системин диференсиалланан интегралынын тапылмасы мәсәләси, мүәјјән биртәртибли хүсуси төрәмәли хәтти тәнлијин һәллинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир. Бунунла әлагәдар олараг биртәртибли хүсуси төрәмәли тәнликләрин үмуми нәзәријјәси, адәтән, ади диференсиал тәнликләр курсунда верилир. Она көрә дә китабын X фәсли биртәртибли хәтти вә квазихәтти хүсуси төрәмәли тәнликләрә һәср олунмушдур. Бу фәсилдә belә тәнликләрин үмуми һәллинин варлыгы, Коши мәсәләсинин һәллинин варлыгы вә јеканәлији һаггында теоремләр исбат олунур.

Сон заманлар автоматик идарәетмә нәзәријјәсинә вә бир чох башга саһәләрә кениш тәтбигләри илә әлагәдар олараг мејл едән аргументли диференсиал тәнликләрә тәләбат артмышдыр. Китабын XI фәсли belә тәнликләрин өјрәнилмәсинә һәср олунмушдур. Бу фәсилдә мејл едән аргументли тәнликләрин тәснифаты, аддым үсулу, башланғыч мәсәләнин һәллинин варлыгы вә јеканәлији өјрәнилир. Фәслин сонунда исә Лаплас чевирмәси вә онун сабит әмсаллы хәтти тәнликләрә (һәм ади диференсиал тәнликләрә, һәм дә мејл едән аргументли тәнликләрә) тәтбиги верилир.

Бүтүн фәсилләрин сонунда чалышмалар верилмишдир. Дәрсликдә верилән нәзәри мәсәләләрин чоху мисалларла изаһ олунур. Бу да китабы һәм сәрбәст өјрәнмәјә, һәм дә ондан али техники мәктәб тәләбәләринин истифадә етмәләринә көмәк едәр.

I ФӘСИЛ

ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗӘРӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМУШ БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘ'РИФЛӘР

а) *Диференсиал тәнлик анлајышы. Сәрбәст дәјишән x, ахтарылан функсија $y(x)$ вә онун төрәмәси $y'(x)$ арасында верилмиш*

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

мүнасибәтинә биртәртибли ади диференсиал тәнлик дејилир.

Ајдындыр ки, $F(x, y, z)$ функсијасы x, y дәјишәнләринин бириндән вә ја һәр икисиндән асылы олмаја да биләр, лакин (1) тәнлијинин диференсиал тәнлик олмасы үчүн бу функсија z-дән һөкмән асылы олмалыдыр.

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

шәклиндә олан тәнлијә *төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш* биртәртибли ади диференсиал тәнлик дејилир.

Бу фәсилдә әввәлчә (2) тәнлији үчүн диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин үмуми анлајышлары верилир, сонра исә belә тәнликләрин бә'зи синифләри өјрәнилир.

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы xOy мүстәвисинин мүәјјән D областында* тә'јин олунмушдур.

Әкәр (a, b) интервалында диференсиалланан $y = \varphi(x)$ функсијасы

1) $(x, \varphi(x)) \in D, \quad x \in (a, b)$
2) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in (a, b)$

шәртләрини өдәјирсә, һәмин функсијаја (2) тәнлијинин (a, b) интервалында *һәлли* дејилир.

* Област дедикдә, ашағыдакы ики шәрти өдәјән бош олмајан D нөгтәләр чохлуғу баша дүшүлүр: 1) D ачыг чохлугдур, јә'ни онун һәр бир нөгтәси өзүнүн мүәјјән әтрафы илә бу чохлуга дахилдир; 2) D чохлуғу әлагәли чохлугдур, јә'ни онун истәнилән ики нөгтәсини, тамамилә D-нин дахилиндә јерләшән вә тәшкиледичиләринин сајы сонлу олан сыныг хәтт васитәсилә бирләшдирмәк олар.

D областынын өзүнә дахил олмајан лимит нөгтәләри чохлугуна онун сәрһәд нөгтәләри дејилир. Сәрһәд нөгтәләринин күллисинә D областынын сәрһәди дејилир.

D областы өз сәрһәди илә бирликдә гапалы област адланыр вә $\bar{D}$ илә ишарә олунур.

Ејни гајда илә $[a, b]$ парчасында һәлли тә'рифини вермәк олар.

Бир чох һалларда диференсиал тәнлијин һәллини гејри-ашкар функсија кими вә ја параметрик шәкилдә тапмаг әлверишли олур.

Әкәр

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (3)$$

бәрабәрлијиндән гејри-ашкар функсија кими тә'јин олунан $y = \varphi(x)$ функсијасы (2) тәнлијинин һәлли оларса, (3) мүнасибәтинә (2) тәнлијинин *гејри-ашкар шәкилдә* һәлли дејилир.

Тутаг ки, параметрик шәкилдә

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta) \qquad (4)$$

функсијасы верилмишдир вә һәр бир $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн:

1) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D$; 2) сонлу $x' = \varphi'(t)$, $y' = \psi'(t)$, $(\varphi'(t) \neq 0)$ төрәмәләри вар; 3) $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t), \psi(t))$ олур. Онда (4) функсијасына (2) тәнлијинин (α, β) интервалында параметрик шәкилдә һәлли дејилир.

Мисал 1. Печдән чыхарыларкән температуру 280° олан чисим 40 *дәг* әрзиндә 100°-јә гәдәр сојујур. Әтраф мүһитин температурунун 10° олдуғуну биләрәк, чисмин сојума ганунуну тапын.

Һәлли. Чисмин t анындакы температуруну $T = T(t)$ илә ишарә етсәк, онун сојума сүр'әти $\frac{dT}{dt}$ олар.

Нјутон ганунуна әсасән, чисмин һәр бир анда сојума сүр'әти, онун һәмин анда температуру илә әтраф мүһитин температуру фәргинә мүтәнасибдир, јә'ни

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10°); \qquad (5)$$

бурада k мүтәнасиблик әмсалыдыр. Демәли, бахылан мәсәләнин һәлли (5) ади диференсиал тәнлијинин һәллинә кәтирилир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, истәнилән c сабити үчүн

$$T = 10° + c \cdot e^{kt} \qquad (6)$$

функсијасы (5) тәнлијинин $(-\infty; +\infty)$ интервалында һәллидир. Чисмин $t = 0$ анында температуру 280° олдуғундан (6) бәрабәрлијиндән c-јә нәзәрән

$$280° = 10° + c$$

тәнлијини аларыг. Бурадан $c = 270°$ вә $T = 10° + 270° e^{kt}$.

Мәсәләнин шәртинә көрә чисим 40 *дәг* әрзиндә 280°-дән 100°-јә гәдәр сојујур, јә'ни $t = 40$ *дәг* олдугда $T = 100°$ олур.

Буну (6) дүстурунда нәзәрә алсаг, k параметрини тапмаг үчүн

$$100° = 10° + 270° e^{k \cdot 40}$$

тәнлијини аларыг. Бурадан

$$e^k = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{40}}.$$

Беләликлә, чисмин t анында температуру

$$T = 10° + 270° \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{40}} \qquad (7)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Мисал 2. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - 1 = 0$ бәрабәрлијиндән тә'јин олунан $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 + 4}$ функсијасы

$$y' = \frac{xy}{x^2 + 4} \qquad (8)$$

тәнлијинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - 1 = 0$$

мүнасибәти һәмин тәнлијин гејри-ашкар шәкилдә һәлли олур.

Билаваситә јохламагла көстәрмәк олар ки, параметрик шәкилдә верилмиш

$$x = 2\,\mathrm{sh}\,t, \quad y = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,t, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

функсијасы (8) тәнлијинин һәллидир.

б) *Диференсиал тәнлик анлајышынын һәндәси изаһы.* Тутаг ки, (2) тәнлијинин сағ тәрәфиндәки $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә $y = \varphi(x)$ функсијасы һәмин тәнлијин (a, b) интервалында һәллидир. $y = \varphi(x)$ функсијасынын графикинә (2) тәнлијинин *интеграл әјриси* дејилир. Интеграл әјриси үзәриндә һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдә һәмин әјријә чәкилән тохунанла Ox охунун мүсбәт истигамәти арасындакы буҹағы α илә ишарә едәк. Төрәмәнин һәндәси мә'насына көрә: $\mathrm{tg}\,\alpha = \varphi'(x_0)$.

Дикәр тәрәфдән $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$ олдуғундан, $y = \varphi(x)$ интеграл әјрисинә (x_0, y_0) нөгтәсиндә чәкилән тохунанын буҹаг әмсалы $\mathrm{tg}\,\alpha = f(x_0, y_0)$ олур. Демәли, $y = \varphi(x)$ интеграл әјриси үзәриндәки һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндә тохунанынын буҹаг әмсалы $f(x, y)$ функсијасынын һәмин нөгтәдәки гијмәти илә тә'јин олунур.

D областындан һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрүб, бу нөгтәдән буҹаг әмсалы $f(x_0, y_0)$ олан дүз хәтт парчасы кечирәк.

Бу һалда илә D областынын һәр бир нөгтәсиндән дүз хәтт парчасы кечирмәк олар. Демәли, (2) тәнлији D областынын һәр бир нөгтәсиндә мүәјјән истигамәт тә'јин едир. Бу чүр гурулмуш истигамәтләр чохлуғуна *истигамәтләр мејданы* дејилир.

Беләликлә, диференсиал тәнлији һәлл етмәк, һәндәси олараг, елә әјри тапмаг демәкдир ки, бу әјринин һәр бир нөгтәсиндә она чәкилмиш тохунанын истигамәти, истигамәтләр мејданынын һәмин нөгтәдәки истигамәти илә үст-үстә дүшсүн. Көстәрилән хүсусијјәтинә көрә интеграл әјриләри, графикләри D областында јерләшән башга әјриләрдән фәргләнир.

Тәнлији һәлл етмәдән, онун тә'јин етдији истигамәтләр мејданынын көмәјилә интеграл әјриләринин тәгриби гурмаг олар. Бунун үчүн *изоклин* үсулундан истифадә олунур.

D областында јерләшән вә бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти ејни олан әјријә тәнлијин изоклини дејилир.

Тә'рифә әсасән, (2) тәнлијинин изоклинләри

$$f(x,y)=k \qquad (9)$$

тәнлији илә тә'јин олунур; бурада k—параметрдир.

Ајдындыр ки, $f(x,y)$ функсијасынын верилмәсиндән асылы олараг k параметринин бә'зи гијмәтләриндә (9) тәнлијинин тә'јин етдији (x,y) нөгтәләр чохлуғу бош вә ја сонлу чохлуг ола биләр.

Интеграл әјриләринин екстремум нөгтәләриндә $f(x,y)=0$ олдуғундан $k=0$ гијмәтинә ујғун изоклин *екстремал* адланыр.

Верилмиш тәнлијин изоклин үсулу илә интеграл әјриләринин тәхмини тәсвирини алмаг үчүн бир-биринә јахын k_1, $k_2, \ldots,$ әдәдләринә ујғун $f(x,y)=k_i$, $i=1, 2, \ldots$ изоклинләрини гурурyг. Бундан сонра елә әјриләр чәкирик ки, онларын һәр биринин $f(x,y)=k_i$ изоклини илә кәсишмә нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын бучаг әмсалы k_i олсун.

Әлавә мә'луматларын һесабына бә'зи садә тәнликләрин интеграл әјриләринин даһа дәгиг тәхмини тәсвирини гурмаг олур.

Ајдындыр ки, D областынын $f(x,y)>0$ шәртини өдәјән һиссәләриндә интеграл әјриләри артан, $f(x,y)<0$ олан һиссәләриндә исә азалан функсијадыр.

Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасынын D областында кәсилмәз $f_x(x,y)$ вә $f_y(x,y)$ төрәмәләри вар. Онда (2) тәнлијинә әсасән,

$$y''=f_x(x,y)+f_y(x,y)\,y'=f_x(x,y)+f_y(x,y)\,f(x,y)$$

олдуғундан, D областынын $f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)>0$ шәртини өдәјән һиссәләриндә интеграл әјриләри чөкүк,

$f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)<0$ олан һиссәләриндә исә габарыг олур. Бундан башга, интеграл әјриләринин әјилмә нөгтәләриндә

$$f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)=0.$$

Она көрә бу тәнлијин тә'јин етдији әјријә (әкәр варса) (2) тәнлијинин *әјилмә хәтти* дејилир.

Бүтүн бу мә'луматларла јанашы изоклинләрин, екстремалларын вә әјилмә хәтләринин тәнлијини өдәјиб-өдәмәдијини билавасит тәнликдә јеринә јазмагла јохламаг лазымдыр.

Мисал 3. $y'=y-x^2$ тәнлијинин интеграл әјриләрини изоклин үсулу илә тәгриби гураг.

Тәнлијин изоклинләри $y=x^2+k$ параболалар аиләсидир. Бурадан $k=0$ олдугда алынан $y=x^2$ екстремал изоклини координат башлангычындан кечән параболадыр. Бу парабола xOy мүстәвисини ики һиссәјә бөлүр. $y'=y-x^2>0$ шәрти $y=x^2$ параболасынын дахилиндә галан һиссәдә, $y'=y-x^2<0$ шәрти исә харичиндә галан һиссәдә өдәнир. Она көрә интеграл әјриләри мүстәвинин $y=x^2$ параболасынын дахилиндәки һиссәсиндә артан, харичиндәки һиссәсиндә исә азалан функсијалар олур. Демәли, $y=x^2$ параболасынын харичи һиссәсиндән дахили һиссәсинә кечән интеграл әјрисинин бу парабола илә кәсишмә нөгтәси минимум нөгтәси, дахилиндән харичинә кечән интеграл әјриси илә кәсишмә нөгтәси исә онун максимум нөгтәси олур. Һәр һансы интеграл әјриси әввәлчә $y=x^2$ параболасыны кәсиб дахилә кечирсә, сонра исә кәсиб харичә чыхырса, кәсишмә нөгтәләри һәмин интеграл әјрисинин, ујғун олараг, минимум вә максимум нөгтәләри олур.

Интеграл әјриләринә $y=x^2+1$ $(k=1)$ изоклини илә кәсишдикләри нөгтәләрдә чәкилән тохунанлар Ox оху илә 45°-ли бучаг, $y=x^2-1$ $(k=-1)$ изоклини илә кәсишдикләри нөгтәләрдә чәкилән тохунанлар исә 135°-ли бучаг әмәлә кәтирир.

Интеграл әјриләринин әјилмә хәттини тапаг.

Верилмиш тәнликдән $y''=y'-2x$. Бурада $y'=y-x^2$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $y''=y-x^2-2x$ олар.

Әјилмә нөгтәләриндә $y''=0$ олдуғундан $y=x^2+2x$ параболасы интеграл әјриләринин әјилмә хәтти олур. Бу парабола xOy мүстәвисини ики һиссәјә бөлүр. $y''>0$ шәрти $y=x^2+2x$ параболасынын дахилиндә, $y''<0$ шәрти исә харичиндә өдәнир.

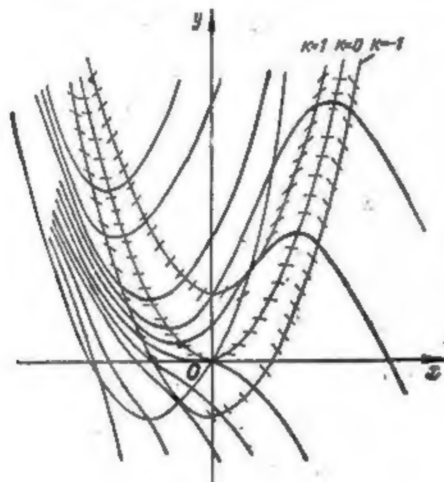
Демәли, интеграл әјриләринин $y=x^2+2x$ параболасынын дахилиндә јерләшән һиссәси габарыг, харичиндә јерләшән һиссәси исә чөкүк олур вә һәмин парабола илә кәсишдикләри нөгтәләрдә интеграл әјриләри әјилир.

Бу дејиләнләри нәзәрә алсаг, верилән тәнлијин интеграл әјриләринин тәхмини тәсвири 1-чи шәкилдә көстәрилән кими олар.

в) *Коши мәсәләси.* Тутаг ки, (a, b) интервалында кәсилмәз $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасыны тапмаг тәләб олунур. Ибтидаи функсијаны $y = y(x)$ илә ишарә етсәк, мәсәлә

$$y' = f(x) \tag{10}$$

диференсиал тәнлијинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.



Шәкил 1.

Интеграл һесабы курсундан мә'лумдур ки, бу тәнлијин һәлли $y = \int f(x)\,dx + c$ вә ја

$$y = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + c \quad (a < x_0 < b) \tag{11}$$

дүстуру илә верилир; бурада c ихтијари сабитдир. Демәли, ән садә диференсиал тәнлијин һәлли бир ихтијари сабитдән асылы аилә тәшкил едир. Она көрә дә көзләмәк олар ки, (2) тәнлијинин һәлләри дә бир ихтијари сабитдән асылы аилә тәшкил едир.

Кәләчәкдә көстәрәчәјик ки, $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәз олдугда (2) тәнлијинин интеграл әјриләри бу областы долдурур. Она көрә дә бу һәлләр ичәрисиндән тәнлијин мүәјјән һәллини сечмәк үчүн әлавә шәртләр верилмәлидир.

Верилмиш $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәси үчүн

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

тәнлијинин

$$y(x_0) = y_0 \tag{12}$$

шәртини өдәјән $y = \varphi(x)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси*, (12) шәртинә исә *башланғыч шәрт* дејилир. x_0, y_0 әдәдләринә *башланғыч гијмәтләр* вә ја *Коши мә'лумлары* дејилир. (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг, һәндәси олараг D областынын (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир. Кәләчәкдә исбат едәчәјик ки, $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән $U \subset D$ әтрафында кәсилмәздирсә, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һеч олмаса бир һәлли вар (бах: II фәсил, § 3).

Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсијасы $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәллидир вә бу тәнлијин (12) башланғыч шәртини өдәјән истәнилән $y = \psi(x)$ һәлли үчүн елә $\delta > 0 (\delta \leqslant h)$ әдәди вар ки, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Онда дејирләр ки, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәлли (вә ја (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси) *јеканәдир*. Әкс һалда, јә'ни (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси јохдурса вә ја варса, амма бирдән чохдурса, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин јеканәлији позулур.

Кәләчәкдә көстәрәчәјик ки, $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән U әтрафында кәсилмәздирсә вә кәсилмәз $f_y(x, y)$ хүсуси төрәмәси варса, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән јеканә һәлли вар (бах: II фәсил, § 7).

г) *Үмуми һәлл.* Јухарыда көстәрдик ки, ихтијари c сабитиндән асылы олан (11) аиләси (10) тәнлијинин һәллидир. Ајдындыр ки, һәр бир $x_0 \in (a, b)$ вә истәнилән y_0 үчүн $c = y_0$ көтүрсәк, $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + y_0$ функсијасы (10) тәнлијинин $\varphi(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли олар.

Гејд едәк ки, (11) һәллинә (10) тәнлијинин *үмуми һәлли*, c сабитинә гијмәт вермәклә алынан һәллә исә һәмин тәнлијин *хүсуси һәлли* дејилир.

(2) тәнлијинин һәлләринин јеканәлији сахланан максимал областы G илә ишарә едәк $(G \subset D)$, јә'ни G областынын һәр бир нөгтәсиндән (2) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир вә D областынын бу хассәјә малик олан бүтүн нөгтәләри G-јә дахилдир.

Тутаг ки, ихтијари c сабитиндән асылы

$$y = \varphi(x, c) \tag{13}$$

аиләси верилмишдир вә 1) һәр бир $(x,y)\in G$ нөгтәси үчүн (13) тәнлији c-јә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$c=\psi(x,y); \qquad (14)$$

2) (x,y) нөгтәси G областында дәјишдикдә, c сабитинин (14) дүстуру илә тә'јин олунан һәр бир гијмәтиндә (13) функсијасы (2) тәнлијинин һәллидир. Онда (13) аиләсинә һәмин тәнлијин G областында үмуми һәлли, c-нин (14) дүстуру илә тә'јин олунан гијмәтләринә исә *мүмкүн гијмәтләр* дејилир. Һәр һансы $(x_0,y_0)\in G$ үчүн $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\psi(x,y) = \pm\infty$ оларса, $c=\pm\infty$ да мүмкүн гијмәт кими көтүрүлүр.

Тутаг ки, (13) аиләси G областында (2) тәнлијинин үмуми һәллидир вә $(x_0,y_0)\in G$. Онда (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$y=\varphi(x,\psi(x_0,y_0))=\Phi(x,x_0,y_0) \qquad (15)$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Бу дүстурда $(x_0,y_0)\in G$ шәрти өдәнмәклә x_0-ы гејд едиб, y_0-ы ихтијари көтүрсәк, (15) аиләсинә (2) тәнлијинин *Коши формада* үмуми һәлли дејилир.

Ихтијари c сабитиндән асылы

$$\Phi(x,y,c)=0 \ \text{ вә ја } \ \Phi(x,y)=c \qquad (16)$$

гејри-ашкар шәклиндә верилмиш функсијалар аиләсинин тә'јин етдији $y=\varphi(x,c)$ аиләси G областында (2) тәнлијинин үмуми һәлли оларса, (16) аиләсинә һәмин тәнлијин G областында гејри—ашкар шәкилдә үмуми һәлли вә ја *үмуми интегралы* дејилир.

Тутаг ки, $\Phi(x,y)=c$ бәрабәрлији G областында (2) тәнлијинин үмуми интегралыдыр. Бу областдан ихтијари (x_0,y_0) нөгтәси көтүрәк вә $\Phi(x_0,y_0)=c_0$ илә ишарә едәк. Онда $\Phi(x,y)=c_0$ бәрабәрлији (x_0,y_0) нөгтәсиндән кечән јеканә $y=\varphi(x)$ интеграл әјрисини тә'јин едәр вә бу әјри бојунча

$$\Phi(x,\varphi(x))=c_0 \qquad (17)$$

ејнилији өдәнәр.

Демәли, (2) тәнлијинин G областында јерләшән истәнилән интеграл әјриси бојунча $\Phi(x,y)$ функсијасы ејнилик кими сабитә бәрабәрдир. Белә хассәјә малик олан $\Phi(x,y)$ функсијасына (2) тәнлијинин ***интегралы*** дејилир.

Тутаг ки, $\Phi(x,y)$ интегралы диференсиалланан функсијадыр. Онда (17) ејнилијини диференсиаллајараг $y=\varphi(x)$ интеграл әјриси бојунча

$$\Phi_x(x,y)+\Phi_y(x,y)f(x,y)=0 \qquad (18)$$

олдуғуну аларыг. Алынан (18) бәрабәрлијинин сол тәрәфинә $\Phi(x,y)$ функсијасынын (2) тәнлијинә әсасән төрәмәси дејилир. Демәли, $\Phi(x,y)$ функсијасы G областында (2) тәнлијинин

диференсиалланан интегралы олдуғда, онун һәмин тәнлијә әсасән төрәмәси сыфыра бәрабәрдир.

Мисал 4. Көстәрәк ки, ихтијари c сабитиндән асылы олан $y(x+c)-1=0$ аиләси xOy мүстәвисиндә $y'=-y^2$ тәнлијинин үмуми интегралыдыр. Доғрудан да, $y(x+c)-1=0$ тәнлијини y-ә нәзәрән һәлл етсәк

$$y=\frac{1}{x+c} \qquad (19)$$

олдуғуну аларыг.

Һәр бир (x,y), $(y\neq 0)$ нөгтәси үчүн (19)-дан

$$c=\frac{1}{y}-x$$

тә'јин едә биләрик вә ајдындыр ки,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\left(\frac{1}{y}-x\right)=\pm\infty.$$

Бу көстәрир ки, $c=\pm\infty$ гијмәтләри мүмкүн гијмәтләрдир вә $c=\pm\infty$ олдугда (19) дүстурундан бахылан тәнлијин $y=0$ һәлли алыныр. c сабитинин һәр бир сонлу гијмәти үчүн (19) дүстуру илә тә'јин олунан $y=y(x)$ функсијасы $(-\infty,-c)$, $(-c,+\infty)$ интервалларында бахылан тәнлији өдәјир.

Демәли, (19) аиләси xOy мүстәвисиндә бахылан тәнлијин үмуми һәлли, $y(x+c)-1=0$ аиләси исә онун үмуми интегралы олур.

г) *Хүсуси һәлл.* Тутаг ки, $y=\varphi(x)$ функсијасы (a,b) интервалында (2) тәнлијинин һәллидир. Әкәр һәр бир $x\in(a,b)$ үчүн (2) тәнлијинин $(x,\varphi(x))$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси јеканә исә, $y=\varphi(x)$ һәллинә (2) тәнлијинин *хүсуси һәлли* дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, c сабитинин һәр бир мүмкүн гијмәтиндә үмуми һәллдән алынан һәлл, хүсуси һәллдир.

д) *Мәхсуси һәлл.* Тутаг ки, $y=\psi(x)$ функсијасы (2) тәнлијинин (a,b) интервалында тә'јин олунан һәллидир. Әкәр һәр бир $x\in(a,b)$ үчүн $(x,\psi(x))$ нөгтәсиндән, (2) тәнлијинин $y=\psi(x)$ һәлли дә дахил олмагла, ән азы ики интеграл әјриси кечирсә, $y=\psi(x)$ һәллинә диференсиал тәнлијин *мәхсуси һәлли* дејилир.

Беләликлә, Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулан нөгтәләрин һәндәси јериндән ибарәт олан интеграл әјрисинә ујғун һәлл мәхсуси һәлл олур.

Тутаг ки, G областы (2) тәнлијинин һәлләринин јеканәлији сахланан максимал областдыр, $y=\psi(x)$ исә бу тәнлијин (a,b) интервалында тә'јин олунмуш мәхсуси һәллидир. Ајдындыр ки, $y=\psi(x)$ һәллинин графикинин һеч бир нөгтәси G областына дахил ола билмәз. Она көрә дә мәхсуси һәлли (әкәр варса) үмуми һәллдән c сабитинә мүмкүн әдәди гијмәт

вермәклә алмаг олмаз вә бу һәллин графики G областынын сәрһәддиндә јерләшир.

Мисал 5.

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad (20)$$

тәнлијинә бахаг. Бурада $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ функсијасы xOy мүстәвисиндә тә'јин олунуб вә кәсилмәздир. Она көрә тәнлијин истәнилән (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси вар. Көстәрәк ки, $y_0 \neq 0$ исә (20) тәнлијинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән јеканә интеграл әјриси кечир, ја'ни бу нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Доғрудан да тутаг ки, $y_0 > 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәсинин елә U әтрафына бахмаг олар ки, бу әтраф Ox оху илә кәсишмәсин. (U әтрафы олараг мәркәзи (x_0, y_0) нөгтәсиндә вә радиусу $\varepsilon = \frac{y_0}{2}$ олан даирә көтүрмәк олар.) Бу әтрафда $f(x,y)=\sqrt{y}$ функсијасы кәсилмәздир вә кәсилмәз $f_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ төрәмәси вар.

Демәли, һәр бир (x_0, y_0), $(y_0 > 0)$ нөгтәсиндән (20) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Ејни гајда илә $y_0 < 0$ шәрти өдәнән һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән дә јеканә интеграл әјриси кечдијини көстәрмәк олар.

Истәнилән x_0 үчүн $(x_0, 0)$ нөгтәсиндә $f_y(x_0, 0) = \infty$ олур. Демәли, бу нөгтәдә һәллин јеканәлији позула биләр. Ајдындыр ки, белә нөгтәләрин һәндәси јери $y=0$ хәттини верир вә бу хәтт тәнлијин интеграл әјрисидир. Дикәр тәрәфдән $\alpha < x_0 < \beta$ шәртини өдәјән истәнилән α, β әдәдләри үчүн

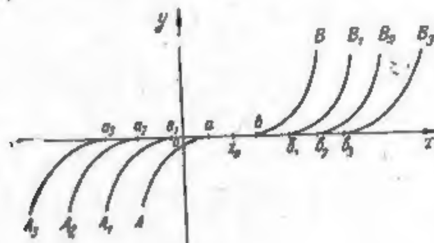
$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(\alpha - x)^2, & x < \alpha \text{ оларса}, \\ 0, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \text{ оларса}, \\ \frac{1}{4}(x-\beta)^2, & x > \beta \text{ оларса}, \end{cases}$$

дүстуру илә тә'јин олунан функсија да тәнлијин $(x_0, 0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси олдуғундан, $y=0$ бахылан тәнлијин мәхсуси һәллидир (шәкил 2).

е) *Квадратура илә һәлл олунан тәнликләр.* Диференсиал тәнликләр курсунда мүһүм мәсәләләрдән бири диференсиал тәнлијин бүтүн һәлләрини тапмаг вә онун хассәләрини өјрәнмәкдән ибарәтдир. Диференсиал тәнлијин һәллинин тапылмасына онун *интегралланмасы* дејилир.

Верилмиш диференсиал тәнлији һәлл етмәк, биринчи нөвбәдә ахтарылан функсијаны сәрбәст дәјишәндән асылы ашкар шәкилдә елементар функсијаларын көмәјилә ифадә етмәкдән ибарәтдир. Бу мүмкүн олмадыгда диференсиал тәнлијин һәллинин тапылмасы елементар функсијалардан вә тәнлијә дахил

олан функсијалардан ибарәт ифадәләрин интегралланмасына кәтирилир. Бу һалда дејирләр ки, бахылан диференсиал тәнлик *квадратура илә һәлл олунур*.



Шәкил 2.

Ашағыда төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш вә квадратураја кәтирилән бә'зи диференсиал тәнликләр синфи илә таныш олачағыг. Бу синифләри тә'јин етмәк үчүн бә'зән (2) тәнлијини башга шәкилләрдә јазмаг лазым кәлир. Бу тәнликлә јанашы

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x,y), \quad f_1(x,y) = \frac{1}{f(x,y)} \qquad (2')$$

тәнлијинә бахаг. Гејд едәк ки, (2) тәнлијиндә x-ә сәрбәст дәјишән, y-ә исә x-ин ахтарылан функсијасы кими, (2′) тәнлијиндә исә y-ә сәрбәст дәјишән, x-ә онун ахтарылан функсијасы кими бахылыр.

$f(x,y)$ функсијасы D областында вә онун бә'зи сәрһәд нөгтәләриндә тә'јин олунмушдурса, онда (2) тәнлији D областында вә онун һәмин сәрһәд нөгтәләриндә верилмиш һесаб олунур.

Мүәјјән (x_0, y_0) нөгтәси үчүн $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty$ оларса, $f_1(x,y)$ функсијасы үчүн $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = 0$ олур. Она көрә $f_1(x,y)$ функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә гијмәтини сыфыра бәрабәр көтүрсәк, бу нөгтәдә (2′) тәнлијинин сағ тәрәфи сонлу олур. Одур ки, (x_0, y_0) нөгтәси әтрафында (2) тәнлији әвәзинә (2′) тәнлијинә бахмаг әлверишли олур.

Ајдындыр ки, (2) вә (2′) тәнликләринә диференсиал шәкилдә јазылмыш

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлијинин хүсуси һалы кими бахмаг олар. Бу тәнлијә x вә y дәјишәнләри ејни һүгугла дахилдир, ја'ни һәмин дәјишәнләрин истәнилән бирисинә сәрбәст дәјишән, дикәринә исә ахтарылан функсија кими бахмаг олар.

Фәрз олунур ки, (21) тәнлијиндә $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функсијалары мүәјјән D областында кәсилмәздирләр вә бу областда $M^2(x, y) + N^2(x, y) > 0$ шәрти өдәнир. Ајдындыр ки; $M^2(x, y) + N^2(x, y) = 0$ олан (x, y) нөгтәләриндә (21) тәнлији истигамәт тә'јин етмир. Белә нөгтәләрә тәнлијин *мәхсуси нөгтәләри* дејилир.

§ 2 ДӘЈИШӘНЛӘРИНӘ АЈРЫЛАН ТӘНЛИКЛӘР

Тутаг ки,

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{22}$$

тәнлији верилмишдир; бурада $M(x)$, $N(y)$ ујғун олараг (a, b) вә (c, d) интервалларында кәсилмәз функсијалардыр вә $M^2(x) + N^2(y) > 0$.

Бу тәнликдә dx-ин әмсалы анчаг x-дән, dy-ин әмсалы исә анчаг y-дән асылы функсијадыр. Белә тәнликләрә *дәјишәнләринә ајрылмыш диференсиал тәнликләр* дејилир.

Ихтијари $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ көтүрүб,

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta \tag{23}$$

функсијасыны дүзәлдәк.

Ајдындыр ки, $\Phi(x, y)$ функсијасы $D = \{a < x < b;\ c < y < d\}$ областында кәсилмәз, диференсиалланандыр вә (22) тәнлијинин интеграл әјриләри бојунча

$$d\,\Phi(x, y) = d\left(\int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta\right) = 0$$

мүнасибәти өдәнир. Демәли, (22) тәнлијинин үмуми интегралы

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta = c \tag{24}$$

шәклиндәдир; бурада c ихтијари сабитдир. Үмуми интегралдан $c = 0$ көтүрмәклә алынан

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta = 0 \tag{25}$$

мүнасибәти (22) тәнлијинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисинин гејри-ашкар шәкилдә тәнлији олур. Доғрудан да, (23) дүстуру илә тә'јин олунан $\Phi(x, y)$ функсијасы үчүн

$\Phi(x_0, y_0) = 0$, $\Phi_x^2(x_0, y_0) + \Phi_y^2(x_0, y_0) = M^2(x_0) + N^2(y_0) > 0$

олдуғундан, гејри-ашкар функсијанын варлығы вә јеканәлији һаггында теоремә әсасән (25) тәнлији (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән јеканә интеграл әјриси тә'јин едир.

Демәли, D областынын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (22) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир.

Араштырдығымыз (22) тәнлијиндән үмуми олан

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \tag{26}$$

тәнлији дә дәјишәнләринә ајрылмыш тәнлијә кәтирилир; бурада $M_i(x), N_i(y), (i = 1,2)$ функсијалары ујғун олараг (a, b), (c, d) интервалында кәсилмәздир. Ајдындыр ки, D областынын $M_1^2(x)\,N_1^2(y) + M_2^2(x)\,N_2^2(y) > 0$ шәрти өдәнән нөгтәләриндә (26) тәнлији тә'јин олунмушдур. (26) шәклиндә олан тәнликләрә *дәјишәнләринә ајрылан тәнликләр* дејилир.

Тутаг ки, $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәсиндә $M_2(x_0) \neq 0$, $N_1(y_0) \neq 0$ шәртләри өдәнир. Онда (x_0, y_0) нөгтәсинин әтрафында (26) тәнлијинин һәр тәрәфини $N_1(y)\,M_2(x)$ һасилинә бөлмәклә дәјишәнләринә ајрылмыш

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0$$

тәнлији алынар вә јухарыдакы мүһакимәләрә әсасән онун үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_1(\xi)}{M_2(\xi)}\,d\xi + \int_{y_0}^{y} \frac{N_2(\eta)}{N_1(\eta)}\,d\eta = c \tag{27}$$

шәклиндә олар.

Тутаг ки, (a, b) интервалында $M_2(x) \neq 0$ вә $N_1(y_1) = 0$ $(c < y_1 < d)$. Тәнликдә $y = y_1$ јазсаг, $dy_1 = 0$ олдуғундан аларыг ки, $y = y_1$ функсијасы һәмин тәнлијин (a, b) интервалында һәллидир. Бундан башга, $M_2(x_1) = 0$ $(a < x_1 < b)$ оларса, $y = y_1$ функсијасы (a, x_1), (x_1, b) интервалларында, $x = x_1$ функсијасы исә (c, y_1), (y_1, d) интервалларында (26) тәнлијинин һәлләридир. Бу һәлләр (27) дүстурундан c-јә мүмкүн әдәди гијмәт вермәклә алынарса хүсуси һәлл, алынмырса мәхсуси һәлл олур. Ајдындыр ки, (x_1, y_1) нөгтәсиндә тәнлик тә'јин олунмамышдыр.

Беләликлә, (26) тәнлијинин мәхсуси һәлләри анчаг $N_1(y)$ вә $M_2(x)$ функсијаларанын сыфырлары ичәрисиндә олар.

Мисал. $\sqrt[3]{4 - y^2}\,dx + 4y(x - 1)^2\,dy = 0$ тәнлијини һәлл едәк.

Һәлли. Бу тәнликдә $M_1(x) = 1$, $M_2(x) = (x - 1)^2$, $N_1(y) = \sqrt[3]{4 - y^2}$, $N_2(y) = 4y$ функсијалары бүтүн һәгиги охда кәсилмәздир вә xOy мүстәвисинин $(1, 2)$, $(1, -2)$ нөгтәләри мүстәсна олмагла һәр јердә $M_1^2(x)\,N_1^2(y) + M_2^2(x)\,N_2^2(y) > 0$ шәрти өдәнир. Тәнлијин һәр тәрәфини $(x - 1)^2\sqrt[3]{4 - y^2}$ һасилинә бөлсәк, дәјишәнләринә ајрылмыш

300—3

$$\frac{ax}{(x-1)^2} + \frac{4y}{\sqrt[3]{4-y^2}}\, dy = 0$$

тәнлиҗи алынар. Онун үмуми интегралы

$$1 + 3(x-1)\sqrt[3]{(4-y^2)^2} - c(x-1) = 0$$

шәклиндәдир.

Бундан башга, $x = 1$ функсиҗасы $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$ интервалларында, $y = \pm 2$ функсиҗалары исә $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ интервалларында бахылан тәнлиҗин һәлләридир.

Аҗдындыр ки, $x = 1$ һәллинин үмуми интегралы

$$c_1 \left[1 + 3(x-1)\sqrt[3]{(4-y^2)^2}\right] - (x-1) = 0 \left(c_1 = \frac{1}{c}\right)$$

шәклиндә јазыб, $c_1 = 0$ көтүрмәклә алмаг олар. Демәли, $x = 1$ һәлли хүсуси һәллдир. $y = \pm 2$ һәлләри исә үмуми интегралдан c сабитинә әдәди гиҗмәт вермәклә алынмыр. Демәли, бу һәлләр бахылан тәнлиҗин мәхсуси һәлләридир.

§ 3. БИРЧИНС ТӘНЛИКЛӘР

а) Үмуми интегралын гурулмасы. Тутаг ки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсиҗасы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринин мүәјјән G областында тә'јин олунмушдур. Мүәјјән m әдәди, һәр бир $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ нөгтәси вә $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in G$ шәртини едәјән истәнилән t үчүн

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

оларса, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсиҗасы G областында *m дәрәчәли бирчинс функсија* адланыр.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлиҗиндә $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсиҗалары D областында ејни дәрәчәли бирчинс функсиҗалар олдугда, һәмин тәнлиҗә *бирчинс тәнлик* дејилир. Тә'рифдән аҗдындыр ки, (21) тәнлиҗи бирчинс тәнлик исә, $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ вә $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ функсиҗалары сыфыр дәрәчәли бирчинс функсиҗалар олур.

$$F(x, y, dx, dy) \equiv M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

ишарә едәк. Мүәјјән κ, m әдәдләри, һәр бир $(x, y) \in D$ нөгтәси вә $(tx, t^\kappa y) \in D$ шәртини едәјән истәнилән t үчүн

$$F(tx, t^\kappa y, dx, t^{\kappa-1} dy) = t^m F(x, y, dx, dy) \qquad (28)$$

оларса, (21) тәнлиҗи *үмумиләшмиш бирчинс тәнлик* адланыр. Хүсуси һалда, $\kappa = 1$ олдугда үмумиләшмиш бирчинс тәнлик бирчинс тәнлиҗә чеврилир.

Бирчинс тәнликләри арашдыраркән фәрз едәчәјик ки $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсиҗалары $D = \{0 < x < +\infty,\ ax^\kappa < y < bx^\kappa\}$ областында кәсилмәздир вә $M^2(x, y) + N^2(x, y) > 0$ шәрти өдәнир.

Тә'рифдән аҗдындыр ки, (28) шәртинин өдәнмәси үчүн

$$M(tx, t^\kappa y) = t^m M(x, y), \qquad N(tx, t^\kappa y) = t^{m-\kappa+1} N(x, y)$$

олмалыдыр. Бурадан, $t = \frac{1}{x}$ көтүрмәклә

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right), \ N(x, y) = x^{m-\kappa+1} N\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right)$$ бәрабәрликләрини алырыг. Бу мүнасибәтләри (21) тәнлиҗиндә јазсаг

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right) dx + x^{m-\kappa+1} N\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right) dy = 0 \qquad (29)$$

тәнлиҗи алынар. (Аҗдындыр ки, $\kappa = 0$ оларса, алынмыш тәнлик дәјишәнләринә ајрылан тәнлик олар).

Алынмыш (29) тәнлијиндә

$$y = x^\kappa z$$

әвәзләмәси апараг; бурада z јени ахтарылан функсиҗадыр. (Бирчинс тәнлик үчүн әвәзләмәдә $\kappa = 1$ көтүрүлүр). Онда

$$dy = \kappa x^{\kappa-1} z\, dx + x^\kappa dz$$

олдуғу нәзәрә алсаг, (29) тәнлиҗини

$$[M(1, z) + \kappa z N(1, z)]\, dx + x N(1, z)\, dz = 0 \qquad (30)$$

шәклиндә јаза биләрик. Аҗдындыр ки, $M(1, z) + \kappa z N(1, z)$, $N(1, z)$ функсиҗалары (a, b) интервалында кәсилмәздир.

Алынан тәнлик дәјишәнләринә ајрылан тәнликдир вә $M(1, z) + \kappa z N(1, z) \neq 0$ фәрз етсәк онун үмуми интегралы $x = c \exp \omega(z)$ олар; бурада $\omega(z) = -\int \frac{N(1, z)\, dz}{M(1, z) + \kappa z N(1, z)}$.

Бурадан, $z = \frac{y}{x^\kappa}$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x = c \exp \omega\left(\frac{y}{x^\kappa}\right)^* \qquad (31)$$

ифадәси (21) тәнлиҗинин үмуми интегралы олар.

Аҗдындыр ки, $M(1, z) + \kappa z N(1, z) = 0$ тәнлиҗинин һәр бир $z = z_0$ һәгиги көкү (варса) (30) тәнлиҗинин һәллидир. Онда (21) тәнлиҗинин $z = z_0$-а ујғун һәлли $y = z_0 x^\kappa$ шәклиндә олар. Бу һәлл мәхсуси һәлл ола биләр.

$$M(1, z) + \kappa z N(1, z) \equiv 0$$

оларса (21) тәнлиҗи $\kappa y dx - x dy = 0$ дәјишәнләринә ајрылан тәнлиҗинә чеврилир.

---

* Бурада $\exp z$ илә e^z ишарә олунур.

б) ***Бирчинс тәнлијин һәлләринин һәндәси хассәләри.*** Тә'рифдән ајдындыр ки, бирчинс тәнлији һәмишә

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (32)$$

шәклинә кәтирмәк олар. Фәрз едәк ки, $\Phi(z)$ функсијасы (a, b) интервалында кәсилмәздир онда $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ функсијасы $a < \frac{y}{x} < b$ шәртини өдәјән (x, y) нөгтәләри чохлуғунда кәсилмәз олар вә (32) тәнлијинин үмуми интегралы

$$x - c\ \exp\omega\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \omega(z) = \int\frac{dz}{\Phi(z) - z} \qquad (33)$$

дүстуру илә верилар.

Ајдындыр ки, һәр бир $k \in (a, b)$ үчүн $y = kx$ дүз хәтти бојунча $y' = \Phi(k)$. Демәли, $y = kx$ дүз хәтти (32) тәнлијинин изоклинидир.

Фәрз едәк ки, $y = \varphi(x)$ функсијасынын тә'јин етдији әјри (32) тәнлијинин координат башланғычындан чыхан шүадан фәргли интеграл әјрисидир. Бу интеграл әјрисинин ихтијари (x, y) нөгтәси вә (a, b) интервалындан олан истәнилән k $(k \neq 0)$ әдәди үчүн (kx, ky) нөгтәләри дә тәнлијин башга интеграл әјриси үзәриндәдир. Башга сөзлә десәк, $y = \frac{1}{k}\varphi(kx)$ функсијасы да (32) тәнлијинин һәллидир.

Доғрудан да, $\left[\frac{1}{k}\varphi(kx)\right]' = \varphi'(kx)$ мүнасибәтиндән вә $\varphi'(x) = \Phi\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$ ејнилијиндән алырыр ки, $\varphi'(kx) = \Phi\left(\frac{\varphi(kx)}{kx}\right)$ ејнилији өдәнир. Бу исә о демәкдир ки, $y = \frac{1}{k}\varphi(kx)$ функсијасы да (32) тәнлијинин һәллидир.

Беләликлә, $y = \varphi(x)$ интеграл әјрисинин бүтүн (x, y) нөгтәләри үзәриндә

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky, \quad k \in (a, b) \quad (k \neq 0) \qquad (34)$$

чевирмәси апармагла алынан (x_1, y_1) нөгтәләринин һәндәси јери дә интеграл әјриси верир. Мә'лумдур ки, (34) чевирмәси охшарлыг мәркәзи координат башланғычында олан охшар чевирмәдир.

Демәли, бирчинс тәнлијин интеграл әјрисиндән охшарлыг мәркәзи координат башланғычында олан охшар чевирмә васитәсилә алынан әјри дә бирчинс тәнлијин интеграл әјриси олур. Бу тәклифин тәрси дә доғрудур; јә'ни бирчинс тәнлијин үмуми интегралындан алынан вә координат башланғычындан чыхан шүадан фәргли олан һәр бир интеграл әјрисини, һәмин

тип интеграл әјриләринин бириндән охшарлыг мәркәзи координат башланғычында олан охшар чевирмә васитәсилә алмаг олар. Доғрудан да, тутаг ки,

$$x = c\exp\omega\left(\frac{y}{x}\right) \text{ вә } x = c_1\exp\omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

(32) тәнлијинин ики мүхтәлиф интеграл әјриләридир. Биринчи интеграл әјрисинин тәнлијини $kx = kc\ \exp\omega\left(\frac{ky}{kx}\right)$ шәклиндә јазараг $k = \frac{c_1}{c}$ гәбул етсәк вә $x_1 = kx$, $y_1 = ky$ ишарә етсәк

$$x_1 = c_1\exp\omega\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

олар. Бу исә көстәрир ки, икинчи интеграл әјриси биринчи интеграл әјрисиндән (34) чевирмәси васитәсилә алыныр.

Бирчинс тәнлијин һәлләринин исбат етдијимиз хассәләриндән ашағыдакылар алыныр:

1) һәр һансы интеграл әјриси координат башланғычындан чыхан шүадан фәргли исә вә ики $y = \alpha_1 x$, $y = \alpha_2 x$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ шүалары арасында јерләшмәклә координат башланғычына јанашырса, һәмин шүалар арасында галан бүтүн интеграл әјриләри координат башланғычына јанашыр. ((32) тәнлијиндә $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ функсијасы (0, 0) нөгтәсиндә тә'јин олунмадығындан бу нөгтәдән кечән һәллин варлығыны демәк олмаз вә һәр һансы $y = \varphi(x)$ һәлли координат башланғычына јанашыр дедикдә $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ баша дүшүлүр);

2) һәр һансы әјри (32) тәнлијинин интеграл әјриси исә, координат башланғычына нәзәрән бу әјри илә симметрик олан әјри дә интеграл әјриси олур;

3) (32) тәнлијинин интеграл әјриләриндән бири гапалы әјри исә, бүтүн интеграл әјриләри гапалыдыр.

в) *Бирчинс тәнлијә кәтирилән тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (35)$$

тәнлији верилмишдир. Ајдындыр ки, $c_1 = c_2 = 0$ олдугда (35) тәнлији бирчинс тәнликдир. Она көрә дә c_1, c_2 әдәдләриндән һеч олмаса бирини сыфырдан фәргли гәбул едәрәк ашағыдакы һаллары араштыраг:

1) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Бу һалда $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ олур вә $z = a_2x + b_2y$ әвәзләмәси васитәсилә (35) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан тәнлијә кәтирилир.

2) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Бу һалда (35) тәнлијиндә

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta$$

әвәзләмәси апараг; бурада α, β һәләлик намә'лум әдәдләрдир. Онда (35) тәнлиji

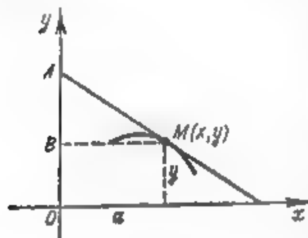
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2\xi + b_2\eta + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right) \qquad (35)$$

шәклинә дүшүр. Аjдындыр ки, α вә β әдәдләрини

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

системинин һәлли кими тә'јин етсәк, (35) тәнлиji бирчинс тәнлик олар.

Мисал 1. Һәр бир нөгтәсиндә тохунанынын ординат оху илә кәсишмә нөгтәси координат башланғычындан вә тохунма нөгтәсиндән еjни мәсафәдә јерләшән әjрини тапмалы.



Шәкил 3.

Һәлли. Ахтарылан әjрини $y = y(x)$ илә ишарә едәк. Бу әjри үзәриндә $M(x, y)$ нөгтәси көтүрәк вә тутаг ки, AM һәмин нөгтәдә әjриjә чәкилмиш тохунандыр (шәкил 3). Шәртә көрә $AM = OA$. Тохунанын һәндәси мә'насына көрә $\operatorname{tg}\alpha = y'$ олдуғундан $AB = -xy'$ вә $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{x^2y'^2 + x^2}$ олар. $AM = OA$ шәртинә әсасән

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

тәнлиjини алырыг. Бу тәнлик бирчинс тәнликдир вә $y = xz$ әвәзләмәси васитәсилә дәјишәнләринә аjрылмыш

$$\frac{2z\,dz}{1 + z^2} = -\frac{dx}{x}$$

тәнлиjинә кәтирилир. Онун үмуми интегралы $x(1 + z^2) - c = 0$ шәклиндәдир вә $z = \frac{y}{x}$ олдуғундан, алырыг ки, ахтарылан әjриләр $x^2 + y^2 - cx = 0$ олур.

Мисал 2.

$$4xy^2\,dx + (3x^2y - 1)\,dy = 0$$

тәнлиjини һәлл едәк.

Һәлли. Бу тәнликдә x, y, dx, dy дәјишәнләрини уjғун олараг $tx, t^ky, dx, t^{k-1}dy$ илә әвәз едәрәк топлананларын t-jә нәзәрән дәрәчәләрини бәрабәрләшдирәк. Онда k әдәди үчүн

$$1 + 2k = 2 + 2k - 1 = k - 1$$

тәнликләр системи алынар. Бурадан $k = -2$ вә демәли, верилән тәнлик үмумиләшмиш бирчинс тәнликдир. Онда

$$y = zx^{-2}$$

әвәзләмәси васитәсилә ону дәјишәнләринә аjрылан

$$2x^{-3}(z - z^2)\,dx + x^{-2}(3z - 1)\,dz = 0$$

тәнлиjинә кәтирә биләрик. Бу тәнлиjин үмуми интегралы

$$z(z - 1)^2 - cx^2 = 0$$

шәклиндәдир. Бурада $z = x^2y$ јазсаг бахылан тәнлиjин үмуми интегралы

$$y(x^2y - 1)^2 - c = 0$$

олар.

Мисал 3. $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x + y - 2}{x - 1}\right)^2$ тәнлиjини һәлл едәк.

Һәлли. Бу тәнлик үчүн $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Одур ки, тәнликдә $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ әвәзләмәси апарыб, α, β мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0, \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

тәнликләр системини алырыг. Бу системин һәлли $\alpha = 1$ $\beta = 1$ олдуғундан $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$ әвәзләмәси нәтичәсиндә

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi + \eta}{\xi}\right)^2$$

бирчинс тәнлиjи алынып. Она көрә $\eta = z\xi$ әвәзләмәси апараг, бу тәнликдән

$$2\xi\,dz = (1 + z^2)\,d\xi$$

дәјишәнләринә аjрылан тәнлиjи аларыг. Бу тәнлиjин үмуми интегралы

$$\xi - c\exp(2\operatorname{arctg} z) = 0$$

олдуғундан, бахылан тәнлиjин үмуми интегралы

$$x - 1 - c\exp\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y - 1}{x - 1}\right)\right) = 0.$$

§ 4. ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

Квадратура илә һәлл олунан тәнликләрдән бир синфи дә хәтти тәнликләрдир. Ахтарылан функсиjа вә онун төрәмәсинә нәзәрән хәтти олан

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$$

тәнлијинә биртәртибли *хәтти тәнлик* дејилир. $A(x) \neq 0$ гәбул едәрәк бу тәнлији

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (36)$$

шәклиндә јазаг.

Фәрз едәчәјик ки, $p(x)$, $q(x)$ функсијалары мүәјјән (a,b) интервалында кәсилмәздир. (a,b) интервалында $q(x) \equiv 0$ оларса, (36) тәнлији

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (37)$$

шәклинә дүшәр. Бу тәнлик (36) тәнлијинә ујғун олан хәтти бирчинс тәнлик адланыр.

(36) хәтти тәнлијиндә $f(x,y) = -p(x)\,y + q(x)$ функсијасы $D = \{a < x < b,\ -\infty < y < +\infty\}$ областында кәсилмәздир вә кәсилмәз $f_y(x,y) = -p(x)$ хүсуси төрәмәси вар. Буна көрә дә D областынын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (36) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Беләликлә, $p(x)$, $q(x)$ функсијалары кәсилмәздирсә, (36) тәнлијинин мәхсуси һәлли јохдур.

Ајдындыр ки, (37) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан тәнликдир вә онун үмуми һәлли

$$y = c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right),\quad x_0 \in (a,b) \qquad (38)$$

шәклиндәдир.

Бирчинс олмајан (36) тәнлијини һәлл етмәк үчүн

$$y = c(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right) \qquad (39)$$

әвәзләмәси апараг; бурада $c(x)$ јени ахтарылан функсијадыр. Бу әвәзләмәни (36) тәнлијиндә нәзәрә алсаг, $c(x)$-ә нәзәрән

$$\frac{dc}{dx} = q(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)$$

тәнлијини аларыг. Бурадан интеграллајараг аларыг ки,

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right)ds + c.$$

Бу ифадәни (39)-да нәзәрә алсаг (36) тәнлијинин үмуми һәллини

$$y = c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right) + \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right)ds \qquad (40)$$

шәклиндә гурарыг; бурада c ихтијари сабитдир.

**Бирчинс олмајан (36) тәнлијинин үмуми һәллини гураркән јухарыда тәтбиг етдијимиз үсула *сабитин вариасијасы үсулу* дејилир. Ајдындыр ки, үмуми һәллин ифадәсиндәки биринчи топланан бирчинс тәнлијин үмуми һәлли, икинчи топланан исә (36) тәнлијинин бир хүсуси һәллидир.

Демәли, бирчинс олмајан хәтти тәнлијин үмуми һәллини ики квадратура илә гурмаг олар.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (36) тәнлијинин $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тә'јин едән функсија

$$y = y_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right) + \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right)ds$$

дүстуру илә верилир.

Бундан әлавә, (40) дүстурундан ајдындыр ки, (36) тәнлијинин һәлләри (a,b) интервалында, јә'ни $p(x)$, $q(x)$ функсијаларынын кәсилмәз олдуглары интервалда, тә'јин олунурлар.

Гејд едәк ки, бу хассә гејри-хәтти тәнликләр үчүн, үмумијјәтлә, сахланылмыр. Доғрудан да, $y' = 1 + y^2$ тәнлијиндә $f(x,y) = 1 + y^2$ функсијасынын xOy мүстәвисиндә кәсилмәз олмасына бахмајараг, $y = \mathrm{tg}(x + c)$ һәлли, c-нин һәр бир гијмәтиндә һәгиги охдан $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi - c,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ нөгтәләрини чыхдыгдан сонра галан һиссәдә тә'јин олунмушдур.

Мисал. Һәчми 200 $м^3$ олан отаг һавасынын 0,15%-и карбон газыдыр. Отаға һәр дәгигә тәркибинин 0,04%-и карбон газы олан 20 $м^3$ һава вурулур вә һәмин сүр'әтлә отагдан гарышыг чыхыр. Нә гәдәр вахтдан сонра отагдакы карбон газынын мигдары 1,5 дәфә азалар?

Һәлли. Тутаг ки, t анында отагда $x(t)$ гәдәр карбон газы вар. Бир дәгигәдә отаға $\frac{20 \cdot 0{,}04}{100} = 0{,}008$ гәдәр карбон газы дахил олдуғундан, Δt мүддәтиндә $0{,}008\Delta t$ гәдәр карбон газы дахил олар. Дикәр тәрәфдән Δt мүддәтә отагдан $\frac{20}{200}[x(t) + \alpha]\Delta t = 0{,}1[x(t) + \alpha]\Delta t$ гәдәр карбон газы чыхыр; бурада α кәмијјәти Δt сыфра јахынлашдыгда сыфра јахынлашыр. Демәли, Δt мүддәтдә отагда карбон газынын дәјишмәси гануну

$$x(t + \Delta t) - x(t) = 0{,}008\Delta t - 0{,}1[x(t) + \alpha]\Delta t$$

олар. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини Δt-јә бөлүб, Δt сыфра јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк

$$\dot{x} + 0{,}1x = 0{,}008$$

тәнлијини аларыг. Алынан тәнлик хәтти тәнликдир, вә онун үмуми һәлли

$$x = c \cdot e^{-\frac{t}{10}} + 0{,}08$$

олур. $t=0$ анында отагда $\frac{200 \cdot 0{,}15}{100} = 0{,}3$ гәдәр карбон газы олдуғундан, t анында отагдакы карбон газынын мигдары

$$x(t) = 0{,}22 \cdot e^{-0{,}1t} + 0{,}08$$

олар. Шәртә көрә мүәјјән T анында карбон газынын мигдары 1,5 дәфә азалдығындан,

$$0{,}2 = 0{,}22 \cdot e^{-0{,}1T} + 0{,}08$$

олмалыдыр. Бурадан, $T \approx 6$ *дәг.*

§ 5. БЕРНУЛЛИ ТӘНЛИЈИ

Бә'зи гејри-хәтти тәнликләр әвәзләмә васитәсилә хәтти тәнлијә кәтирилир. Белә тәнликләрдән бири *Бернулли тәнлији* адланан

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \qquad (41)$$

тәнлијидир; бурада m сыфырдан вә ваһиддән фәргли ихтијари һәгиги әдәддир. Ајдындыр ки, $m=0$, $m=1$ олдугда (41) тәнлији хәтти тәнлијә чеврилир.

Фәрз едәк ки, $p(x)$, $q(x)$ функсијалары (a, b) интервалында кәсилмәздир.

Бернулли тәнлијини һәлл етмәк үчүн онун һәр тәрәфини y^{-m}-ә вураг $(y \neq 0)$ вә алынан

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$$

тәнлијиндә $y^{1-m} = z$ әвәзләмәси апараг. Бу заман z-ә нәзәрән

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$$

хәтти тәнлији алынар. Онун үмуми һәлли

$$z = \exp\left[(m-1)\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right]\Big\{c +$$

$$+ (1-m)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left[(1-m)\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right]ds\Big\} \qquad (42)$$

дүстуру илә верилир. Бурада $z = y^{1-m}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, Бернулли тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)\Big\{c +$$

$$+ (1-m)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left[(1-m)\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right]ds\Big\}^{\frac{1}{1-m}} \qquad (43)$$

олар. Ајдындыр ки, $m>0$ олдугда $y=0$ Бернулли тәнлијинин һәллидир. $m>1$ олдугда $y=0$ һәлли (43) үмуми һәллиндән $c=\infty$ кәтүрмәклә алыныр, јә'ни $m>1$ олдугда $y=0$ һәлли Бернулли тәнлијинин хүсуси һәллидир. $0<m<1$ олдугда исә $y=0$ һәлли, үмуми һәллдән c сабитинә мүмкүн әдәди гијмәт вермәклә алынмыр. Демәли, $0<m<1$ олдугда $y=0$ һәлли Бернулли тәнлијинин мәхсуси һәлли олур.

Мисал. Елә әјри тапын ки, онун һәр бир нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын ординат охундан ајырдығы парчанын узунлуғу, радиусу тохунма нөгтәсинин ординаты олан даирәнин саһәсинә гијмәтчә бәрабәр олсун.

Һәлли. Тутаг ки, $y = y(x)$ ахтарылан әјринин тәнлијидир. Әјри үзәриндә ихтијари (x, y) нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдә әјријә чәкилмиш тохунанын чари координатларыны X, $У$ илә ишарә едәрәк онун тәнлијини јазаг:

$$У - y = y'(x)(X - x).$$

Бурадан, тохунанын ординат охундан ајырдығы парчанын узунлуғунун $y - xy'$ олдуғуну аларыг. Радиусу $|y|$-ә бәрабәр олан даирәнин саһәси πy^2-на бәрабәрдир. Онда мәсәләнин шәртинә әсасән

$$y - xy' = \pi y^2 \text{ вә ја } xy' - y = -\pi y^2$$

Бернулли тәнлији алыныр. Онун үмуми һәлли

$$y = \frac{x}{c + \pi x}.$$

§ 6. ТАМ ДИФЕРЕНСИАЛЛЫ ТӘНЛИКЛӘР

Квадратура илә һәлл олунан биртәртибли тәнликләрин бир синфи дә там диференсиаллы тәнликләрдир.

Тутаг ки,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлији верилмишдир. Бурада $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсијалары мүәјјән биррабитәли D областында аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир, $M(x, y)$ функсијасынын y дәјишәнинә, $N(x, y)$ функсијасынын исә x дәјишәнинә нәзәрән бу областда кәсилмәз хүсуси төрәмәси вар, $M^2(x, y) + N^2(x, y) > 0$.

Мә'лумдур ки, D областында тә'јин олунмуш икидәјишәнли $u = u(x, y)$ функсијасынын там диференсиалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (44)$$

дүстуру илә һесабланыр

(21) тәнлијин сол тәрәфи һәр һансы $u(x,y)$ функсијасынын там диференсиалы оларса, јә'ни

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (45)$$

исә, һәмин тәнлијә D областында *там диференсиаллы тәнлик* дејилир. Беләликлә, (21) тәнлији там диференсиаллы тәнлик олдугда ону

$$du = 0$$

шәклиндә јазмаг олар вә һәмин тәнлијин үмуми интегралы

$$u(x,y) = c \qquad (46)$$

олур. Демәли, (21) тәнлији верилдикдә, 1) һәмин тәнлијин там диференсиаллы олдуғуну билмәк вә 2) тәнлик там диференсиаллы олдугда $u(x,y)$ функсијасыны гурмаг лазымдыр.

Теорем 1 (Там диференсиаллыг әламәти). *D областында (21) тәнлијинин там диференсиаллы тәнлик олмасы үчүн бу областда*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (47)$$

шәртинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, (21) тәнлији там диференсиаллыдыр. Онда (44), (45) мүнасибәтләриндән алыныр ки, D областында

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Бурадан, dx, dy диференсиаллары ихтијари олдуғундан

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv N(x,y) \qquad (48)$$

ејниликләри алынар. Бу ејниликләрин биринчисинин y-ә, икинчисинин x-ә нәзәрән төрәмәсини алсаг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

олар. Бурадан, гарышыг төрәмәләрин бәрабәрлији һаггында Шварс теореминә әсасән (47) шәртинин өдәндијини алырыг.

Кафилијин исбаты. Көстәрәк ки, (47) шәрти өдәндикдә елә $u(x,y)$ функсијасы вар ки, бу функсијанын там диференсиалы (21) тәнлијинин сол тәрәфинә бәрабәр олур. Бунун үчүн D областындан һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәрәк (48) бәрабәрликләринин биринчисини x_0-дан x-ә гәдәр интеграллaмагла оларыг ки,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)\,d\xi + \varphi(y); \qquad (49)$$

бурада $\varphi(y)$ һәләлик намә'лум диференсиалланан функсијадыр. Бу функсијаны елә сечәк ки, (49) дүстуру илә тә'јин олунан $u(x,y)$ функсијасы (48) бәрабәрликләриндән икинчисини дә өдәсин, јә'ни

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)\,d\xi\right) + \varphi'(y) = N(x,y)$$

олсун. Бурадан, $M(x,y)$ функсијасы үзәринә гојулан шәртләр дахилиндә y параметринә көрә интеграл алтында диференсиалламаг гануну олдуғундан

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi + \varphi'(y) = N(x,y)$$

олар. (47) шәртинә әсасән бу мүнасибәти

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(\xi,y)}{\partial \xi}\,d\xi + \varphi'(y) = N(x,y)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан $\varphi(y)$-ә нәзәрән

$$\varphi'(y) = N(x_0,y)$$

диференсиал тәнлији алыныр вә онун һәлли

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)\,d\eta + c \qquad (50)$$

олур; бурада c ихтијари сабитдир.

Ајдындыр ки, (50) илә тәјин олунан $\varphi(y)$ функсијасыны (49)-да јеринә јазсаг, алынан

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)\,d\eta + c$$

функсијасы үчүн (45) мүнасибәти өдәниләр. Бу исә көстәрир ки, (47) шәртинин өдәнмәси (21) тәнлијинин там диференсиаллы олмасы үчүн һәм дә кафидир.

Теоремин кафилијинин исбатындан ајдындыр ки, там диференсиаллы тәнлијин үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\eta)\,d\eta = c \qquad (51)$$

дүстуру илә верилир.

Көстәрмәк олар ки, там диференсиаллы (21) тәнлијинин $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси, јә'ни онун $y(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta = 0$$

тәнлијиндән гејри-ашкар функсија кими тә'јин олунур.

Гејд едәк, (48) бәрабәрликләриндән икинчисини көтүрүб јухарыдакы мүһакимәләри апармагла тәнлијин үмуми интегралыны

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x, \eta)\,d\eta = c \qquad (51)$$

шәклиндә дә тапмаг олар.

Мисал. $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0$ тәнлијини һәлл едәк.

Һәлли. $M(x, y) = 3x^2 - 2x - y$, $N(x, y) = 2y - x + 3y^2$ вә $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -1$, јә'ни верилән тәнлик там диференсиаллы тәнликдир. Она көрә дә тәнлијин үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x}(3\xi^2 - 2\xi - y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y}(2\eta - x_0 + 3\eta^2)\,d\eta = c$$

шәклиндәдир. Бурада

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

көтүрмәк әлверишлидир вә онда тәнлијин үмуми интегралы

$$x^3 - x^2 - xy + y^2 + y^3 = c.$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЛАЈЫЧЫ ВУРУГ

а) *Интеграллајычы вуруғун тапылмасы.* Там диференсиаллы тәнликләр квадратура илә һәлл олундуғундан, бә'зи тәнликләри там диференсиаллы тәнликләрә кәтирмәк јолу илә һәлл етмәк олур. Одур ки, там диференсиаллы олмајан тәнликләрин там диференсиаллы тәнлијә кәтирилмәси мәсәләси илә мәшғул олаг.

Тутаг ки,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлији верилмишдир. Бурада $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсијалары 5-ци параграфда гојулан шәртләри өдәјир вә $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Тутаг ки, ејниликлә сыфыр олмајан елә $\mu = \mu(x, y)$ функсијасы вардыр ки, (21) тәнлијинин һәр тәрәфини бу функсијаја вурдугда алынан

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0 \qquad (52)$$

тәнлији там диференсиаллы тәнликдир; јә'ни мүәјјән $U = U(x, y)$ функсијасы үчүн

$$dU = \mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy.$$

Белә $\mu = \mu(x, y)$ функсијасына (21) тәнлијинин *интеграллајычы вуруғу*, $U(x, y)$ функсијасына исә бу интеграллајычы вуруға ујғун интегралы дејилир. Бу заман (21) тәнлијинин үмуми интегралы

$$U(x, y) = c$$

мүстәви илә верилир.

Тутаг ки, $\mu = \mu(x, y)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғу, $U(x, y)$ исә она ујғун интегралыдыр. Онда

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{1}{\mu}dU$$

бәрабәрлијинә әсасән (21) тәнлијини

$$\frac{1}{\mu}\,dU = 0$$

шәклиндә јазмаг олар вә сонунчу тәнлик

$$dU = 0, \quad \frac{1}{\mu} = 0$$

тәнликләринә парчаланыр. Бу тәнликләрдән биринчиси (21) тәнлијинин $U(x, y) = c$ үмуми интегралыны верир.

Икинчи тәнликдән тә'јин олунан функсијалар (21) тәнлијинин һәлләри ола биләр. Бу функсијаларын һансы (21) тәнлијинин һәлли исә вә үмуми интегралдан алынырса хүсуси һәлл, алынмајанлар исә мәхсуси һәлл олур.

Верилмиш диференсиал тәнлији там диференсиаллы тәнлијә кәтирмәк јолу илә һәлл едәркән әсас чәтинлик интеграллајычы вуруғу тапмагдан ибарәтдир.

Инди исә $\mu = \mu(x, y)$ интеграллајычы вуруғунун ејниликлә сыфыр олмадығыны вә кәсилмәз төрәмәләринин варлығыны фәрз едәрәк онун тапылмасы мәсәләси илә мәшғул олаг. Там диференсиаллыг әламәтинә әсасән, (52) тәнлијинин там диференсиаллы тәнлик олмасы үчүн D областында

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

шәрти өдәнмәлидир. Бурада $\mu = \mu(x, y)$ функсијасына ахтарылан функсија кими бахсаг, бу функсијаја нәзәрән

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (53)$$

диференсиал тәнлији алынар. Бу тәнлијә $\mu(x, y)$ функсијасынын хүсуси төрәмәләри дахилдир. Белә тәнлијә *хүсуси төрәмәли тәнлик* дејилир.

Үмуми һалда, (53) тәнлијини һәлл етмәк (21) тәнлијини һәлл етмәкдән чәтиндир. Лакин хүсуси һалларда (53) тәнли-

јинин бә'зи һалларыны тапмаг олур. Бу һаллары нәзәрдән кечирәк.

1. Тутаг ки, (21) тәнлијинин интегралллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз x дәјишәниндән асылы олан интегралллајычы вуруғу вар. Бу вуруг үчүн $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ олдуғундан, (53) тәнлији

$$N\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

шәклиндә ади диференсиал тәнлијә чеврилир. Бурадан

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (54)$$

мүнасибәтини аларыг. Алынан бәрабәрлијин сол тәрәфи јалныз x-дән асылы олдуғундан, сағ тәрәфи дә јалныз x-дән асылы функсија олмалыдыр. Онда (54) тәнлијини

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

шәклиндә јазыб интегралласаг,

$$\mu(x) = c\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx\right). \qquad (55)$$

Бурада c ихтијари сабитдир.

Беләликлә, $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ нисбәти анчаг x-дән асылы оларса, (21) тәнлијинин интегралллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз x-дән асылы олан интегралллајычы вуруғ вар вә (55) шәклиндәдир.

2. Тутаг ки, (21) тәнлијинин интегралллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз y дәјишәниндән асылы интегралллајычы вуруғ вар. Белә интегралллајычы вуруг үчүн $\frac{d\mu}{dx}=0$ вә бу һалда (53) тәнлији

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

шәклинә дүшүр. Бурадан, јухарыдакына охшар гајда илә мүһакимә апармагла аларыг ки, јалныз y-дән асылы олан интегралллајычы вуруг

$$\mu(y) = c\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\,dx\right)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

3. Тутаг ки, (21) тәнлијинин интегралллајычы вуруглары ичәрисиндә верилмиш $\omega(x,y)$ функсијасындан асылы интегралллајычы вуруғу вар: $\mu=\mu[\omega(x,y)]$. Онда

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} \quad \text{вә} \quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

олдуғундан, (53) тәнлији ашағыдакы шәклә дүшүр:

$$\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega).$$

Бурадан

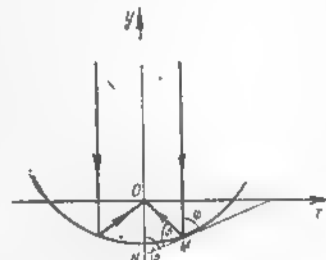
$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Бу бәрабәрлијин сол тәрәфи анчаг ω дәјишәнинин функсијасы олдуғундан, сағ тәрәф дә ω дәјишәнинин функсијасы олмалыдыр вә бу шәрт өдәндикдә (21) тәнлијинин

$$\mu = \exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}\,d\omega\right)$$

шәклиндә интегралллајычы вуруғу вар.

Мисал 1. Ординат охуна паралел дүшән ишыг шүалары күзкүдә әкс олунуб координат башланғычында топланыр. Күзкүнүн формасыны тә'јин един.



Шәкил 4

Һәлли. Күзкүнүн xOy мүстәвиси илә кәсијини $y=y(x)$ илә ишарә едәк вә бу функсијаны тапаг. $y=y(x)$ әјриси үзәриндә $M(x,y)$ нөгтәси көтүрүб MN тохунанны чәкәк (шәкил 4). Ишығын сынма ганунуна әсасән $\angle MNO = \angle OMN$ олар. Бурадан, $ON=MO$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

диференсиал тәнлијини аларыг. Бу тәнлик бирчинс тәнликдир. Ону

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$$

шәклиндә јазыб $\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ функсијасына вураг. Онда

$$\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}\right)dx - \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

там диференсиаллы тәнлији алынар, јә'ни $\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ функсијасы алынмыш тәнлијин интеграллајычы вуруғудур. Бу тәнлијин үмуми интегралы

$$2cy = c^2x^2 - 1.$$

Бурада c ихтијари сабитдир.

Демәли, күзкүнүн xOy мүстәвиси илә кәсији, симметрија оху ординат оху олан параболалар аиләси верир. Күзкүнүн формасы исә һәмин параболаларын ординат оху әтрафында фырланмасындан алынан

$$2cy = c^2(x^2+z^2) - 1$$

параболоидләр шәклиндә олар.

Мисал 2. $y(xy+1)dx + x(xy-1)dy = 0$ тәнлијини һәлл едәк.

Һәлли. Тәнликдә $M(x,y) = y(xy+1)$, $N(x,y) = x(xy-1)$, $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \neq 0$ олдуғундан, бахылан тәнлик там диференсиаллы дејил.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2}{x(xy-1)}, \qquad \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{4}{y(xy+1)}$$

олдуғундан тәнлијин интеграллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз x вә јалныз y дәјишәниндән асылы интеграллајычы вуруғу јохдур. Интеграллајычы вуруғу $\mu = \mu(\omega(x,y))$ шәклиндә ахтараг; бурада $\omega = xy$. Онда

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}} = -\frac{1}{xy}$$

олдуғундан, тәнлијин $\mu = \frac{1}{xy}$ шәклиндә интеграллајычы вуруғу вар. Тәнлијин һәр тәрәфини $\frac{1}{xy}$ функсијасына вурсаг

$$\left(y+\frac{1}{x}\right)dx + \left(x-\frac{1}{y}\right)dy = 0$$

там диференсиаллы тәнлији алынар вә онун үмуми интегралы

$y = cxe^{xy}$. Бахылан тәнлијин бу һәлләриндән башга $\frac{1}{\mu} = 0$ тәнлијиндән тапылан $x = 0 (y \neq 0)$ вә $y = 0 (x \neq 0)$ һәлләри алыныр. Лакин бу һәлләр үмуми интегралдан c сабитинә мүмкүн әдәди гијмәтләр вермәклә алыныр. Она көрә бахылан тәнлијин хүсуси һәлли јохдур.

б) *Интеграллајычы вуруғун варлығы.* Интеграллајычы вуруг һаггында ашағыдакы теоремләри исбат едәк

Теорем 2. *(21) тәнлијинин диференсиалланан $u(x,y)$ интегралы варса, онун интеграллајычы вуруғу вар.*

Исбаты. Интегралын тә'рифинә әсасән (21) тәнлијинин интеграл әјриләри бојунча

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0.$$

Дикәр тәрәфдән, интеграл әјриләри бојунча (21) тәнлији өдәндијиндән dx, dy-ә нәзәрән

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,\\ Mdx + Ndy = 0\end{cases}$$

системи алынар. Лакин (21) тәнлијинин интеграл әјриләри бојунча dx, dy елементләриндән бири сыфырдан фәргли олдуғундан, бурадан алырыг ки,

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ M & N\end{vmatrix} = 0$$

олмалыдыр. Демәли, $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$. Бу гајда илә тә'јин олунан $\mu = \mu(x,y)$ функсијасы үчүн

$$\mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = du$$

олдуғундан алырыг ки, $\mu = \mu(x,y)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғудур.

Интеграллајычы вуруғун тә'рифиндән ајдындыр ки, $\mu = \mu(x,y)$ интеграллајычы вуруг исә, истәнилән c сабит әдәди үчүн $c\mu(x,y)$-дә интеграллајычы вуругдур.

Теорем 3. *Тутаг ки, $\mu_0 = \mu_0(x,y)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғу, $u_0(x,y)$ исә һәмин вуруға ујғун интегралыдыр. Онда ејниликлә сыфыр олмајан кәсилмәз $\varphi(z)$ функсијасы үчүн*

$$\mu = \mu_0(x,y)\varphi(u_0) \qquad (56)$$

функсијасы да (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғудур.

Исбаты. Доғрудан да,
$$\mu_0(x,y)\varphi(u_0)(M\,dx+N\,dy)=\varphi(u_0)(\mu_0 M\,dx+\mu_0 N\,dy)=\varphi(u_0)\,du_0=d\int\varphi(u_0)\,du_0$$
мүнасибәти көстәрир ки, $\mu_0\varphi(u_0)(Mdx+Ndy)$ ифадәси $\int\varphi(u_0)du_0$ функсијасынын там диференсиалына бәрабәрдир. Башга сөзлә десәк, $\mu_0\varphi(u_0)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғудур.

Беләликлә, (21) тәнлијинин бир интеграллајычы вуруғу варса, онун μ_0-дан сабит вуругла фәргләнмәјән сонсуз сајда интеграллајычы вуруғу вар.

Көстәрәк ки, $\varphi(z)$ функсијасыны сечмәклә (56) дүстурундан (21) тәнлијинин бүтүн интеграллајычы вуругларыны алмаг олар.

Теорем 4. *Тутаг ки, $\mu_0=\mu_0(x,y)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғу, $u_0(x,y)$ исә бу вуруға ујғун диференсиалланан интегралыдыр. Онда (21) тәнлијинин истәнилән $\mu=\mu(x,y)$ интеграллајычы вуруғу үчүн елә кәсилмәз $\varphi(z)$ функсијасы вар ки,*
$$\mu=\mu_0\varphi(u_0).$$

Исбаты. Фәрз едәк ки, $\bar{D}$ областында $\frac{\partial u_0}{\partial y}\neq 0$. Онда гејри-ашкар функсијанын варлығ теореминә әсасән $u_0(x,y)$-ин гијмәтләри чохлуғундан олан һәр бир c_0 үчүн
$$u_0(x,y)=c_0 \qquad (57)$$
бәрабәрлији јеканә $y=\varphi(x,c_0)$ функсијасы тә'јин едир. Бундан башга, $u_0(x,y)$ функсијасы диференсиалланан олдуғундан, $y=\varphi(x,c_0)$ функсијасы икидәјишәнли функсија кими диференсиалланан олур.

Тутаг ки, $\mu=\mu(x,y)$ функсијасы (21) тәнлијинин һәр һансы интеграллајычы вуруғу, $u(x,y)$ исә она ујғун диференсиалланан интегралыдыр. Онда $y=\varphi(x,c_0)$ интеграл әјриси бојунча
$$u(x,\varphi(x,c_0))=c \qquad (58)$$
ејнилији өдәнәр. Бурадан, c илә c_0 арасында $c=\Phi(c_0)$ асылылығы алыныр. Демәли,
$$u(x,\varphi(x,c_0))=\Phi(c_0).$$
$u(x,y)$ вә $\varphi(x,c_0)$ функсијалары диференсиалланан олдуғундан сонунчу ејниликдән алыныр ки, $\Phi(z)$ функсијасы да диференсиалланандыр.

Беләликлә, (57), (58) мүнасибәтләринә әсасән $u_0(x,y)$ вә $u(x,y)$ функсијалары арасында
$$u=\Phi(u_0) \qquad (59)$$
функсионал асылылығы алыныр

Дикәр тәрәфдән, $\mu_0(x,y)$, $\mu(x,y)$ функсијалары (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруглары вә $u_0(x,y)$, $u(x,y)$ онлара ујғун интеграллар олдуғундан, $\mu_0(Mdx+Ndy)=du_0$, $\mu(Mdx+Ndy)=du$ бәрабәрликләринә әсасән
$$\mu=\mu_0\frac{du}{du_0}.$$
Бу мүнасибәти, (59) дүстуруна әсасән, $\mu=\mu_0\Phi'(u_0)$ шәклиндә јазмаг олар вә демәли $\varphi(z)=\Phi'(z)$ көтүрсәк теоремин исбатыны аларыг.

Мисал 3. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$ тәнлијиндә $\mu_0(x,y)=1$ интеграллајычы вуруг, $u_0(x,y)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ исә она ујғун интегралдыр.

Дикәр тәрәфдән, бахылан тәнлији $\mu=\frac{x+y}{1-xy}$ функсијасына вурмагла алынан
$$\frac{x+y}{(1+x^2)(1-xy)}dx+\frac{x+y}{(1+y^2)(1-xy)}dy=0$$
тәнлији там диференсиаллы тәнлик олдуғундан, $\mu=\frac{x+y}{1-xy}$ функсијасы да интеграллајычы вуругдур. Онда теоремә әсасән $\mu=\mu_0\varphi(u_0)$, јә'ни $\frac{x+y}{1-xy}=\varphi(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)$ олмалыдыр. Бу шәрти өдәјән $\varphi(z)$ функсијасыны тапаг. Бунун үчүн $\frac{x+y}{1-xy}=\varphi(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)$ бәрабәрлијиндә $y=0$ көтүрәк, онда $x=\varphi(\operatorname{arctg}x)$ олар. Демәли $\varphi(z)=\operatorname{tg}z$ олмалыдыр.

Бурадан, тригонометријадан мә'лум олан
$$\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)$$
дүстуруну аларыг.

§ 8. РИККАТИ ТӘНЛИЈИ

Јухарыда квадратура илә һәлл олунан бә'зи диференсиал тәнликләрлә таныш олдуг. Лакин, елә садә тәнликләр вар ки, онлар квадратура илә һәлл олунмурлар. Белә тәнликләрә мисал олараг *Риккати тәнлији* адланан
$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \qquad (60)$$
тәнлијини көстәрмәк олар. Бурада $p(x)$, $q(x)$ вә $r(x)$ мүәјјән (a,b) интервалында тә'јин олунмуш функсијалардыр. Хүсуси һалда $p(x)\equiv 0$ олдугда Риккати тәнлији хәтти тәнлијә, $r(x)\equiv 0$ олдугда исә Бернулли тәнлијинә чеврилир.

Ајдындыр ки, $p(x)$, $q(x)$ вә $r(x)$ функсијалары (a, b) интервалында кәсилмәз олдугда $f(x, y) = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ вә $f_y(x, y) = 2p(x)y + q(x)$ функсијалары $D = \{a < x < b; -\infty < y < +\infty\}$ областында кәсилмәз олурлар. Она көрә дә бу областын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (60) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Буна бахмајараг һәмин интеграл әјрисини квадратура илә тапмаг, үмумијјәтлә, мүмкүн дејил. Лакин Рккати тәнлијинин бир хүсуси һәлли мә'лум олдугда онун үмуми һәллини квадратура илә гурмаг мүмкүндүр. Доғрудан да, $y = \varphi(x)$ функсијасы Риккати тәнлијинин һәр һансы хүсуси һәлли исә $y = z + \varphi(x)$ әвәзләмәси васитәсилә онун үмуми һәллинин тапылмасы

$$z' = [q(x) + 2p(x)\varphi(x)]z + p(x)z^2$$

Бернулли тәнлијинин үмуми һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Бә'зи һалларда $p(x)$, $q(x)$ вә $r(x)$ әмсалларынын верилмәсиндән асылы олараг Риккати тәнлијинин бир хүсуси һәллини тапмаг олур. Риккати тәнлији: а) $p(x) = Am(x)$, $q(x) = Bm(x)$, $r(x) = Cm(x)$ (A, B, C — сабит әдәдләрдир) олдугда дәјишәнләринә ајрылан, б) $p(x) = \frac{A}{x^2}$, $q(x) = \frac{B}{x}$, $r(x) = C$ олдугда бирчинс вә в) $p(x) = A$, $q(x) = \frac{B}{x}$, $r(x) = \frac{C}{x^2}$ олдугда исә үмумиләшмиш бирчинс тәнлијә чеврилир.

$$y' = y^2 + cx^\alpha \qquad (c \neq 0)$$

шәклиндә олан тәнлијә *хүсуси Риккати тәнлији* дејилир; бурада α һәгиги әдәддир. Ајдындыр ки, $\alpha = 0$ олдугда бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылан, $\alpha = -2$ олдугда исә үмумиләшмиш бирчинс тәнлик олур.

Лиувилл исбат етмишдир ки, α-нын анҹаг вә анҹаг $\frac{\alpha}{2\alpha + 4}$ әдәдинин там олмасыны тә'мин едән гијмәтләриндә хүсуси Риккати тәнлији квадратура илә һәлл олунур.

Мисал 4. Мәркәзләри $y^2 = 4x$ параболасы үзәриндә вә радиуслары $\frac{1}{2}$-ә бәрабәр олан чеврәләр аиләсини дүз буҹаг алтында кәсән әјрини тапмалы.

Һ ә л л и. Ахтарылан әјри үзәриндә ихтијари $M(X, У)$ нөгтәси көтүрәк. Мәркәзи $y^2 = 4x$ параболасы үзәриндә, радиусу $\frac{1}{2}$ олан вә $M(X, У)$ нөгтәсиндән кечән чеврәни S илә, онун мәркәзинин координатларыны исә a, b илә ишарә едәк. Онда $M(X, У)$ вә $O_1(a, b)$ нөгтәләриндән кечән дүз хәттин абсис оху илә әмәлә кәтирдији буҹағы θ илә ишарә етсәк, мәсәләнин шәртинә әсасән

$$X = a + \frac{1}{2}\cos\theta, \quad Y = b + \frac{1}{2}\sin\theta, \tag{61}$$

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\theta \tag{62}$$

олар (шәкил 5). $O_1(a, b)$ нөгтәси $y^2 = 4x$ параболасы үзәриндә јерләшдијиндән $b^2 = 4a$. Бурада $b = t$ параметри дахил етсәк $a = \frac{1}{4}t^2$ олар. Бунлары (61) бәрабәрликләриндә јазыб, (61) мүнасибәтләрини (62)-дә нәзәрә алсаг, $\theta = \theta(t)$ функсијасыны тапмаг үчүн

$$\frac{d\theta}{dt} = t\sin\theta - 2\cos\theta \tag{63}$$

диференсиал тәнлијини аларыг. Бурада $z = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ әвәзләмәси апарсаг

$$\frac{dz}{dt} = z^2 + tz - 1 \tag{64}$$

тәнлији алынар. Ајдындыр ки, бу тәнлик Риккати тәнлијидир вә $z = -t$ онун хүсуси һәллидир.

(64) тәнлијиндә $z = u - t$ әвәзләмәси апараг. Онда u функсијасы үчүн

$$\frac{du}{dt} + tu = u^2$$

Бернулли тәнлији алынар. Бу тәнлијин үмуми һәллини тапыб $z = u - t$ әвәзләмәсиндә нәзәрә алсаг, (64) тәнлијинин үмуми һәллини

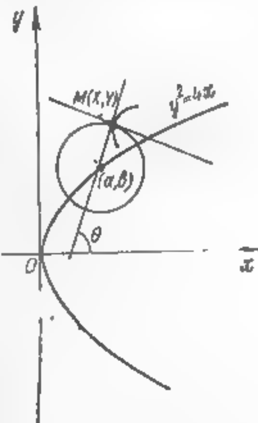
$$z = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(c - \int e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^{-1} - t$$

шәклиндә тапмыш оларыг.

Беләликлә, (63) тәнлијинин үмуми һәлли

$$\theta = 2\operatorname{arctg}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\left(c - \int e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^{-1} - t\right).$$

Бу һәлли (61) бәрабәрликләриндә јеринә јазсаг ахтарылан әјриләр аиләсинин параметрик шәкилдә тәнлијини аларыг.



Шәкил 5.

Чалышмалар

1. Көстәриләи әјриләрин верилмиш диференсиал тәнлијин өдәдијини јохлајын:

а) $y=\frac{c}{2}x^2-\frac{x}{2c}$; $2xy' = 3y + \sqrt{y^2+x^2}$.

б) $(x+y)^2 e^{\frac{c}{x+y}} - cx^3 = 0$; $(x^2+2xy)y' = x^2+3xy+3y^2$.

в) $x = ce^t,\ y = t^2+ce^t$; $xy' = x + 2\sqrt{y-x}$.

2. Изоклин үсулу илә верилмиш тәнликләрин интеграл әјриләрини тәгриби гурун:

а) $y' = x+y$; б) $y' = x^2-y$; в) $y' = y^2-x$.

Ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

3. $x(y^2+1)\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$. Чаваб: $(x^2-1)\,e^{2\,\mathrm{arc\,tg}\,y} = c$.

4. $(y^2-y)\,dx + x\,dy = 0$. Чаваб: $x(y-1) = cy$.

5. $(\sin x-\cos x)\,dy + (\cos x+\sin x)\sqrt{y-1}\,dx = 0$.
Чаваб: $(\sin x - \cos x)\,e^{2\sqrt{y-1}} = c;\ y=1$.

6. $x^2dy - (x^2+xy+y^2)\,dx = 0$. Чаваб: $x = ce^{\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

7. $x^2dy - (x^2-xy+y^2)\,dx = 0$. Чаваб: $x = ce^{\frac{x}{x-y}}$.

8. $4xy\,dy + (x-y^2)\,dx = 0$. Чаваб: $(x+y^2)^2 = cx,\ c \geqslant 0$.

9. $y\,dy + (2x^3-5xy)\,dx = 0$. Чаваб: $(y-2x^2)^4 = c(2y-x^2)$

10. $y' - 2y = 2x - 2x^2$. Чаваб: $y = ce^{2x} + x^2$.

11. $\cos x\cdot y' + \sin x\cdot y = \cos 2x$. Чаваб: $y = c\cos x + 2x\cos x - \sin x$.

12. $y' + \sin x\cdot y = \sin x\cdot y^2$. Чаваб: $(c+e^{\cos x})y = e^{\cos x}$.

13. $xy' - 2y = x\sqrt{y}$. Чаваб: $y = x^2\left(\frac{1}{2}\ln x + c\right)^2$, $y=0$.

14. $2(x+y^2)dx + (4xy+1)dy = 0$. Чаваб: $2xy^2 + y + x^2 = c$.

15. $(y^2+\cos x\cos y)dx + (2xy - \sin x\sin y)\,dy = 0$. Чаваб: $xy^2 + \sin x\cos y = c$.

16. $(xy^2+y)dx - (x+y)\,dy = 0$, $\mu = \mu(y)$. Чаваб: $x^2y + 2x - 2y\ln y = cy$.

17. $y(x+1+0{,}5y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$, $\mu = \mu(x)$. Чаваб: $e^x(xy+0{,}5y^2) = c$.

18. $(3y^2-x)\,dx + (2y^3-6xy)\,dy = 0$, $\mu = \mu(x+y^2)$. Чаваб: $(x+y^2)^2c = x-y^2$.

19. $y' = \cos x - \sin^2 x + 2\sin x \times y - y^2$, $y_1 = \sin x$. Чаваб: $(x+c)y = c\sin x + x\sin x + 1$.

20. $2xe^{3x}y' - e^{6x} + (1+6x)e^{3x}y - 2y^2$, $y_1 = e^{3x}$. Чаваб: $(cx^{3/2}-2)y = e^{3x}(cx^{3/2}+1)$.

БИРТӘРТИБЛИ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛӘРИНИН ВАРЛЫҒЫ ВӘ ЈЕКАНӘЛИЈИ

Нәзәри тәдгиг олунан мәсәләләрдә алынан диференсиал тәнликләр, үмумијјәтлә, квадратура илә һәлл олунмур вә мәсәләнин мә'насы алынан тәнлијин һәллинин варлығыны көстәрмәклә изаһ олунур. Тәсвир олунан просесин характери ујғун диференсиал тәнлијин һәлләринин хассәләринә әсасән мүәјјән олунур. Бу исә ујғун тәнлијин мүәјјән шәртләри өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији илә әлагәдардыр.

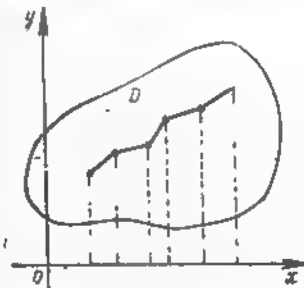
Бу фәсилдә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли ади диференсиал тәнлик үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији өјрәнилир.

§ 1. ЕЈЛЕР СЫНЫГ ХӘТТИ

Тутаг ки,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

тәнлији верилмишдир; бурада $f(x, y)$ функсијасы xOy мүстәвисинин мүәјјән D областында тә'јин олунмушдур. Бу областдан һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәк вә һәмин нөгтәдән бучаг әмсалы $f(x_0, y_0)$ олан дүз хәтт кечирәк. Бу дүз хәтт үзәриндә абсиси x_0-дан сағда јерләшән вә D областына дахил олан (x_1, y_1) нөгтәси көтүрүб бучаг әмсалы $f(x_1, y_1)$ олан дүз хәтт кечирәк вә с. Бу гајда илә тәпә нөгтәләри (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... олан вә D областында јерләшән сыныг хәтт аларыг. Белә сыныг хәттә (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан *Ејлер сыныг хәтти* дејилир (шәкил 6).



Шәкил 6

Ејни гајда илә (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан вә абсисләри x_0-дан солда јерләшән Ејләр сыныг хәтти дә гурмаг олар. Просеси x_0-дан һәм сола, һәм дә сағa доғру апармагла тәпә нөгтәләри ..., (x_{-2}, y_{-2}), (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)...

олан вә D областында јерләшән бир сыныг хәтт аларыг. Бу сыныг хәттә (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән Ејләр сыныг хәтти дејилир

Ајдындыр ки, $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \ldots$ нөгтәләрини мүхтәлиф көтүрмәклә, (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән сонсуз сајда Ејлер сыныг хәтти гурмаг олар. Бир чох һалларда (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән елә Ејлер сыныг хәттләр ардычыллығы гурмаг олур ки, бу ардычыллығын вә ја онун јығылан алтардычыллығынын лимити, тәнлијин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси олур.

Диференсиал тәнлијин һәллинин варлығыны Ејлер сыныг хәтләринин көмәји илә көстәрәркән бу сыныг хәтләри ашағыда гурулан аналитик ифадәсиндән истифадә олунур.

Ајдындыр ки, верилмиш $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәси үчүн елә мүсбәт a, b әдәдләри тапмаг олар ки,

$$R = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a;\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$$

дүзбучаглысы тамамилә D областында јерләшәр.

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы R дүзбучаглысында $M > 0$ әдәди илә мәһдуддур: $|f(x, y)| < M$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ ишарә едәк вә $h_m = \frac{\alpha}{2^m}$, $m = 1, 2, \ldots$ әдәди ардычыллығына бахаг. Садәлик үчүн $x_0 = 0$ гәбул едиб һәр бир m әдәди үчүн $[0, \alpha]$ парчасында ашағыдакы рекуррент дүстурларла $\varphi_m(x)$ функсијасы дүзәлдәк:

$$\varphi_m(x) = y_0 + f(0, y_0)x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant h_m$$
$$\varphi_m(x) = \varphi_m(h_m) + f(h_m, \varphi_m(h_m))(x - h_m), \quad h_m \leqslant x \leqslant 2h_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$
$$\varphi_m(x) = \varphi_m(rh_m) + f(rh_m, \varphi_m(rh_m))(x - rh_m), \quad rh_m \leqslant x \leqslant (r+1)h_m$$
$$r = 2, 3, \ldots, 2^m - 1.$$

Ајдындыр ки, (2) дүстурлары илә верилән $\varphi_m(x)$ функсијасынын графики $[0, \alpha]$ парчасында h_m бөлкүсүнә ујғун Ејлер сыныг хәтти олур. Ејни гајда илә $[-\alpha, 0]$ парчасында да h_m бөлкүсүнә ујғун Ејлер сыныг хәттини гурмаг олар.

§ 2. АРСЕЛА ТЕОРЕМИ

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш $\{f(x)\}$ функсијалар аиләси верилмишдир. Бу аиләнин ихтијари $f(x)$ функсијасы вә $x \in [a, b]$ үчүн $|f(x)| \leqslant M$ шәртини өдәјән $M > 0$ әдәди варса, дејирләр ки, $\{f(x)\}$ аиләси $[a, b]$ парчасында *мүнтәзәм мәһдуддур*. Мәсәлән, $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ардычыллығы $[-1, 1]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуддур.

Ајдындыр ки, аиләнин $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуд олмасындан, аиләнин һәр бир функсијасынын бу парчада мәһдудлуғу алыныр, лакин һәр бир функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд олан аилә бу парчада мүнтәзәм мәһдуд олмаја да биләр. Мәсәлән $\{x^n\}$ аиләсинин һәр бир функсијасы $[0, 2]$ парчасында мәһдуд олмасына бахмајараг, аилә бу парчада мүнтәзәм мәһдуд дејил.

Истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә анҹаг ε-дан асылы олан елә $\eta > 0$ әдәди тапмаг мүмкүн олса ки, $\{f(x)\}$ аиләсиндән көтүрүлмүш истәнилән $f(x)$ функсијасы вә $|x'' - x'| < \eta$ шәртини өдәјән истәнилән $x', x'' \in [a, b]$ нөгтәләри үчүн $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ шәрти өдәнсин, онда дејирләр ки, $\{f(x)\}$ аиләси $[a, b]$ парчасында *ејни дәрәҹәдән кәсилмәздир*.

Тә'рифдән көрүнүр ки, аиләнин верилмиш парчада ејни дәрәҹәдән кәсилмәзлијиндән аиләнин һәр бир функсијасынын бу парчада мүнтәзәм кәсилмәзлији алыныр, лакин һәр бир функсијасы верилмиш парчада мүнтәзәм кәсилмәз олан аилә бу парчада ејни дәрәҹәдән кәсилмәз олмаја да биләр. Мәсәлән, $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, \ldots$ аиләсинин һәр бир функсијасы $[0, \pi]$ парчасында мүнтәзәм кәсилмәздир, анҹаг аилә $[0, \pi]$ парчасында ејни дәрәҹәдән кәсилмәз дејил. Буну көстәрмәк үчүн $x' = 0$, $x'' = \frac{\pi}{2n}$ нөгтәләрини көтүрәк. Ајдындыр ки, ихтијари η үчүн n-и кифајәт гәдәр бөјүк көтүрсәк, $|x'' - x'| < \eta$ олар, лакин һәмин x', x'' үчүн

$$|\sin nx'' - \sin nx'| = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Демәли, $\{\sin nx\}$ аиләси $[0, \pi]$ парчасында ејни дәрәҹәдән кәсилмәз дејил.

Гејд едәк ки, јухарыдакы тә'рифләри (a, b) интервалында да вермәк олар.

Теорем 1. *Сонлу $[a, b]$ парчасында ејни дәрәҹәдән кәсилмәз вә мүнтәзәм мәһдуд олан сонсуз $\{f(x)\}$ функсијалары аиләсиндән бу парчада мүнтәзәм јығылан функсијалар ардычыллығы сечмәк олар.*

Исбаты. Мүнтәзәм мәһдудлуг шәртинә әсасән аиләнин бүтүн функсијаларынын графикләри, тәрәфләри $b - a$ вә $2M$ олан $ABCE$ дүзбучаглысында јерләшир (шәкил 7).

Сонсуз $\varepsilon_n = \frac{M}{2^{n+m}}$, $n = 1, 2, \ldots$; $m \geqslant 0$ әдәди ардычыллығына бахаг. Ејни дәрәҹәдән кәсилмәзлијә әсасән һәр бир ε_n ($n = 1, 2, \ldots$) әдәдинә көрә елә $\eta_n = \eta(\varepsilon_n) > 0$ әдәди вар ки, бу әдәдләр үчүн ејни дәрәҹәдән кәсилмәзлик шәрти өдәнир.

$ABCE$ дүзбучаглысынын шагули тәрәфини узунлуғу ε_1-ә бәрабәр, үфүги тәрәфини исә узунлуғу η_1-дән бөјүк олмајан һиссәләрә бөләк вә алынан нөгтәләрдән координат охларына паралел дүз хәтләр кечирәк. Бу заман $ABCE$ дүзбучаглысы

кичик дүзбучаглылара бөлүнәчәк Шагули золаглары уjғун оларағ I, II, ... рәгәмләри илә нөмрәләjәк. Аиләнин ихтиjари $f(x)$ функсиjасы үчүн $|x''-x'|<\eta_1$ олдугда $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_1$ олдуғундан, бу функсиjанын графики золаглардан һәр биринин ики гоншу дүзбучаглысындан кәнара чыха билмәз. I золагда олан дүзбучаглылар сонлу, функсиjалар исә сонсуз саjда олдуғундан, бу золагда һеч олмаса елә ики гоншу дүзбучаглы вар ки, онлардан $\{f(x)\}$ аиләсинин сонсуз саjда функсиjасынын графики кечир. Белә ики гоншу дүзбучаглыны Δ_1 илә ишарә едәк. Әкәр белә гоншу дүзбучаглылар чох оларса, онлардан бир чүтүнү көтүрмәк кифаjәтдир. Графикләри анчаг Δ_1-дә jерләшән функсиjалара бахаг. Бу функсиjаларын графикләри II золагда анчаг дөрд гоншу дүзбучаглыда jерләшәчәкдир. Һәр бир функсиjанын графики исә ики гоншу дүзбучаглыда jерләшә биләр. Она көрә бу дөрд гоншу дүзбучаглы ичәрисиндә ики гоншу дүзбучаглы вар ки, графики Δ_1-дә jерләшән сонсуз саjда функсиjанын графики бурада jерләшәчәкдир. Бу гоншу дүзбучаглылары Δ_2 илә ишарә едәк. Белә мүһакимәни сонракы золаглар үчүн дә апарсаг, нәтиҹәдә $ABCE$ дүзбучаглысында jерләшән вә $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ дүзбучаглыларындан тәшкил олунан гапалы S_1 областыны аларыг. Графикләри S_1-дә jерләшән аиләни $\{f_1(x)\}$ илә ишарә едәк.

Шәкил 7.

Jухарыда ε_1, η_1 әдәдләри вә $\{f(x)\}$ аиләси үчүн апарылан мүһакимәни ε_2, η_2 әдәдләри вә $\{f_1(x)\}$ аиләси үчүн тәкрар етсәк, $ABCE$ дүзбучаглысында jерләшән jени гапалы S_2 областыны аларыг. Аjдындыр ки, $S_2\subset S_1$ вә гапалы S_2 областында $\{f_1(x)\}$ аиләсинин сонсуз саjда функсиjаларынын графики jерләшир. Белә функсиjалар чохлуғуну $\{f_2(x)\}$ илә ишарә едәк. Просеси бу гаjда илә давам етдирсәк, гапалы S_1, S_2, $S_3, \ldots$ $(S_1\supset S_2\supset S_3\supset\ldots)$ областларыны вә $\{f_1(x)\}$, $\{f_2(x)\}$, $\{f_3(x)\}, \ldots$ $(\{f_1(x)\}\supset\{f_2(x)\}\supset\ldots)$ аиләләрини аларыг.

Бу аиләләрдән мүхтәлиф функсиjалар көтүрүб

$$f_1^*(x),\ f_2^*(x),\ f_3^*(x),\ \ldots \tag{3}$$

ардычыллығыны дүзәлдәк вә көстәрәк ки, бу ардычыллыг мүнтәзәм jығылыр. Доғрудан да, истәнилән $p\geqslant 0$ там әдәди үчүн $f_{k+p}^*(x)$ вә $f_k^*(x)$ функсиjаларынын графикләри гапалы S_k областында jерләшдиjиндән,

$$|f_{k+p}^*(x)-f_k^*(x)|\leqslant 2\varepsilon_k=\frac{M}{2^{k+m-1}}$$

олур. Бу исә (3) ардычыллығынын мүнтәзәм jығылмасы үчүн Коши ме'jарынын өдәндиjини көстәрир. (3) ардычыллығынын һәр бир һәдди кәсилмәз вә ардычыллыг мүнтәзәм jығылдығындан, анализдән мә'лум теоремә әсасән лимит функсиjа кәсилмәз олур.

§ 3. ҺӘЛЛИН ВАРЛЫҒЫ ҺАГГЫНДА ПЕАНО ТЕОРЕМИ

Тутаг ки,

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

тәнлиjинин

$$y(x_0)=y_0 \tag{4}$$

башланғыч шәртини өдәjән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $f(x,y)$ функсиjасы D областында кәсилмәздир вә $(x_0, y_0)\in D$. Диференсиал тәнлиjин муәjjән шәртләри өдәjән һәллинин варлығы вә jеканәлиjи мәсәләләрини арашдыраркән ән'әнәви үсуллардан бири еквивалент интеграл тәнлиjә кечмәкдир. Көстәрәк ки, (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән һәллинин варлығы мәсәләси

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds \tag{5}$$

интеграл тәнлиjинин кәсилмәз һәллинин варлығы мәсәләсинә еквивалентдир*.

* Ахтарылан функсиjа һәм дә интеграллама дәjишәниндән асылы олуб, интеграл ишарәси алтында олан тәнлиjә *интеграл тәнлик* дејилир.

Тутаг ки, $y=\varphi(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән вә (α, β) $(\alpha < x_0 < \beta)$ интервалында тә'jин олунмуш һәллидир. Jә'ни (α, β) интервалында

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

еjнилиjи өдәнир. $\varphi(x_0) = y_0$ олдуғуну нәзәрә алыб бу еjнилиjи x_0-дан x-ә гәдәр интеграллмагла алырыг:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds, \ x \in (\alpha, \beta).$$

Демәли, (1) тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән һәр бир һәлли һәм дә (5) интеграл тәнлиjинин һәллидир. Әкс инә, тутаг ки, $y = \psi(x)$ функсиjасы (α, β) интервалында (5) интеграл тәнлиjинин һәр һансы кәсилмәз һәллидир. Онда (α, β) интервалында

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds. \qquad (6$$

еjнилиjи өдәнир.

Гејд едәк ки, $\psi(x)$ вә $f(x, y)$ функсиjалары кәсилмәз олдуғундан $f(x, \psi(x))$ функсиjасы (α, β) интервалында кәсилмәздир. Онда

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))\, ds\right)' = f(x, \psi(x))$$

олдуғундан, (6) еjнилиjиндән $\psi(x)$ функсиjасынын диференсиаллашан олмасы вә $\psi'(x) \equiv f(x, \psi(x))$ еjнилиjи алыныр. Дикәр тәрәфдән, (6) еjнилиjиндә $x = x_0$ көтүрсәк, $\psi(x_0) = y_0$ олар. Демәли (5) интеграл тәнлиjинин һәр бир кәсилмәз һәлли (1) диференсиал тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән һәлли олур. Беләликлә (1) тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән һәллинин варлығы вә jеканәлиjи мәсәләләрини өjрәнмәк әвәзинә (5) интеграл тәнлиjинин кәсилмәз һәллинин варлығы вә jеканәлиjини араштырмаг кифаjәтдир.

Теорем 2 (Пеано). *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиjасы $R = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a;\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир. Онда (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән вә $[x_0, x_0 + \alpha]$ парчасында тә'jин олунан һеч олмаса бир һәлли вар; бурада*

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \ M = \max_{R} |f(x, y)|.$$

Исбаты. Үмумилиjи позмадан $x_0 = 0$ гәбул едәк вә биринчи параграфда олдуғу кими $h_m = \frac{\alpha}{2^m}$ көтүрүб, $[0, \alpha]$ парчасында тә'jин олунан

$$\varphi_m(0) = y_0,$$

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(rh_m) + f(rh_m, \varphi_m(rh_m))(x - rh_m), \qquad (2')$$

$$x \in [rh_m, (r+1)h_m],$$

$$m = 1, 2, \ldots, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, (2^m - 1)$$

функсиjалары ардычыллығыны дүзәлдәк.

Һәр бир m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ әдәди вә $x \in [0, \alpha]$ үчүн елә n $(0 \leqslant n \leqslant 2^m - 1)$ вар ки, $x \in [nh_m, (n+1)h_m]$. Дикәр тәрәфдән $(n+1)h_m \leqslant \alpha$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$|\varphi_m(x) - y_0| \leqslant \sum_{r=0}^{n} |f(rh_m, \varphi_m(rh_m))| h_m \leqslant M(n+1)h_m \leqslant M\alpha \leqslant b.$$

Демәли, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығы $[0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуддур.

Көстәрәк ки, $[0, \alpha]$ парчасындан көтүрүлмүш ихтиjари x' вә x'' үчүн

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| \leqslant M|x'' - x'|, \quad m = 1, 2, \ldots \qquad (7$$

бәрабәрсизлиjи доғрудур. Бунун үчүн ашағыдакы һаллара бахаг:

1) x' вә x'' еjни бир $[rh_m, (r+1)h_m]$ парчасында jерләшир. Онда (2′) дүстурундан

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| = |f(rh_m, \varphi_m(rh_m))| |x'' - x'| \leqslant M|x'' - x'|;$$

2) x' вә x'' гоншу парчаларда jерләшир:

$$(r-1)h_m \leqslant x' \leqslant rh_m \leqslant x'' \leqslant (r+1)h_m.$$

Онда

$$\varphi_m(x'') - \varphi_m(x') = [\varphi_m(x'') - \varphi_m(rh_m)] + [\varphi_m(rh_m) - \varphi_m(x')]$$

шәклиндә jазыб, һәр бир топлананы jухарыдакы гаjда илә гиjмәтләндирәк:

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| \leqslant |\varphi_m(x'') - \varphi_m(rh_m)| + $$
$$+ |\varphi_m(rh_m) - \varphi_m(x')| \leqslant M(x'' - rh_m) + M(rh_m - x') =$$
$$= M(x'' - x');$$

3) x', x'' үчүн елә r вә n там әдәдләри вар ки,

$$x' \leqslant nh_m < (n+1)h_m < \ldots < (n+r)h_m \leqslant x''.$$

Онда

$$\varphi_m(x'') - \varphi_m(x') = [\varphi_m(x'') - \varphi_m((n+r)h_m)] +$$
$$+ [\varphi_m((n+r)h_m) - \varphi_m((n+r-1)h_m)] + \ldots +$$
$$+ [\varphi_m(nh_m) - \varphi_m(x')]$$

шәклиндә jазыб, jухарыдакы гаjда илә

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| \leqslant M(x'' - x')$$

олдуғуну аларыг.

Демәли, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығы үчүн (7) бәрабәрсизлији өдәнир. Бурадан алыныр ки, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығы ејни дәрәчәдән кәсилмәздир. Арсела теореминә әсасән $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығындан $[0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан $\psi_k(x) = \varphi_{m_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ алтардычыллығы сечмәк олар. Ардычыллығын һәр бир һәдди кәсилмәз олдуғундан $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(x) = \psi(x)$ лимит функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында кәсилмәз олар. Көстәрәк ки, $y = \psi(x)$ функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында (1) тәнлијинин $\psi(0) = y_0$ шәртини өдәјән һәллидир. Бунун үчүн $\psi(x)$ функсијасынын $[0, \alpha]$ парчасында

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds \tag{8}$$

интеграл тәнлијинин өдәдијини көстәрәк. Һәр һансы $x \in (0, \alpha]$ нөгтәси көтүрүб $l_k = \left[\frac{x}{\delta_k}\right]^*$, $(\delta_k = h_{m_k})$ ишарә едәк. Ајдындыр ки, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k l_k = x$, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(\delta_k l_k) = \psi(x)$. (2′) дүстуруна әсасән

$$\psi_k(0) = y_0,$$

$$\psi_k(x) = \psi_k(r\delta_k) + f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k))(x - r\delta_k),\ x \in [r\delta_k, (r+1)\delta_k],$$

$$k = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots, (2^{m_k} - 1).$$

Хүсуси һалда $x = (r+1)\delta_k$ көтүрсәк,

$$\psi_k((r+1)\delta_k) = \psi_k(r\delta_k) + f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k))\delta_k$$

бәрабәрлијини аларыг. Бу бәрабәрликдә r-ә $0, 1, \ldots, l_k - 1$ гијмәтләр вериб, чамләјәк:

$$\psi_k(l_k\delta_k) = y_0 + \sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k))\delta_k. \tag{9}$$

Икинчи топлананы

$$\sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k))\delta_k = J_k^1 + J_k^2$$

шәклиндә јазаг; бурада

$$J_k^1 = \sum_{r=0}^{l_k-1} f(r\delta_k, \psi(r\delta_k))\delta_k + f(l_k\delta_k, \psi(l_k\delta_k))(x - l_k\delta_k),$$

$$J_k^2 = \sum_{r=0}^{l_k-1} [f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k)) - f(r\delta_k, \psi(r\delta_k))]\delta_k - f(l_k\delta_k, \psi(l_k\delta_k))(x - l_k\delta_k).$$

---

* Бурада $[z]$ илә z әдәдинин там һиссәси ишарә едилмишдир.

Ајдындыр ки, J_k^1 чәми $f(s, \psi(s))$ функсијасынын $[0, x]$ парчасында интеграл чәмидир. Она көрә

$$\lim_{k\to\infty} J_k^1 = \int_0^x f(s, \psi(s))ds.$$

$\{\psi_k(x)\}$ ардычыллығы $[0, \alpha]$ парчасында $\psi(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылдығындан, истәнилән $\delta > 0$ әдәди үчүн елә K_δ нөмрәси вар ки, $k > K_\delta$ олдугда

$$|\psi_k(x) - \psi(x)| < \delta, \quad x \in [0, \alpha]$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Дикәр тәрәфдән, $f(x, y)$ функсијасы гапалы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғундан, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә δ әдәдини кафи гәдәр кичик көтүрмәк һесабына $k > K_\delta$ вә $r = 0, 1, \ldots, (2^{m_k-1})$ үчүн

$$|f(r\delta_k, \psi_k(r\delta_k)) - f(r\delta_k, \psi(r\delta_k))| < \varepsilon.$$

Бунлары J_k^2-нин ифадәсиндә нәзәрә алсаг:

$$|J_k^2| \leqslant \varepsilon\delta_k l_k + M|x - l_k\delta_k|$$

олар. $\lim\limits_{k\to\infty} |x - l_k\delta_k| = 0$ олдуғундан бурадан аларыг ки,

$$\lim_{k\to\infty} |J_k^2| < \varepsilon(x + 1).$$

Бурада ε кафи гәдәр кичик көтүрүлә билдијиндән $\lim\limits_{k\to\infty} J_k^2 = 0$. Беләликлә, (9) бәрабәрлијинин һәр тәрәфиндә k сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк

$$\psi(x) = y_0 + \int_0^x f(s, \psi(s))ds$$

олар x нөгтәси $(0, \alpha]$ јарыминтервалында ихтијари көтүрүлдүјүндән $y = \psi(x)$ функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында (8) интеграл тәнлијинин кәсилмәз һәлли олур.

Гејд едәк ки, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығындан, $\psi(x)$-дән фәргли функсијаја јығылан алтардычыллыг сечмәк оларса, һәмин функсија да (1) тәнлијинин $y(0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли олур. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Теоремин шәртләри дахилиндә (1) тәнлијинин $y(0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли $[0, \alpha]$ парчасында јеканә олдуғда, (2′) дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығынын өзү бу парчада һәмин һәллә мүнтәзәм јығылыр.*

Исбаты. Тутаг ки, $y = \psi(x)$ функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында (1) тәнлијинин $y(0) = y_0$ шәртини өдәјән јеканә һәллидир. Көстәрәк ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә N нөмрәси вар ки, $m > N$ олдуғда

$$|\varphi_m(x)-\psi(x)|<\varepsilon, \quad x\in[0,\alpha]$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир. Доғрудан да, әкс һалда елә $\varepsilon_0>0$ әдәди, $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ алтардычыллығы вә $x_0\in(0,\alpha]$ нөгтәси тапылар олар ки, һәр бир $k=1,2,\ldots$ үчүн

$$|\varphi_{m_k}(x_0)-\psi(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{10}$$

$\{\varphi_{m_k}(x)\}$ ардычыллығы мүнтәзәм мәһдуд вә еjни дәрәчәдән кәсилмәз олдуғундан, Арсела теореминә әсасән бу ардычыллыгдан $[0,\alpha]$ парчасында (1) тәнлиjинин $y(0)=y_0$ шәртини өдәjән һәллинә jығылан алтардычыллыг сечмәк олар. Үмумилиjи позмадан белә ардычыллыг олараг $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ и котүрә биләрик. Бу гаjда илә гурулан һәлли $y=\varphi(x)$ илә ишарә едәк. Онда (10) бәрабәрсизлиjиндә лимитә кечсәк:

$$|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

Бу исә һәллин jеканәлиjинә зиддир.

Г е j д 1. Тәнлиjин бир нөгтәдән кечән интеграл әjриләринин һамысыны, үмумиjjәтлә, Еjлер сыныг хәтләринин көмәjилә гурмаг олмаз.

Мисал. 1. $y'=y^{\frac{1}{3}}$ тәнлиjинин $y(0)=0$ шәртини өдәjән вә $[0,1]$ парчасында тә'jин олунан сонсуз саjда һәлли вар. Доғрудан да, $0\leqslant\alpha\leqslant1$ шәртини өдәjән истәнилән α үчүн

$$\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ \left[\dfrac{2(x-\alpha)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}, & \alpha<x\leqslant1\end{cases}$$

функсиjасы тәнлиjин $y(0)=0$ шәртини өдәjән һәллидир. Хүсуси һалда $\alpha=1$ көтүрсәк, $\varphi_1(x)\equiv0$ һәллини аларыг. Бахылан тәнлик үчүн $(0,0)$ нөгтәсиндән кечән Еjлер сыныг хәтләри гурсаг, бу сыныг хәтләрин һамысы $\varphi_1(x)=0$ хәтти илә үст-үстә дүшәр вә демәли, интеграл әjрис и олар.

Бу мисал һәм дә көстәрир ки, бә'зи һалларда тәнлиjин верилмиш нөгтәдән кечән интеграл әjриси jеканә олмадыгда белә Еjлер сыныг хәтләри ардычыллығындан jығылан алтардычыллыг сечмәjә еһтиjач олмур.

Г е j д 2. Теореми исбат едәркән Еjлер сыныг хәтләри ардычыллығындан jығылан алтардычыллыг сечмәк, үмумиjjәтлә зәруридир.

Доғрудан да, көстәрәк ки,

$$y'=y|y|^{-\frac{3}{4}}+x\sin\frac{\pi}{x}$$

тәнлиjинин $y(0)=0$ шәртини өдәjән вә $x\geqslant0$ jарымохунда тә'jин олунмуш һәлли үчүн (2′) дүстурлары илә Еjлер сыныг хәтләри ардычыллығы гурсаг, бу ардычыллыг $x_0=0$ нөгтәсиндән башга бүтүн нөгтәләрдә дағылыр.

Аjдындыр ки, $x=0$ нөгтәсиндә $x\sin\frac{\pi}{x}=0$ гәбул етсәк

$$f(x,y)=y|y|^{-\frac{3}{4}}+x\sin\frac{\pi}{x}$$

функсиjасы $G=\{x\geqslant0;\ -\infty<y<+\infty\}$ jарыммүстәвисиндә кәсилмәз олар. Истәнилән натурал n әдәди үчүн $\delta_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $x_k=k\delta_n$, $k=0,1,\ldots$ көтүрәрәк ашағыдакы кими Еjлер сыныг хәтләрини гураг:

$$\varphi_n(x)=\varphi_n[(k-1)\delta_n]+\left\{\varphi_n[(k-1)\delta_n]\,|\varphi_n[(k-1)\delta_n]|^{-\frac{3}{4}}+\right.$$

$$\left.+(k-1)\delta_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{k-1}\right\}[x-(k-1)\delta_n],\quad (k-1)\delta_n\leqslant x<k\delta_n$$

$$\varphi_n(0)=0,\ n=1,2,3,\ldots,\ k=0,1,\ldots,n.$$

Көстәрәк ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $x=0$ нөгтәсиндән башга бүтүн нөгтәләрдә дағылыр.

Әввәлчә геjд едәк ки, $\varphi_n(x)$ функсиjалары чүт n-ләр үчүн артан, тәк n-ләр (һеч олмаса кичик x-ләр) үчүн азалан-дыр. Доғрудан да n чүт әдәд олдугда

$$\varphi_n(\delta_n)=0,\ \varphi_n(2\delta_n)=\delta_n^2$$

вә кифаjәт гәдәр бөjүк n-ләр үчүн $\varphi_n(3\delta_n)>\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_n^{\frac{3}{2}}$, n тәк әдәд олдугда исә

$$\varphi_n(\delta_n)=0,\ \varphi_n(2\delta_n)=-\delta_n^2$$

вә кифаjәт гәдәр бөjүк n-ләр үчүн $\varphi_n(3\delta_n)<-\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_n^{\frac{3}{2}}$.

Көстәрәк ки, кифаjәт гәдәр бөjүк n-ләр үчүн $\left(3\delta_n,\frac{1}{1600}\right)$ интервалында n чүт олдугда

$$\varphi_n(x)>\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}, \tag{11}$$

n тәк олдугда исә

$$\varphi_n(x)<-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}. \tag{12}$$

n чүт олдугда $x=3\delta_n$, $x=4\delta_n$ нөгтәләриндә $\varphi_n(x)$ функ-

си̇јасы вә онун төрәмәси уjғун олараг $\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}$ функсиjасы вә онун төрәмәсиндән бөјүкдүр. Буну билаваситә јохламаг олар. Демәли, $(3\delta_n, 4\delta_n)$ интервалында (11) бәрабәрсизлиjи өдәнир. Онда $4\delta_n$ нөгтәсиндән сағ тәрәфдә елә $(4\delta_n, \gamma)$ интервалы вар ки, һәмин интервалда да (11) бәрабәрсизлиjи өдәнәр. Аjдындыр ки, бу бәрабәрсизлик $\varphi_n(x) > \left(\frac{x}{6}^{\frac{3}{2}}\right)'$, $x \geqslant 4\delta_n$ шәртини өдәјән бүтүн x нөгтәләри үчүн өдәнәчәкдир. $x \geqslant 4\delta_n$ вә $(k-1)\delta_n < x \leqslant k\delta_n$ олдугда:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_n^{\frac{1}{4}}((k-1)\delta_n) + (k-1)\delta_n \sin\frac{n+\frac{1}{2}}{k-1}\pi > \varphi_n^{\frac{1}{4}}(x-\delta_n) -$$

$$- x > \frac{1}{2}(x-\delta_n)^{\frac{3}{8}} - x > \frac{x^{\frac{3}{8}}}{10}$$

олдуғундан вә $\frac{x^{\frac{3}{8}}}{10} > \left(\frac{x}{6}^{\frac{3}{2}}\right)'$ бәрабәрсизлиjи $\left(0, \frac{1}{1600}\right)$ интервалында өдәнилдиjиндән, (11) мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр.

Уjғун гајда илә (12) бәрабәрсизлиjинин доғрулугуну көстәрмәк олар. Алдығымыз (11) вә (12) бәрабәрсизликләриндән аjдын олур ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $0 < x < \frac{1}{1600}$ шәртини өдәјән x-ләр үчүн дағылыр.

§ 4. ҺӘЛЛИН ДАВАМЫ

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиjасы xOy мүстәвисинин мүәјјән D областында кәсилмәздир. Онда бу областын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлиjинин һеч олмаса бир интеграл әјриси кечир. Доғрудан да, D областы xOy мүстәвиси илә үст-үстә дүшмәдикдә (x_0, y_0) нөгтәсиндән бу областын сәрһәд нөгтәләринә гәдәр олан ән кичик мәсафәнин јарысыны ρ_0 илә ишарә едәк, D областы xOy мүстәвиси илә үст-үстә дүшдүкдә $\rho_0 = 1$ көтүрәк вә $R_0 = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho_0;\ y_0 - \rho_0 \leqslant y \leqslant y_0 + \rho_0\}$ дүзбучаглысында (1) тәнлиjинә бахаг. Тутаг ки, $M_0 = \max\limits_{R_0} |f(x, y)|$, $\alpha_0 = \min\left\{\rho_0, \frac{\rho_0}{M_0}\right\}$. Онда һәллин варлығы һаггында Пеано теореминә әсасән (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән вә $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли (һәлл чох олдугда исә онлардан бирини) $y = \varphi_0(x)$ илә ишарә едәк. Аjдындыр ки, $x_1 = x_0 + \alpha_0$, $y_1 = \varphi_0(x_1)$ ишарә етсәк $(x_1, y_1) \in D$ олур.

Һәлли даһа кениш парчада алмаг үчүн јухарыда ρ_0 әдәдини тә'јин етдиjимиз гајда илә ρ_1 әдәдини (x_1, y_1) нөгтәсинә уjғун сечиб, $R_1 = \{x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \rho_1;\ y_1 - \rho_1 \leqslant y \leqslant y_1 + \rho_1\}$, $M_1 = \max\limits_{R_1} |f(x, y)|$, $\alpha_1 = \min\left\{\rho_1, \frac{\rho_1}{M_1}\right\}$ көтүрәк. Онда Пеано теореминә әсасән (1) тәнлиjинин $y(x_1) = y_1$ шәртини өдәјән вә $[x_1, x_1 + \alpha_1]$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли $y = \varphi_1(x)$ (һәлләрдән бирини) илә ишарә едәк. Әкәр $x_2 = x_1 + \alpha_1$, $y_2 = \varphi_1(x_2)$ ишарә етсәк, аjдындыр ки, $(x_2, y_2) \in D$ олар.

Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$\psi(x) \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ \varphi_1(x), & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

функсиjасы $[x_0, x_2]$ парчасында (1) тәнлиjинин һәллидир. Демәли, $y = \psi(x)$ һәлли $[x_0, x_1]$ парчасында $y = \varphi_0(x)$ һәлли илә үст-үстә дүшүр вә даһа кениш парчада тә'јин олунуб. Белә хассәли $y = \psi(x)$ һәлли $y = \varphi_0(x)$ һәллинин *сағa давамы*, $y = \varphi_0(x)$ һәлли исә *сағa даваметдирилән һәлл* адланыр.

Јухарыда апарылан әмәлиjјаты (x_2, y_2) нөгтәси үчүн тәкрар едиб, һәлли даһа кениш парчаjа давам етдирмәк олар. Просеси бу гајда илә сонсуз давам етдирсәк, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots$ парчалар ардычыллығыны вә уjғун олараг бу парчаларда тә'јин олунан $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ һәлләрини аларыг. Гурмадан аjдындыр ки, $\{x_n\}$ ардычыллығы монотон артандыр. Она көрә сонлу вә ја сонсуз $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$ лимити вар.

Ашағыдакы гајда илә $[x_0, \beta)$ јарыминтервалында тә'јин олунан $y = \varphi^*(x)$ функсиjасы дүзәлдәк. Истәнилән $x^* \in [x_0, \beta)$ нөгтәси үчүн елә n_0 нөмрәси тапмаг олар ки, $x^* \in [x_{n_0}, x_{n_0+1}]$. Бу нөгтә үчүн $\varphi^*(x^*) = \varphi_{n_0}(x^*)$ көтүрәк. Онда $y = \varphi^*(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән вә $[x_0, \beta)$ јарыминтервалында тә'јин олунан һәлли олур. Уjғун мүһакимәләри x_0 нөгтәсиндән сол тәрәфә дә апармаг олар. Демәли, $f(x, y)$ функсиjасы D областында кәсилмәз олдугда бу областын ихтиjари (x_0, y_0) нөгтәси үчүн (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән вә мүәјјән (α, β) интервалында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Һәллин јеканәлиjи мә'лум олмадыгда, (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән вә мүхтәлиф интервалларда тә'јин олунан һәлләри ола биләр.

Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин (α, β) интервалында, $y = \psi(x)$ исә $(\alpha, \beta]$ ($[\alpha, \beta)$) јарыминтервалында вә ја мүәјјән $\gamma > \beta$ ($\delta < \alpha$) үчүн (α, γ) ((δ, β)) интервалында тә'јин олунан һәллидир. Бу заман $x \in (\alpha, \beta)$ үчүн $\varphi(x) = \psi(x)$ оларса, дејирләр ки, $y = \varphi(x)$ һәлли *сағa (сола) даваметдирилир. Нә сағa, нә дә сола даваметдирилмәјән һәллә даваметдирилмәјән һәлл дејилир.* Мүәјјән парчада вә ја ја-

рыминтервалда верилмиш һәллин давамедтирилән вә давамедтирилмәјән һәлл олмасы аналожи гајда илә тә'јин олунур.

Даваметдирилмәјән һәлл ашағыдакы теорем илә характеризә олунур.

Теорем 3. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә $y = \varphi(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин (α, β) интервалында тә'јин олунмуш һәллидир. Бу һәллин сағa (сола) даваметдирилмәјән һәлл олмасы үчүн ашағыдакы шәртләрдән һеч олмаса биринин өдәнмәси зәрури вә кафидир:*

1) $\beta = +\infty$ $(\alpha = -\infty)$;

2) β сонлудур вә $\overline{\lim\limits_{x\to\beta-0}}|\varphi(x)| = +\infty$ (α сонлудур вә $\overline{\lim\limits_{x\to\alpha+0}}|\varphi(x)| = +\infty$);

3) β сонлудур вә $\overline{\lim\limits_{x\to\beta-0}}|\varphi(x)|$ сонлудур (α сонлудур вә $\overline{\lim\limits_{x\to\alpha+0}}|\varphi(x)|$ сонлудур), лакин x кәмијјәти β әдәдинә солдан (α әдәдинә сағдан) јахынлашдыгда $(x, \varphi(x))$ нөгтәси илә D областынын сәрһәд нөгтәләри арасындакы ән кичик мәсафә сыфра јахынлашыр.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, $y = \psi(x)$ һәлли $y = \varphi(x)$ һәллинин (α, β) интервалындан $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалына давамыдыр, јә'ни $y = \varphi(x)$ һәлли сағa даваметдирилән һәллдир. Бу заман $y = \psi(x)$ функсијасы $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалында кәсилмәздир вә $(\beta, \psi(\beta)) \in D$.

Ајдындыр ки, теоремин 1), 2), 3) шәртләриндән һеч олмаса бири өдәндикдә бу һал мүмкүн дејил.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, теоремин 1), 2), 3) шәртләриндән һеч бири өдәнилмир. Бу һалда $y = \varphi(x)$ һәллинин сағa даваметдирилән һәлл олдуғуну көстәрәк.

Ајдындыр ки, 1) шәрти өдәнмәдијиндән β сонлудур, 2) шәрти өдәнмәдијиндән мүәјјән $\alpha < a < \beta$ әдәди үчүн $y = \varphi(x)$ функсијасы $[a, \beta)$ јарыминтервалында мәһдуд олур. Бу шәртләрлә бәрабәр 3) шәрти өдәнмәдијиндән $x \in [a, \beta)$ үчүн $(x, \varphi(x))$ нөгтәләри D областынын мәһдуд гапалы һиссәсиндә јерләшир. Она көрә $f(x, \varphi(x))$ функсијасы $[a, \beta)$ јарыминтервалында мүәјјән $M > 0$ әдәди илә мәһдуд олур: $|f(x, \varphi(x))| \leqslant M$, $x \in [a, \beta)$. Ихтијари $x', x'' \in [a, \beta)$ нөгтәләри үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруна әсасән

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| = |\varphi'(\xi)(x'' - x')| = |f(\xi, \varphi(\xi))||x'' - x'| \leqslant \leqslant M|x'' - x'|.$$

Бурадан ајдындыр ки, лимитин варлығы һаггында Коши мејары өдәнир Одур ки, сонлу $\lim\limits_{x\to\beta-0}\varphi(x) = B$ лимити вар. Бундан башга $(\beta, B) \in D$.

Көстәрәк ки,

$$\psi(x) = \begin{cases}\varphi(x), & x \in (\alpha, \beta) \\ B, & x = \beta\end{cases}$$

функсијасы $y = \varphi(x)$ һәллинин $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалына давамыдыр. Доғрудан да, $y = \psi(x)$ функсијасы $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалында кәсилмәздир вә демәли, $f(x, \psi(x))$ функсијасы да бурада кәсилмәздир. Она көрә $x \in (\alpha, \beta)$ үчүн

$$\psi(x) = \psi(a) + \int_a^x f(\xi, \psi(\xi))d\xi$$

бәрабәрлијиндән $y = \psi(x)$ функсијасынын һәм дә $x = \beta$ нөгтәсиндә $\psi'(\beta - 0)$ сол төрәмәсинин варлығы вә $\psi'(\beta - 0) = f(\beta, \psi(\beta))$ олмасы алыныр. Демәли, $y = \psi(x)$ функсијасы $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалында (1) тәнлијинин һәллидир. Теорем исбат олунду.

Г е ј д 1. Ајдындыр ки, D областы мәһдуд олдугда теоремин 1), 2) шәртләри арадан чыхыр вә һәр бир даваметдирилмәјән һәлл үчүн 3) шәрти өдәнмәлидир. Бундан башга, $f(x, y)$ функсијасы D областында мәһдуд оларса, сонлу $\lim\limits_{x\to\beta-0}\varphi(x) = B$ лимити вар вә (β, B) нөгтәси D областынын сәрһәдиндә јерләшир. Дикәр тәрәфдән, D областы өзүндә $x \geqslant x_0$ $(x \leqslant x_0)$ јарыммүстәвисини сахлајырса 3) шәрти арадан чыхыр вә анчаг 1), 2) шәртләри галыр. Демәли, бу һалда һәллин даваметдирилмәјән һәлл олмасы үчүн һеч олмаса теоремин 1), 2) шәртләриндән бири өдәнмәлидир.

Нәтичә 1. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир. Онда бу областын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлијинин һеч олмаса бир даваметдирилмәјән һәллинин графики кечир.*

Нәтичәнин доғрулуғуну исбат етмәк үчүн јухарыда $[x_0, \beta)$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta)$ јарыминтервалында тә'јин етдијимиз $y = \varphi^*(x)$ функсијасынын сағa даваметдирилмәјән һәлл олдуғуну көстәрәк. Ашағыдакы мүмкүн һаллара бахаг.

1) $\beta = +\infty$; 2) β сонлудур вә $\overline{\lim\limits_{x\to\beta-0}}|\varphi^*(x)| = +\infty$;

3) β сонлудур вә $\overline{\lim\limits_{x\to\beta-0}}|\varphi^*(x)|$ сонлудур, лакин $\underline{\lim\limits_{x\to\beta-0}}\varphi^*(x) < \overline{\lim\limits_{x\to\beta-0}}\varphi^*(x)$; 4) β сонлудур вә $\lim\limits_{x\to\beta-0}\varphi^*(x) = B$ сонлудур.

Ајдындыр ки, 1), 2) һалларында һәлл сағa даваметдирилмәјәндир. 3-чү һалда $[x_0, \beta)$ јарыминтервалында $y = \varphi^*(x)$ һәлли илә үст-үстә дүшән вә $[x_0, \beta]$ парчасында кәсилмәз олан $y = \psi(x)$ функсијасы гурмаг олмаз. Демәли, 3-чү һалда да $y = \varphi^*(x)$ һәлли сағa даваметдирилмәјәндир.

Инди 4-чү һала бахаг. Бу һалда $(\beta, B) \in D$ вә ја (β, B) нөгтәси D областынын сәрһәд нөгтәси олар. Ахырынчы һалда $y = \varphi^*(x)$ һәлли теоремин 3-чү шәртинә әсасән сағa даваметдирилмәјән-

дир. Демәли, $(\beta, B)\in D$ һалыны арашдырмаг лазымдыр. Јухарыда (x_0, y_0) нөгтәси үчүн тә'јин етдијимиз ρ_0, M_0, α_0 әдәдләринә ујғун (β, B) нөгтәси үчүн ρ, M, α әдәдләрини тә'јин едәк. Онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\beta$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ олдуғундан алырыг ки, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. Бурадан мүәјјән $h>0$ әдәди үчүн $\alpha_n > h$, $n=0,1,\ldots$ олдуғу алыныр. Демәли, һәр аддымда һәлли узунлуғу h-дан бөјүк парчада тә'јин едирик. Бу исә о заман мүмкүндүр ки, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ олсун. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, (β, B) нөгтәси D областынын дахилиндә јерләшә билмәз.

Нәтичә 2. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә бу областын һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Онда истәнилән $(x_0, y_0)\in D$ нөгтәсиндән (1) тәнлијинин јеканә даваметдирилмәјән һәллинин графики кечир.*

Нәтичә 3. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы гапалы вә мәһдуд $\bar{D}$ областында кәсилмәздир. Онда $(x_0, y_0)\in D$ нөгтәсиндән кечән вә давамедирилмәјән һәллә ујғун интеграл әјрисинин уч нөгтәләри бу областын сәрһәдиндә јерләшир.*

Геjд 2. Бурада областын гапалы вә мәһдуд олмасы мүһүм шәртдир. Доғрудан да $y' = -y^2$ тәнлијиндә $f(x, y) = -y^2$ функсијасы бүтүн xOy мүстәвисиндә кәсилмәз олмасына бахмајараг, тәнлијин $y(-1)=1$ шәртини өдәјән вә $(-\infty, 0)$ јарымохунда тә'јин олунан $y=-\frac{1}{x}$ һәлли сағa давамедирилмәјәндир.

§ 5. ТОНЕЛЛИ ЈАХЫНЛАШМАЛАРЫ

Бу параграфда Пеано теореминин исбаты Тонелли јахынлашмалары үсулу илә верилир. Бунун үчүн $[x_0, x_0+a]$ парчасында кәсилмәз диференсиалланан, төрәмәси $|\varphi_0'(x)|\leqslant M$, $x\in[x_0, x_0+a]$ шәртини өдәјән вә графики (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан һәр һансы $y=\varphi_0(x)$ функсијасы көтүрәк. (Хүсуси һалда $\varphi_0(x)=y_0$ көтүрмәк олар.) Һәр бир n натурал әдәди үчүн ашағыдакы гајда илә $[x_0, x_0+a]$ парчасында тә'јин олунан $\varphi_n(x)$ функсијасыны дүзәлдәк:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\varphi_0(x), & x_0\leqslant x\leqslant x_0+\frac{a}{n}\\[2mm] \varphi_0\left(x_0+\frac{a}{n}\right)+\int\limits_{x_0}^{x-\frac{a}{n}} f(\xi, \varphi_n(\xi))\,d\xi, & x_0+\frac{a}{n}\leqslant x\leqslant x_0+a.\end{cases} \qquad (13)$$

Бу дүстур ашағыдакы кими баша дүшүлүр. $[x_0, x_0+a]$ парчасы $\left[x_0, x_0+\frac{a}{n}\right]$, $\left[x_0+\frac{a}{n}, x_0+\frac{2a}{n}\right], \ldots$ кими n бәрабәр һиссәјә бөлүнүр вә $x\in\left[x_0, x_0+\frac{a}{n}\right]$ олдугда $\varphi_n(x)=\varphi_0(x)$ көтүрүлүр. $x\in\left[x_0+\frac{a}{n}, x_0+\frac{2a}{n}\right]$ олдугда $x-\frac{a}{n}\in\left[x_0, x_0+\frac{a}{n}\right]$. Белә x-ләр үчүн ξ интеграллама дәјишәни $\left[x_0, x_0+\frac{a}{n}\right]$ парчасында дәјишир. Она көрә дә $x\in\left[x_0+\frac{a}{n}, x_0+\frac{2a}{n}\right]$ олдугда $\varphi_n(x)$ функсијасы

$$\varphi_n(x)=\varphi_0\left(x_0+\frac{a}{n}\right)+\int\limits_{x_0}^{x-\frac{a}{n}} f(\xi, \varphi_0(\xi))\,d\xi \qquad (14)$$

дүстуру илә тә'јин олунур. $x\in\left[x_0+\frac{2a}{n}, x_0+\frac{3a}{n}\right]$ олдугда $x-\frac{a}{n}\in\left[x_0-\frac{a}{n},\ x_0+\frac{2a}{n}\right]$. Белә x-ләр үчүн

$$\varphi_n(x)=\varphi_0\left(x_0+\frac{a}{n}\right)+\int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{a}{n}} f(\xi, \varphi_0(\xi))\,d\xi+\int\limits_{x_0+\frac{a}{n}}^{x-\frac{a}{n}} f(\xi, \varphi_n(\xi))\,d\xi=$$

$$=\varphi_n\left(x_0+\frac{2a}{n}\right)+\int\limits_{x_0+\frac{a}{n}}^{x-\frac{a}{n}} f(\xi, \varphi_n(\xi))\,d\xi$$

олдуғуну нәзәрә алыб, сонунчу интегралын алтында $\varphi_n(x)$ әвәзинә (14) дүстуру илә тә'јин олунан функсијаны јазмаг лазымдыр.

Бу гајданы сонракы парчалара да тәтбиг етсәк, $\varphi_n(x)$ функсијасыны тамамилә $[x_0, x_0+a]$ парчасында тә'јин едә биләрик.

Көстәрәк ки, гурулмуш $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы Арсела теореминин шәртләрини өдәјир. Доғрудан да, $x\in\left[x_0, x_0+\frac{a}{n}\right]$ үчүн Лагранж дүстуруна әсасән

$$|\varphi_n(x)-y_0|=|\varphi_0(x)-\varphi_0(x_0)|=|\varphi_0'(\theta)|\,|x-x_0|\leqslant Ma\leqslant b$$

олар вә $n>2$ олдугда $x\in\left[x_0+\frac{a}{n}, x_0+\frac{2a}{n}\right]$ үчүн (14) дүстуруна әсасән

$$|\varphi_n(x)-y|\leqslant\left|\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)-y_0\right|+\left|\int_{x_0}^{x-\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)-\varphi_0(x_0)\right|+M\left(x-\frac{\alpha}{n}-x_0\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left|\varphi_0'(\theta)\right|\cdot\frac{\alpha}{n}+M\frac{\alpha}{n}\leqslant\frac{2M\alpha}{n}\leqslant b.$$

Бу гајданы сонракы парчалар үчүн дә тәкрар етмәклә көстәрмәк олар ки, истәнилән $x\in[x_0, x_0+\alpha]$ үчүн $|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b$. Демәли, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуддур.

Пеано теореминин Ејлер сыныг хәтләр үсулу илә исбатындакы гајда илә көстәрмәк олар ки, истәнилән $x', x''\in[x_0, x_0+\alpha]$ нөгтәләри үчүн

$$|\varphi_n(x'')-\varphi_n(x')|\leqslant M|x''-x'|$$

шәрти өдәнир. Бу исә көстәрир ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәздир.

Арсела теореминә әсасән $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығындан $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ алтардычыллығы сечмәк олар.

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=\varphi(x)$$

гәбул едәрәк көстәрәк ки, $\varphi(x)$ функсијасы (5) интеграл тәнлијинин һәллидир. Һәр бир $x\in(x_0, x_0+\alpha]$ нөгтәси үчүн k нөмрәсини кифајәт гәдәр бөјүк көтүрмәклә

$$\varphi_{n_k}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi))\,d\xi+\int_{x}^{x-\frac{\alpha}{n_k}} f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi))\,d\xi+$$

$$+\left(\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n_k}\right)-y_0\right)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан

$$\left|\int_{x}^{x-\frac{\alpha}{n_k}} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi\right|\leqslant M\frac{\alpha}{n_k}$$

олдуғуну нәзәрә алараг k сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi$$

бәрабәрлијини аларыг. Јә'ни $\varphi(x)$ функсијасы (5) интеграл тәнлијинин һәллидир.

Мисал 2. $y'=2x-y$ тәнлијинин $y(0)=-1$ шәртини өдәјән вә $[0,1]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллини Тонелли јахынлашмалары васитәсилә тәгриби гураг. Бунун үчүн $\varphi_0(x)=-1+x$ функсијасыны көтүрәк вә $n=10$ гәбул едәк. Онда

$$\varphi_{10}(x)=\begin{cases}-1+x, & 0\leqslant x\leqslant 0{,}1\\ -0{,}9+\int\limits_0^{x-0{,}1}[2s-\varphi_{10}(s)]\,ds, & 0{,}1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

олдуғундан, $0{,}1\leqslant x\leqslant 0{,}2$ олдугда

$$\varphi_{10}(x)=-0{,}9+\int_0^{x-0{,}1}(s+1)\,ds=-1+x+0{,}5(x-0{,}1)^2,$$

$$\varphi_{10}(0{,}2)=-0{,}795$$

олур, $0{,}2\leqslant x\leqslant 0{,}3$ олдугда исә

$$\varphi_{10}(x)=-0{,}795+\int_{0{,}1}^{x-0{,}1}[s+1-0{,}5(s-0{,}1)^2]\,ds=-1+x+$$

$$+0{,}5(x-0{,}1)^2-\frac{1}{6}(x-0{,}2)^3;\quad \varphi_{10}(0{,}3)=-0{,}6791.$$

Бу гајда илә $\varphi_{10}(x)$ функсијасыны бүтүн $[0,1]$ парчасында тапмаг олар.

§ 6. ЈЕКАНӘЛИК ТЕОРЕМЛӘРИ

Јухарыда көстәрдик ки, $f(x,y)$ функсијасы D областында кәсилмәз олдугда, истәнилән $(x_0, y_0)\in D$ нөгтәси үчүн

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

тәнлијинин

$$y(x_0)=y_0 \qquad (4)$$

шәртини өдәјән вә мүәјјән (α,β) интервалында тә'јин олунмуш даваметдирилмәјән һәлли вар.

М. А. Лаврентјев (1) шәклиндә елә диференсиал тәнлик гурмушдур ки, һәмин тәнликдә $f(x,y)$ функсијасы мүәјјән дүзбучаглыда кәсилмәз олмасына бахмајараг, бу дүзбучаглынын һәр бир нөгтәсиндән тәнлијин ән азы ики интеграл әјриси кечир.

Беләликлә, мүәјјән нөгтәдән кечән интеграл әјрисинин јеканәлијини тә'мин етмәк үчүн $f(x,y)$ функсијасы үзәринә кәсилмәзликдән әлавә шәрт гојмаг лазымдыр.

Һәллин јеканәлијини тә'мин едән ашағыдакы теоремләри исбат едәк.

Теорем 4. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин әтрафында тә'јин олунуб вә бу әтрафда һәр бир x*

үчүн y-ә нәзәрән артмајандыр. Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

Исбаты. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, кичик $h>0$ әдәди үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә (x_0-h, x_0+h) интервалында тә'јин олунмуш ики мухтәлиф $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ һәлләри вар. Онда һеч олмаса бир $\xi\in(x_0-h, x_0+h)$ нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә $y_1(\xi)\neq y_2(\xi)$. Мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, $\xi\in(x_0, x_0+h)$ вә $y_1(\xi)<y_2(\xi)$. Онда $y_1(x)$, $y_2(x)$ функсијалары (x_0, x_0+h) интервалында кәсилмәз олдуғундан, бу интервала дахил олан елә ән бөјүк (α,β) интервалы вар ки, бурада $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)$, $y_1(x)<y_2(x)$, $y_1(\beta)<y_2(\beta)$ мүнасибәтләри өдәнир. (Хүсуси һалда $\alpha=x_0$ ола биләр.)

Теоремин шәртинә әсасән $x\in(\alpha,\beta)$ үчүн $f(x, y_1(x))\geqslant f(x, y_2(x))$ олар вә бурадан $y_1'(x)\geqslant y_2'(x)$ бәрабәрсизлији алынар. Бу бәрабәрсизлији α-дан x-ә ($\alpha<x<\beta$) гәдәр интеграллајараг $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $y_1(x)\geqslant y_2(x)$. Бу исә $y_1(\xi)<y_2(\xi)$ шәртинә зидд олдуғундан, теоремин доғрулуғуну алырыг.

Теорем 5 *(Осгуд) Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы D областында тә'јин олуну6 вә бу областын ихтијари ики (x, y_1) (x, y_2) нөгтәләри үчүн*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant\varphi(|y_2-y_1|) \qquad (15)$$

шәртини өдәјир. Бурада $\varphi(u)$ функсијасы $(0,u_0]$ $(u_0>0)$ јарыминтервалында мүсбәт, кәсилмәз функсијадыр вә

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{u_0}\frac{du}{\varphi(u)}=+\infty. \qquad (16)$$

Онда һәр бир $(x_0, y_0)\in D$ үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

Гејд 1. Теоремин шәртләрини өдәјән $\varphi(u)$ функсијасына мисал олараг

$$Ku,\ Ku\,|\ln u|,\ Ku\,|\ln u\|\ln|\ln u\|,\ K=\text{const}>0$$

функсијаларыны көстәрмәк олар.

Хүсуси һалда, $\varphi(u)=Ku$ көтүрдүкдә (15) бәрабәрсизлији

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1| \qquad (17)$$

шәклинә дүшүр вә бу һалда дејирләр ки, $f(x,y)$ функсијасы y-ә нәзәрән *Липшис шәртини* өдәјир, K исә *Липшис әмсалы* адланыр.

Гејд 2. D областы y-ә нәзәрән габарыг исә вә $f(x,y)$ функсијасынын бу областда мәһдуд $f_y(x,y)$ төрәмәси варса, $f(x,y)$ функсијасы y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир. Доғрудан да, тутаг ки, D областында

$$|f_y(x,y)|\leqslant K \quad (K\geqslant 0)$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Онда Лагранж дүстуруна әсасән

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|f_y(x, y_1+\theta(y_2-y_1))|\times$$
$$\times|y_2-y_1|\leqslant K|y_2-y_1|;\ 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Теоремин исбаты. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә мүәјјән (a,b) интервалында тә'јин олунмуш ики мухтәлиф $y_1(x)$, $y_2(x)$ һәлләри вар. Онда

$$z(x)=y_2(x)-y_1(x)$$

кәсилмәз функсијадыр вә елә $x_1\in(a,b)$ нөгтәси вар ки,

$$z(x_1)=y_2(x_1)-y_1(x_1)=z_1\neq 0.$$

Үмумилији позмадан $x_0=0$ гәбул едәк. Әкс һалда x-и $x+x_0$ илә әвәз етмәклә буна наил оларыг.

Гејд едәк ки, һәм дә $x_1>0$ вә $z_1>0$ гәбул етмәк олар. Әкс һалда, x-и $-x$ илә әвәз етмәк вә $z(x)=y_1(x)-y_2(x)$ көтүрмәк кифајәтдир. Демәли, фәрз етмәк олар ки,

$$z(0)=0,\quad z(x_1)=z_1>0.$$

Теоремин (15) шәртинә әсасән, (a,b) интервалында

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_1}{dx}=f(x,y_2(x))-f(x,y_1(x))\leqslant$$

$$\leqslant\varphi(|y_2(x)-y_1(x)|)<2\varphi(|y_2(x)-y_1(x)|)=2\varphi(|z(x)|) \qquad (18)$$

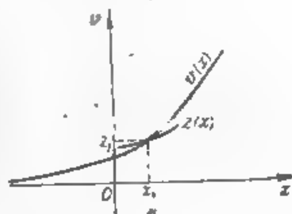
бәрабәрсизлијини алырыг. $D_1=\{-\infty<x<+\infty;\ v>0\}$ областында

$$\frac{dv}{dx}=2\varphi(v) \qquad (19)$$

тәнлијинә бахаг. Көстәрәк ки, бу тәнлијин $v(x_1)=z_1$ шәртини өдәјән јеканә мүсбәт һәлли вар вә онун графики асимптотик олараг абсис охунун мәнфи истигамәтинә јахынлашыр. Доғрудан да, һәмин һәлли $v(x)$ илә ишарә етсәк, бу һәлл

$$\int_{z_1}^{v}\frac{du}{\varphi(u)}=2(x-x_1)\ (x_1>0,\ z_1>0)$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Интегралалты функсија мүсбәт олдуғундан алырыг ки, $x>x_1$ олдугда $v>z_1$, $x<x_1$ олдугда исә $0<v<z_1$ олур. x мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда, (16) шәртинә әсасән $v(x)$ монотон азалараг абсис охунун мәнфи истигамәтинә јахынлашыр вә ону кәсмир (шәкил 8).



Шәкил 8.

Гурмаја әсасән $z(x)$ вә $v(x)$ функсијаларынын графикләри (x_1, z_1) нөгтәсиндән кечир вә бу нөгтәдә $z'(x_1) < v'(x_1)$ шәрти өдәнир. Доғрудан да,

$$z'(x_1) = y_2'(x_1) - y_1'(x_1) = f(x_1, y_2(x_1)) - f(x_1, y_1(x_1)) <$$
$$< 2\varphi(|y_2(x_1) - y_1(x_1)|) = 2\varphi(z(x_1)) = 2\varphi(v(x_1)) = v'(x_1).$$

Она көрә елә $\varepsilon > 0$ әдәди вар ки, $(x_1 - \varepsilon, x_1)$ интервалында $z(x) > v(x)$ бәрабәрсизлији өдәнир. Көстәрәк ки, бу бәрабәрсизлик $(0, x_1)$ интервалында өдәнир. Әкс һалда елә $x_2 \in (0, x_1)$ нөгтәси тапмаг олар ки, $z(x_2) = v(x_2)$ вә

$$z'(x_2) \geqslant v'(x_2).$$

Дикәр тәрәфдән, теоремин шәртинә әсасән

$$z'(x_2) = y_2'(x_2) - y_1'(x_2) = f(x_2, y_2(x_2)) - f(x_2, y_1(x_2)) <$$
$$< 2\varphi(|y_2(x_2) - y_1(x_2)|) = 2\varphi(z(x_2)) = 2\varphi(v(x_2)) = v'(x_2)$$

олмалыдыр. Алынан бәрабәрсизлик $z'(x_2) \geqslant v'(x_2)$ бәрабәрсизлијинә зиддир. Демәли, $(0, x_1)$ интервалында $z(x) \geqslant v(x) > 0$ бәрабәрсизлији өдәнир. Бурадан хүсуси һалда $z(0) \geqslant v(0) > 0$ алыныр. Бу исә $z(0) = 0$ шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Осгуд теореми јеканәлик үчүн кафи шәртдир. Бу теоремин нә дәрәчәдә зәрурилијә јахын олмасыны ашағыдакы теорем көстәрир.

Теорем 6. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы $R = \{-a \leqslant x \leqslant a;\ -b \leqslant y \leqslant b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир вә бу дүзбучаглыдан көтүрүлмүш истәнилән (x, y_1), (x, y_2) нөгтәләри үчүн*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \geqslant \psi(|y_2 - y_1|) \qquad (20)$$

бәрабәрсизлији өдәнир; бурада $\psi(u)$ функсијасы $[0, u_0]\ (u_0 > 0)$ парчасында монотон артан, кәсилмәз функсија олуб, $\psi(0) = 0$ вә

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\psi(u)} < +\infty \qquad (21)$$

шәртләрини өдәјир. Онда (1) тәнлијинин $y(0) = 0$ шәртини өдәјән ән азы ики һәлли вар (јә'ни бу тәнлијин координат башланғычындан ән азы ики интеграл әјриси кечир).

Исбаты. $f(x, y)$ функсијасы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғундан, (1) тәнлијинин $y(0) = 0$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[-a_1, a_1]\ (a_1 \leqslant a)$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир $y = \varphi_1(x)$ һәлли вар. Үмумилији позмадан $\varphi_1(x) \equiv 0$ көтүрмәк олар. Доғрудан да, тәнликдә $y = z + \varphi_1(x)$ әвәзләмәси апарсаг

$$z' = F(x, z), \quad F(x, z) = f(x, z + \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_1(x)) \qquad (22)$$

тәнлијини аларыг вә $F(x, 0) \equiv 0$ олдуғундан, $z = 0$ бу тәнлијин һәлли олар. Бу гајда илә алынмыш $F(x, z)$ функсијасы $f(x, y)$ функсијасынын өдәдији шәртләри өдәдијиндән (1) тәнлији әвәзинә (22) тәнлијини көтүрүб, теореми онун үчүн исбат етмәк олар. Демәли, $\varphi_1(x) \equiv 0$ вә $f(x, 0) \equiv 0$ гәбул етмәк олар. Она көрә дә (20) бәрабәрсизлијиндә $y_1 = 0$, $y_2 = y$ көтүрсәк, R дүзбучаглысында

$$|f(x, y)| \geqslant \psi(|y|). \qquad (23)$$

Бу бәрабәрсизликдән аларыг ки, ихтијари кичик $h > 0$ әдәди үчүн ашағыдакы һаллардан бири мүмкүндүр.

(α) $f(0, h) > 0$;
(β) $f(0, h) < 0$, $f(0, -h) < 0$;
(γ) $f(0, h) < 0$, $f(0, -h) > 0$.

(α) *һалы*. Теоремин шәртләри дахилиндә

$$z' = \psi(z) \qquad (24)$$

тәнлијинин

$$z(0) = 0$$

шәртини өдәјән $z(x) \equiv 0$ вә

$$\int_0^z \frac{du}{\psi(u)} = x \qquad (25)$$

илә тә'јин олунан $z = \omega(x)$ мүхтәлиф һәлләри вар. Бурада $\omega(0) = 0$ вә $x > 0$ олдугда $\omega(x) > 0$. Ајдындыр ки, кичик $h > 0\ (h < b)$ әдәди үчүн (1) тәнлијинин $y(0) = h$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[-a_2, a_2]\ (0 < a_2 \leqslant a)$ парчасында тә'јин олунан һәлли вар. Бу һәлли $y = \varphi(x, h)$ илә ишарә едәк.

Инди $[0, a_2]$ парчасында

$$\varphi(x, h) > \omega(x) \qquad (26)$$

бәрабәрсизлијинин доғрулуғуну көстәрәк.

Доғрудан да, $\varphi(0, h) - \omega(0) = h > 0$ вә

$$\varphi(x, h) - \omega(x) = h + \int_0^x [f(\xi, \varphi(\xi, h)) - \psi(\omega(\xi))]\, d\xi$$

олдуғундан,

$$(\varphi(x, h) - \omega(x))'|_{x=0} = [f(x, \varphi(x, h)) - \psi(\omega(x))]|_{x=0} =$$
$$= f(0, h) - \psi(0) = f(0, h) > 0.$$

Демәли, $\varphi(x, h) - \omega(x)$ функсијасы $x = 0$ нөгтәсиндә артандыр. Она көрә елә $[0, c]\ (0 < c \leqslant a_2)$ парчасы вар ки, бурада

$$\omega(x, h) - \omega(x) > 0$$

шәрти өдәнир. Көстәрәк ки, бу бәрабәрсизлик һәм дә $[0, a_2]$ парчасында өдәнир.

Доғрудан да, әкс һалда елә $x_1 \in [0, a_2]$ нөгтәси тапылар ки,

$$\begin{aligned} &\varphi(x, h) - \omega(x) > 0, \quad 0 \leqslant x < x_1, \\ &\varphi(x_1, h) - \omega(x_1) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

шәртләри өдәнәр. $\psi(z)$ функсиjасы артан олдуғундан, бурадан алырыг ки, $0 \leqslant x < x_1$ үчүн $\psi[\varphi(x, h)] - \psi[\omega(x)] > 0$.

Дикәр тәрәфдән $f(0, h) > 0$ олдуғундан (23) шәртинә әсасән $(0, 0)$ нөгтәсинин елә V әтрафы вар ки, бу әтрафда

$$f(x, y) \geqslant \psi(|y|).$$

Бунлары нәзәрә алсаг, ардычыл олараг, ашағыдакы бәрабәрсизликләри jаза биләрик:

$$\varphi(x_1, h) - \omega(x_1) = h + \int_0^{x_1} [f(\xi, \varphi(\xi, h)) - \psi(\omega(\xi))] d\xi \geqslant$$

$$\geqslant h + \int_0^{x_1} [\psi(\varphi(\xi, h)) - \psi(\omega(\xi))] d\xi \geqslant h + \int_0^{x_1} 0 \, d\xi = h > 0.$$

Бу исә (27) шәртләринин икинчисинә зиддир. Демәли, $[0, a_2]$ парчасында (26) шәрти өдәнир. Көстәрәк ки, $y = \varphi(x, h)$ функсиjасы h дәjишәнинә нәзәрән азалмаjандыр. Башга сөзлә десәк, көстәрәк ки, $0 < h_1 < h$ шәртини өдәjән h_1 әдәди үчүн $[0, a_2]$ парчасында

$$\varphi(x, h_1) \leqslant \varphi(x, h) \tag{28}$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир. Доғрудан да, $\varphi(0, h_1) < \varphi(0, h)$ олдуғундан, елә ән бөjүк $0 < a_3 \leqslant a_2$ әдәди вар ки, $0 \leqslant x < a_3$ олдугда

$$\varphi(x, h_1) < \varphi(x, h)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнәр. Әкәр $a_3 < a_2$ оларса, $\varphi(a_3, h_1) = \varphi(a_3, h)$ олар вә беләликлә,

$$\varphi'(a_3, h_1) = f(a_3, \varphi(a_3, h_1)) = f(a_3, \varphi(a_3, h)) = \varphi'(a_3, h).$$

Бурадан алырыг ки,

$$\varphi_1(x, h_1) = \begin{cases} \varphi(x, h_1), & x \in [0, a_3] \\ \varphi(x, h), & x \in [a_3, a_2] \end{cases}$$

функсиjасы $\varphi(x, h_1)$ һәллинин давамы олар вә бу давам функсиjа үчүн (26) бәрабәрсизлиjи өдәнәр. Беләликлә, $y = \varphi(x, h)$ функсиjасы h дәjишәнинә нәзәрән азалмаjан олуб, (26) бәрабәрсизлиjини өдәjир.

Аjдындыр ки, сонлу $\varphi(x) = \lim_{h \to 0} \varphi(x, h)$ лимити вар вә (26)

бәрабәрсизлиjинә әсасән $\varphi(x)$ лимит функсиjасы $[0, a_2]$ парчасында $\varphi(x) \geqslant \omega(x)$ бәрабәрсизлиjини өдәjир. Дикәр тәрәфдән

$$\varphi(x) \quad \lim_{h \to 0} \varphi(x, h) = \lim_{h \to 0} \left\{ h + \int_0^x f(\xi, \varphi(\xi, h)) d\xi \right\} = \int_0^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

олдуғундан алырыг ки,

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{вә} \quad \varphi(0) = \lim_{h \to 0} \varphi(0, h) = 0.$$

Бу мүнасибәтләр көстәрир ки, $y = \ (x)$ функсиjасы $[0, a_2$ парчасында (1) тәнлиjинин $y(0) = 0$ шәртини өдәjән һәллидир.

Еjни гаjда илә $y = \varphi(x)$ лимит функсиjасынын $[-a_2, 0]$ парчасында да һәлл олдуғуну көстәрмәк олар. Беләликлә, (α) һалында (1) диференсиал тәнлиjинин $y(0) = 0$ шәртини өдәjән ики мүхтәлиф $\varphi_1(x) = 0$ вә $y = \varphi(x)$ һәлләри вар. (β) һалы $y = -z$ әвәзләмәси васитәсилә (α) һалына кәтирилир. Доғрудан да, бу әвәзләмә нәтичәсиндә (1) тәнлиjи

$$\frac{dz}{dx} = -f(x, -z)$$

шәклинә дүшүр вә $f(x, y)$ функсиjасы (β) шәртини өдәдикдә $-f(x, -z)$ функсиjасы (α) шәртини өдәjир. (γ) һалы $x = -t$ әвәзләмәси васитәсилә (α) һалына кәтирилир.

Теорем 7. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиjасы $R = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a;\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир вә ихтиjари ики $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ нөгтәләри үчүн*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)|(x - x_0) \leqslant |y_2 - y_1| \tag{29}$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир. Онда (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән вә $[x_0, x_0 + \alpha]$ парчасында тә'jин олунан jеканә һәлли вар. Бурада

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_R |f(x, y)|.$$

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә һәллин варлығы Пеано теореминдән алыныр. Бу һәллин jеканәлиjини исбат едәк.

Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән вә $[x_0, x_0 + \alpha]$ парчасында тә'jин олунан $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ кими ики мүхтәлиф һәлли вар. Онда $(x_0, x_0 + \alpha]$ jарыминтервалында тә'jин олунмуш

$$F(x) = \frac{y_2(x) - y_1(x)}{x - x_0} \tag{30}$$

функсиjасы үчүн

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{y_2(x) - y_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} [y_2'(x) - y_1'(x)] =$$

$$=\lim_{x\to x_0+0}[f(x,y_2(x))-f(x,y_1(x))]=f(x_0,y_2(x_0))-f(x_0,y_1(x_0))=$$

$$=f(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)=0.$$

Демәли, $F(x_0)=0$ гәбул етсәк, $F(x)$ функсијасы $[x_0,x_0+a]$ парчасында кәсилмәз олар. Фәрзијјәмизә әсасән $[x_0,x_0+a]$ парчасында $F(x)$ функсијасы сабит дејил (әкс һалда $F(x_0)=0$ шәртиндән алардыг ки, $F(x)\equiv 0$). Одур ки, $|F(x)|$ функсијасы $[x_0,x_0+a]$ парчасында өзүнүн ән бөјүк гијмәтини алыр.

Тутаг ки, x' нөгтәси $[x_0,x_0+a]$ парчасында x_0-дан сағда јерләшән биринчи нөгтәдир ки, һәмин нөгтәдә $|F(x)|$ өзүнүн ән бөјүк гијмәтини алыр. Башга сөзлә десәк,

$$m=\max_{x_0\le x\le x_0+a}|F(x)|=|F(x')|=\frac{|y_2(x')-y_1(x')|}{x'-x_0}.$$

Дикәр тәрәфдән, $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функсијалары (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәлләри олдуғу үчүн (29) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$m=\frac{|y_2(x')-y_1(x')|}{x'-x_0}=\frac{1}{x'-x_0}\left|\int_{x_0}^{x'}[f(\xi,y_2(\xi))-f(\xi,y_1(\xi))]d\xi\right|<$$

$$<\frac{1}{x'-x_0}\int_{x_0}^{x'}\frac{|y_2(\xi)-y_1(\xi)|}{\xi-x_0}d\xi=\frac{1}{x'-x_0}\int_{x_0}^{x'}|F(\xi)|d\xi.$$

Ахырынчы интеграла орта гијмәт теоремини тәтбиг етсәк

$$m\le|F(x'')|,\ x''\in(x_0,x').$$

Дикәр тәрәфдән, $x''<x'$ олдуғундан, $|F(x'')|<m$ олмалыдыр. Алынан зиддијјәт һәллин јеканәлијини көстәрир.

Јеканәлијә аид даһа бир теорем исбат едәк. Бунун үчүн әввәлчә кәләчәкдә дә лазым олачаг бир лемманын исбатыны верәк.

Лемма (Гронуолл). *Тутаг ки, $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз олан $\omega(x)>0$, $u(x)$, $h(x)$ функсијалары үчүн*

$$u(x)\le h(x)+\int_a^x\omega(t)u(t)dt,\quad a\le x\le b \qquad (31)$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Онда

$$u(x)\le h(x)+\int_a^x\omega(s)h(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)dt\right)ds,\quad a\le x\le b \qquad (32)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Исбаты.

$$R(x)=\int_a^x\omega(s)u(s)ds$$

ишарә едәк. Онда $[a,b]$ парчасындан сонлу сајда нөгтәләр чыхмагла, $R'(x)=\omega(x)u(x)$ олар. Буну нәзәрә алараг (31) бәрабәрсизлијинин һәр тәрәфини $\omega(x)$-ә вурсаг

$$R'(x)-\omega(x)R(x)\le\omega(x)h(x).$$

Бу бәрабәрсизлијин һәр тәрәфини $\exp\left(-\int_a^x\omega(t)dt\right)$-јә вуруб ону

$$\left(R(x)\exp\left(-\int_a^x\omega(t)dt\right)\right)'\le\omega(x)h(x)\exp\left(-\int_a^x\omega(t)dt\right)$$

шәклиндә јазаг. Алынан бәрабәрсизлији $R(a)=0$ олдуғуну нәзәрә алараг, $[a,x]$ $(a\le x\le b)$ парчасында интеграллајаг:

$$R(x)\exp\left(-\int_a^x\omega(t)dt\right)\le\int_a^x\omega(s)h(s)\exp\left(-\int_a^s\omega(t)dt\right)ds.$$

Бурадан алырыг ки,

$$R(x)\le\exp\left(\int_a^x\omega(t)dt\right)\int_a^x\omega(s)h(s)\exp\left(-\int_a^s\omega(t)dt\right)ds=$$

$$=\int_a^x\omega(s)h(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)dt\right)ds.$$

Буну (31) бәрабәрсизлијиндә јазсаг (32) бәрабәрсизлијини алырыг.

Гејд 1. Тутаг ки, $h(x)$ функсијасы азалмајандыр. Онда $a\le s\le x$ үчүн $h(s)\le h(x)$ олдуғундан

$$\int_a^x\omega(s)h(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)dt\right)ds\le h(x)\int_a^x\omega(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)dt\right)ds=$$

$$=-h(x)\int_a^x\frac{d}{ds}\left[\exp\left(\int_s^x\omega(t)dt\right)\right]ds=-h(x)+h(x)\exp\left(\int_a^x\omega(t)dt\right)$$

олур. Буну (32) бәрабәрсизлијиндә нәзәрә алсаг

$$u(x)\le h(x)\exp\left(\int_a^x\omega(t)dt\right) \qquad (33)$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бурадан да, хүсуси һалда $h(x)=A$, $\omega(x)=B>0$ олдугда аларыг ки,

$$u(x)\le A\exp(B(x-a)).$$

Г е ј д 2. (32) бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, $h(x)=0$ олдугда $u(x)\leqslant 0$ олур. Она көрә әввәлчәдән $u(x)\geqslant 0$ олдуғу мә'лум оларса, $u(x)=0$ алынар.

Теорем 8. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы $R=\{x_0\leqslant x\leqslant x_0+a;\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ дүзбучаглысында*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant\omega(x)|y_2-y_1| \tag{34}$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бурада $\omega(x)\geqslant 0$ функсијасы $[x_0, x_0+a]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәздир. Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

И с б а т ы. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0, x_0+a]$ парчасында тә'јин олунмуш ики мүхтәлиф $y=\varphi(x)$ вә $y=\psi(x)$ һәлләри вар. Онда $[x_0, x_0+a]$ парчасында

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi,$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\psi(\xi))\,d\xi$$

ејниликләри өдәнир. Бурадан, (34) бәрабәрсизлијинә әсасән алырыг ки,

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\,d\xi\leqslant\int_{x_0}^{x}\omega(\xi)|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\,d\xi.$$

Ајдындыр ки, $u(x)=|\varphi(x)-\psi(x)|$ ишарә етсәк ахырынчы бәрабәрсизлији

$$u(x)\leqslant\int_{x_0}^{x}\omega(\xi)u(\xi)\,d\xi$$

шәклиндә јаза биләрик. Бурадан, леммаја әсасән

$$u(x)\equiv 0$$

олдуғуну аларыг. Демәли, $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ олмалыдыр.

§ 7. АРДЫЧЫЛ ЈАХЫНЛАШМА ҮСУЛУ

Бу параграфда ардычыл јахынлашма үсулу илә

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

тәнлијинин

$$y(x_0)=y_0 \tag{4}$$

шәртини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији исбат олунур.

Теорем 9. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы мәркәзи (x_0,y_0) нөгтәсиндә олан $R=\{x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a;\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир вә y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир:*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|. \tag{17}$$

Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар; бурада

$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M=\max_{R}|f(x,y)|.$$

И с б а т ы. $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз вә графики R дүзбучаглысында јерләшән ихтијари $\varphi_0(x)$ функсијасы көтүрүб,

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_0(\xi))\,d\xi \tag{35$_1$}$$

дүстуру илә $\varphi_1(x)$ функсијасыны тә'јин едәк. Бу функсија $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунуб, кәсилмәздир вә $x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ үчүн графики R дүзбучаглысында јерләшир. Доғрудан да, $|f(x,y)|\leqslant M$ вә $\alpha\leqslant\frac{b}{M}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (35$_1$) дүстурундан аларыг ки,

$$|\varphi_1(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant M\alpha\leqslant b.$$

Јухарыдакы гајда илә көстәрмәк олар ки,

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_1(\xi))\,d\xi \tag{35$_2$}$$

дүстуру илә тә'јин олунан $\varphi_2(x)$ функсијасы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәздир вә графики R дүзбучаглысында јерләшир. Просеси бу гајда илә давам етдирмәклә,

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\,d\xi \tag{35$_n$}$$

рекурент дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығыны гурмуш оларыг. Ријази индуксија үсулу илә көстәрмәк олар ки, бу ардычыллығын һәр бир һәдди $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунуб, кәсилмәздир вә графики (x_0,y_0) нөгтәсиндән кечмәклә R дүзбучаглысында јерләшир. Көстәрәк ки, $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр.

$$\varphi_n(x)=\varphi_1(x)+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+\ldots+[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)]$$

олдуғундан, $\{\varphi_n(x)\}$ функсиjалар ардычыллығынын $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында мүнтәзәм јығылдығыны көстәрмәк әвәзинә

$$\varphi_1(x)+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+\ldots+[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)]+\ldots \quad (36)$$

функсионал сырасынын һәмин парчада мүнтәзәм јығылдығыны көстәрмәк кифајәтдир.

Көстәрәк ки, (36) сырасы $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр Бунун үчүн (36) сырасынын мажорант сырасыны гураг. $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ функсиjалары $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында кәсилмәз олдугларындан мәһдуддурлар:

$$|\varphi_0(x)|\leqslant N,\ |\varphi_1(x)|\leqslant N,\ |\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant 2N.$$

Онда (17) шәртинә әсасән (35_1), (35_2) дүстурларындан алырыг ки, $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}K|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2NK|x-x_0|.$$

Ејни гајда илә (17) шәртинә әсасән (35_3), (35_2) дүстурларындан аларыг ки,

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)|\leqslant 2NK^2\frac{(x-x_0)^2}{2!},\ x\in[x_0-a, x_0+a].$$

Риjази индуксиjа үсулу илә көстәрмәк олар ки, $x\in[x_0-a, x_0+a]$ үчүн

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant 2NK^{n-1}\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!},\ n=2,3,\ldots$$

олур. Ајдындыр ки, $\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)$, $n=1,2,\ldots$ фәргләри үчүн алдығымыз бәрабәрсизликләрдә $|x-x_0|\leqslant a$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$N+2NKa+2NK^2\frac{a^2}{2!}+\ldots+2NK^{n-1}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots \quad (37)$$

әдәди сырасы $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында (36) функсионал сырасынын мажоранты олар.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2NK^n\frac{a^n}{n!}}{2NK^{n-1}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{Ka}{n}=0<1$$

олдуғундан, Даламбер әламәтинә көрә (37) сырасы јығылыр. Онда Вејерштрасс әламәтинә көрә алырыг ки, (36) функсионал сырасы еә демәли, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр.

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

яшарә едәк. Онда $\varphi_n(x)$, $n=0,1,\ldots$ функсиjалары $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан вә $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы мүнтәзәм јығылдығындан, $\varphi(x)$ функсиjасы һәмин парчада кәсилмәздир. Бу функсиjанын графики (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечмәклә R дүзбучаглысында јерләшир.

Ајдындыр ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы мүнтәзәм јығылдығындан, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә n_0 нөмрәси тапмаг олар ки, $n>n_0$ вә $x\in[x_0-a, x_0+a]$ үчүн $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ олсун. Дикәр тәрәфдән, (17) шәртинә әсасән $x\in[x_0-a, x_0+a]$ үчүн

$$\left|\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi-\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi\right|<\left|\int_{x_0}^{x}K|\varphi_n(\xi)-\varphi(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\varepsilon|x-x_0|\leqslant Ka\varepsilon.$$

Бурадан алырыг ки,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi=\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi.$$

Бу да интеграл алтында лимитә кечмәјин гануни олдуғуну көстәрир. Она көрә (35_n) дүстурунда n сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимит кечсәк, аларыг:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi. \quad (38)$$

Бу көстәрир ки, $\varphi(x)$ лимит функсиjасы (5) интеграл тәнлијинин һәллидир. Еквивалентлијә әсасән $\varphi(x)$ функсиjасы $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәлли олур.

Һәллин јеканәлијини исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында тә'јин олунмуш $\psi(x)$ һәлли дә вар. Јә'ни (38) ејнилији илә бәрабәр $[x_0-a, x_0+a]$ парчасында

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\psi(\xi))\,d\xi \quad (39)$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликләрдән (17) шәртинә әсасән

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\,d\xi\right|$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Мүәјјәнлик үчүн $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ гәбул едәк. Алынан

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant K \int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| \, d\xi$$

бәрабәрсизлијинә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ олдуғуну аларыг. Ејни гајда илә $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$ үчүн дә $\varphi(x) = \psi(x)$ олдуғуну көстәрмәк олар. Бунунла да теорем исбат олунду.

Гејд 1. Һәллин јеканәлијини ашағыдакы гајда илә дә исбат етмәк олар.

Көстәрәк ки, (35_n) рекурент дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасында һәм дә $\psi(x)$ һәллинә мүнтәзәм јығылыр вә онда јығылан ардычыллығын лимитинин јеканәлијиндән алыначаг ки, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Доғрудан да, (35_1) вә (39) бәрабәрликләриндән, (17) шәртинә әсасән

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_0(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| \, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi_0(\xi) - \psi(\xi)| \, d\xi \right|$$

бәрабәрсизлијини аларыг. $|\varphi_0(x) - \psi(x)| \leqslant L$ гәбул етсәк, бурадан

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \leqslant KL|x - x_0| \leqslant KL\alpha.$$

Ријази индуксија үсулу илә көстәрмәк олар ки, $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ үчүн

$$|\varphi_n(x) - \psi(x)| \leqslant LK^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leqslant LK^n \frac{\alpha^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Бурада $u_n = LK^n \frac{\alpha^n}{n!}$ јығылан әдәди сыранын үмуми һәдди олдуғундан, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Она көрә ахырынчы бәрабәрсизликдән

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n(x) - \psi(x)| \leqslant 0$$

олдуғуну аларыг ки, бурадан да

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \psi(x).$$

Гејд 2. $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасында $y = \varphi(x)$ һәллинин графикинин уч нөгтәләри R дүзбучаглысынын сәрһәдиндә јерләшмирсә, һәллин давамы һаггындакы теоремә әсасән ону R дүзбучаглысынын сәрһәдинә гәдәр давам етдирмәк олар.

Гејд 3. Ајдындыр ки, $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығы $\varphi_0(x)$ функсијасынын сечилмәсиндән асылыдыр, јә'ни $\varphi_0(x)$ функсијасыны бу хассәли башга функсија илә әвәз етсәк, алынан ардычыллыг, үмумијјәтлә, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығындан фәргли олачагдыр. Лакин $\varphi_0(x)$ функсијасынын сечилмәсиндән асылы олмајараг гурулан бүтүн ардычыллыглар ејни бир лимитә јығылыр. Бу факт һәллин јеканәлијиндән алыныр. Бахылан тәнлијин һәлли јеканә олмадыгда исә буну демәк олмаз, чүнки ики мүхтәлиф сыфырынчы јахынлашма көтүрмәклә, ики мүхтәлиф ардычыллыг аларыг вә ола билэр ки, бу ардычыллығын һәр бири мүхтәлиф һәллә јығылсын.

Гејд 4. Теоремин исбатында $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ көтүрүлмәси $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ функсијаларынын графикләринин R дүзбучаглысында јерләшмәсини тә'мин етмәк үчүндүр вә $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығынын јығылмасында онун ролу јохдур. Она көрә дә $f(x, y)$ функсијасы $D = \{a \leqslant x \leqslant b; -\infty < y < +\infty\}$ золағында кәсилмәз вә y-ә нәзәрән ејни бир K сабити илә Липшис шәртини өдәјәрсә, һәр бир $x_0 \in [a, b]$ вә ихтијари y_0 үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәлли $[a, b]$ парчасында тә'јин олунар.

Мисал 1. $p(x), q(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында кәсилмәз исә

$$y' + p(x)y = q(x)$$

хәтти тәнлијинин D золағындан көтүрүлмүш һәр бир (x_0, y_0) нөгтәси үчүн $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән вә $[a, b]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар.

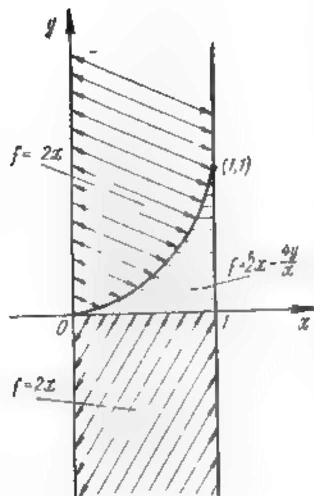
Мисал 2. $r(x), h(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында кәсилмәз исә, $f(x, y) = r(x)\sin y + h(x)$ функсијасы D золағында кәсилмәздир вә y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир. Она көрә дә истәнилән $(x_0, y_0) \in D$ үчүн

$$y' = r(x)\sin y + h(x) \tag{40}$$

тәнлијинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар.

Гејд 5. Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы xOy мүстәвисиндә кәсилмәздир вә һәр бир $a > 0$ әдәди үчүн $D_a = \{-a \leqslant x \leqslant a; -\infty < y < +\infty\}$ золағында y-ә нәзәрән Липшис шәртини јалныз a-дан асылы ола билән әмсалла өдәјир. Онда ихтијари (x_0, y_0) нөгтәси үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәлли бүтүн һәгиги охда тә'јин олунар. Буну көстәрмәк үчүн $y = \varphi(x)$ илә (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунмуш даваметдирилмәјән һәллини ишарә едәк. Көстәрәк ки, $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$.

Доғрудан да, β сонлу олса, $a > \beta$ шәртини өдәјән елә a әдәди тапмаг олар ки, $(x_0, y_0) \in D_a$ олар. Онда 4-чү гејдә әсасән $y = \varphi(x)$ һәлли $[-a, a]$ парчасында тә'јин олунар. Бу исә $y = \varphi(x)$ һәллинин даваметдирилмәјән һәлл олмасына зиддир. Ејни гајда илә α-нын сонлу олдуғу һалы арашдырмаг олар.



Шәкил 9.

Мисал 3. 2-чи мисалда $r(x), h(x)$ функсиіалары һәгиги охда кәсилмәз олдугда, $r(x)\sin y + h(x)$ функсиіасы истәнилән a әдәди үчүн D_a золағында y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәдиіиндән һәр бир (x_0, y_0) нөгтәси үчүн (40) тәнлиіинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәіән һәлли бүтүн һәгиги охда тә'іин олунур.

Мисал 4. $y' = y^2e^x - 2y$ тәнлиіинә бахаг. $f(x, y) = y^2e^x - 2y$ функсиіасы xOy мүстәвисиндә кәсилмәздир, лакин D_a золағында y-ә нәзәрән еіни әмсалла Липшис шәртини өдәмир. Тәнлиіин $y(0) = 1$ шәртини өдәіән $y = e^{-x}$ һәлли бүтүн һәгиги охда тә'іин олунуб, $y(1) = \frac{1}{e - e^2}$ шәртини өдәіән $y = \frac{1}{e^x - e^{2x}}$ һәлли исә $(0, +\infty)$ интервалында тә'іин олунмуш давам етдирилмәіән һәллдир.

Геід 6. Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиіасы R дүзбучаглысында кәсилмәздир вә (1), (4) мәсәләсинин $[x_0 - a, x_0 + a]$ парчасында тә'іин олунмуш һәлли іеканәдир. Онда, Пеано теореминдән алынан нәтичәіә әсасән Еілер сыныг хәтләр ардычыллығы мүнтәзәм олараг һәмин һәллә іығылыр. Лакин бу заман (35_n) дүстурлары илә тә'іин олунан $\{\varphi_n(x)\}$ функсиіалар ардычыллығы һәллә іығылмаіа да биләр. Демәли, теоремдәки Липшис шәртини іеканәлик шәртилә әвәз етмәк олмаз. Буну ашағыдакы мисал илә көстәрмәк олар.

Мисал 5. $y' = f(x, y)$ тәнлиіинә бахаг; бурада

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0, \ -\infty < y < +\infty, \\ 2x, & 0 < x \leqslant 1, \ -\infty < y < 0, \\ 2x - \frac{4y}{x}, & 0 < x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ -2x, & 0 < x \leqslant 1, \ x^2 < y < +\infty \end{cases}$$

шәклиндә тә'іин олунур. Аідындыр ки, $f(x, y)$ функсиіасы $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1; -\infty < y < +\infty\}$ золағында кәсилмәз вә мәһдуддур, лакин y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәмир (шәкил 9). Һәр бир $x \in [0, 1]$ үчүн $f(x, y)$ функсиіасы y-ә нәзәрән артмаіан олдуғундан, Пеано теореминә вә 5-чи теоремә әсасән бу тәнлиіин $y(0) = 0$ шәртини өдәіән вә муәііән $[0, a]$ $(a \leqslant 1)$ парчасында тә'іин олунан іеканә һәлли вар. $\varphi_0(x) = 0$ көтүрүб

$$\varphi_n(x) = \int_0^x f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))\,d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

рекурент дүстурлары илә ардычыл іахынлашмалары гураг:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \left(2\xi - \frac{4}{\xi}\cdot 0\right)d\xi = 2\int_0^x \xi\,d\xi = x^2,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \left(2\xi - \frac{4}{\xi}\cdot\varphi_1(\xi)\right)d\xi = \int_0^x \left(2\xi - \frac{4}{\xi}\cdot\xi^2\right)d\xi =$$

$$= -\int_0^x 2\xi\,d\xi = -x^2,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x 2\xi\,d\xi = x^2,$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^x \left(2\xi - \frac{4\varphi_3(\xi)}{\xi}\right)d\xi = -2\int_0^x \xi\,d\xi = -x^2,$$

. . . .

Риіази индуксиіа үсулу илә көстәрмәк олар ки,

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n+1}x^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Бурадан аідындыр ки, $x \neq 0$ үчүн бу ардычыллыг іығылмыр. Бу ардычыллығын іығылан ики $\{\varphi_{2n-1}(x)\}$, $\{\varphi_{2n}(x)\}$ алтардычыллыглары да һәллә іығылмыр, чүнки,

$$y_1(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{2n-1}(x) = x^2,$$
$$y_2(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{2n}(x) = -x^2$$

вә $y_1 = x^2$, $y_2 = -x^2$ функсиіаларынын һеч бири тәнлиіин һәлли деіил.

Геід 7. Теоремин исбатында $\varphi_0(x) = y_0$ көтүрәк вә дәгиг һәлл илә n-чи іахынлашманын фәргини гиіметләндирәк. Липшис шәртини нәзәрә алсаг, (35_n) вә (38) бәрабәрликләриндән

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant K\left|\int_{x_0}^x |\varphi_{n-1}(s) - \varphi(s)|\,ds\right|.$$

Дикәр тәрәфдән, $x \in [x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$ үчүн $|\varphi(x) - y_0| \leqslant M$ олдуғундан, сонунчу бәрабәрсизликдән риjази индуксиjа илә аларыг ки, $x \in [x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$ олдугда

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant MK' \frac{\alpha^{n+1}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (41)$$

Алынан бәрабәрсизлик көстәрир ки, n-и кифаjәт гәдәр бөjүк көтүрмәклә ардычыл jахынлашмаларла һәллә истәнилән дәгигликлә jахынлашмаг олар.

Мисал 6. $y' = y + x^2$ тәнлиjинин $y(0) = 0$ шәртини өдәjән һәлли үчүн $\varphi_0(x) = 0$ көтүрәрәк $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ ардычыл jахынлашмаларыны гураг:

$$\varphi_1(x) = \int_0^x s^2 ds = 2\frac{x^3}{3!}, \quad \varphi_2(x) = \int_0^x \left(s^2 + 2\cdot\frac{s^3}{3!}\right) ds = 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right),$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \left[s^2 + 2\left(\frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!}\right)\right] ds = 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right).$$

Инди $\varphi_3(x)$ jахынлашмасы илә $\varphi(x)$ дәгиг һәлли арасындакы фәрги $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ парчасында гиjмәтләндирәк. Бунун үчүн $R = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ көтүрәк. Онда $M = 2$, $K = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Бунлары (41) бәрабәрсизлиjиндә нәзәрә алсаг, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ үчүн

$$|\varphi_3(x) - \varphi(x)| \leqslant 2\cdot 1 \cdot \frac{1}{3!\,2^4} = \frac{1}{48} \approx 0{,}0209.$$

Бахылан мәсәләнин һәлли $\varphi(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$ олдуғундан, $|\varphi_3(x) - \varphi(x)|$ фәргини даһа дәгиг олан

$$|\varphi_3(x) - \varphi(x)| \leqslant 2\cdot\frac{x^6}{6!}\left[1 + \frac{x}{7} + \left(\frac{x}{7}\right)^2 + \cdots\right] < \frac{14}{6!\,416} = 0{,}00005$$

шәклиндә гиjмәтләндирмәк олар.

§ 8. СЫХЫЛМЫШ ИН'ИКАС ПРИНСИПИ

Ардычыл jахынлашмалар үсулу анҹаг ади диференсиал тәнликләрин һәлләринин варлығы вә jеканәлиjи мәсәләләринә деjил, һәм дә риjазиjjатын бир чох мәсәләләринә тәтбиг олунур. Она көрә ардычыл jахынлашмаларын jығылмасыны тә'мин едә биләҹәк үмуми шәртләрин тапылмасы мәсәләси меjдана чыхыр. Белә шәртләр мә'лум олдугда верилмиш мәсәләнин һәллинә ардычыл jахынлашмалар үсулунун тәтбиг олунмасы үчүн һәмин шәртләрин өдәндиjини јохламаг кифаjәтдир. Бу ҹүр верилмә гаjдаларындан бири сыхылмыш ин'икас принсипи адланан үсулдур.

а) *Сыхылмыш ин'икас принсипи.* Тутаг ки, истәнилән тәбиәтли бош олмаjан ики Ф, Ψ чохлуглары верилмишдир вә мүәjjән ганун илә һәр бир $\varphi \in \Phi$ елементинә мүәjjән бир $\psi \in \Psi$ елементи гаршы гоjулур. Бу заман деjирләр ки, Ф чохлуғундан Ψ чохлуғуна тә'сир едән $\psi = A(\varphi)$ *оператору* верилмишдир. Әкәр $\Phi = \Psi$ оларса, A оператору Ф чохлугунда тә'сир едәр. Хүсуси һалда Ф, Ψ чохлуглары олараг бүтүн функсиjалары мүәjjән X чохлугунда тә'jин олунан $\Phi = \{\varphi(x)\}$, $\Psi = \{\psi(x)\}$ функсиjалар чохлуғуну көтүрмәк олар.

Теорем 10 *(Сыхылмыш ин'икас принсипи). Тутаг ки, бүтүн функсиjалары мүәjjән X чохлуғунда тә'jин олунан бош олмаjан $\Phi = \{\varphi(x)\}$ функсиjалар чохлугу вә бу чохлугда тә'сир едән A оператору үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнир:*

1. Ф чохлуғунун һәр бир функсиjасы X чохлуғунда мәһдуддур, jә'ни һәр бир $\varphi(x) \in \Phi$ үчүн елә M_φ әдәди вар ки, $|\varphi(x)| \leqslant M_\varphi$, $x \in X$ олур;

2. Ф чохлуғунун һәр бир мүнтәзәм jығылан ардычыллығынын лимити дә бу чохлуға дахилдир;

3. Истәнилән $\varphi(x), \psi(x) \in \Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(x)) - A(\psi(x))| \leqslant m \sup_X |\varphi(x) - \psi(x)| \qquad (42)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир, белә ки, $0 \leqslant m < 1$. Онда

$$\varphi(x) = A(\varphi(x)) \qquad (43)$$

оператор тәнлиjинин Ф чохлуғунда jеканә һәлли вар вә бу һәлли ардычыл jахынлашмаларын мүнтәзәм лимити кими тапмаг олар.

Бә'зән (42) шәрти өдәндикдә A операторуна Ф чохлуғунда *сыхан оператор*, (43) тәнлиjинин һәллинә исә онун *тәрпәнмәз нөгтәси деjилир.*

И с б а т ы. Ф аиләсиндән һәр һансы $\varphi_0(x)$ функсиjасы көтүрүб, $\varphi_1(x) = A(\varphi_0(x))$ дүстуру илә $\varphi_1(x)$ функсиjасыны тә'jин едәк. Онда $\varphi_1(x) \in \Phi$ олар. $\varphi_2(x) = A(\varphi_1(x))$ дүстуру илә $\varphi_2(x)$ функсиjасыны тә'jин едәк. Просеси бу гаjда илә давам етдирсәк

$$\varphi_n(x) = A(\varphi_{n-1}(x)), \quad n = 1; 2, \ldots \qquad (44)$$

рекурент дүстурлары илә тә'jин олунмуш $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығыны аларыг. Бу ардычыллығын X чохлуғунда мүнтәзәм jығылан олдуғуну көстәрмәк үчүн

$$\varphi_0(x) + (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \cdots \qquad (45)$$

сырасына бахаг. Теоремин 1-ҹи шәртинә көрә $x \in X$ үчүн

$|\varphi_0(x)|\leqslant M_{\varphi_0}$, $|\varphi_1(x)|\leqslant M_{\varphi_1}$ вә $|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant M_{\varphi_0}+M_{\varphi_1}=M$. Дикәр тәрәфдән, $\varphi_n(x)=A(\varphi_{n-1}(x))$ вә $\varphi_{n-1}(x)=A(\varphi_{n-2}(x))$ олдуғундан, (42) шәртинә әсасән

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|=|A(\varphi_{n-1}(x))-A(\varphi_{n-2}(x))|\leqslant \leqslant m\sup_X|\varphi_{n-1}(x)-\varphi_{n-2}(x)|$$

олур. Бурадан $n=2$ үчүн

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant Mm$$

аларыг. Рijази индуксиjа үсулу илә исбат етмәк олар ки,

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant Mm^{n-1},\ n=1,\ 2,\dots.$$

Бурадан алыныр ки, jығылан

$$M+Mm+Mm^2+\cdots$$

әдәди сырасы X чохлуғунда (45) функсионал сырасынын мажорантыдыр. Она көрә дә Веjерштрасс әламәтинә әсасән (45) функсионал сырасы вә демәли, һәм дә $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы X чохлуғунда мүнтәзәм jығылыр. Онун лимитини $\varphi^*(x)$ илә ишарә едәк. Теоремин икинчи шәртинә әсасән $\varphi^*(x)\in\Phi$ олур. Олур ки,

$$|A(\varphi^*(x))-A(\varphi_n(x))|\leqslant m\sup_X|\varphi^*(x)-\varphi_n(x)|$$

бәрабәрсизлиjиндә n сонсузлуға jахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\lim_{n\to\infty}A(\varphi_n(x))=A(\varphi^*(x))$$

мүнасибәтини аларыг. Буну нәзәрә алараг (44) бәрабәрлиjиндә n сонсузлуға jахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк

$$\varphi^*(x)=A(\varphi^*(x))$$

олар. Бу исә көстәрир ки, $\varphi^*(x)$ функсиjасы (43) оператор тәнлиjинин һәллидир.

Һәллин jеканәлиjини көстәрәк. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки (43) тәнлиjинин $\varphi^*(x)$ һәллиндән башга $\psi^*(x)$ һәлли дә вар: $\psi^*(x)=A(\psi^*(x))$. Онда (42) шәртинә әсасән

$$|\varphi^*(x)-\psi^*(x)|=|A(\varphi^*(x))-A(\psi^*(x))|\leqslant \leqslant m\sup_X|\varphi^*(x)-\psi^*(x)|.$$

Бурадан

$$\sup_X|\varphi^*(x)-\psi^*(x)|\leqslant m\sup_X|\varphi^*(x)-\psi^*(x)|$$

бәрабәрсизлиjи алынар. Әкәр $\sup_X|\varphi^*(x)-\psi^*(x)|>0$ оларса, бу бәрабәрсизликдән аларыг ки, $m\geqslant1$. Алынан зиддиjjәт көстәрир ки, һәлл jеканәдир.

Нәтиҹә 1. *Теоремин шәртләрини өдәјән A оператору кәсилмәздир, jә'ни Φ аиләсиндән олан вә $\psi(x)\in\Phi$ функсиjасына мүнтәзәм jығылан ихтиjари $\{\psi_n(x)\}$ ардычыллығы үчүн $\lim_{n\to\infty}A(\psi_n(x))=A(\psi(x))$.*

Бу тәклифин доғрулуғу, теоремин 3-чү шәртинә әсасән алынан

$$|A(\psi_n(x))-A(\psi(x))|\leqslant m\sup_X|\psi_n(x)-\psi(x)|$$

бәрабәрсизлиjиндә лимитә кечмәклә алыныр.

Гејд едәк ки, $\varphi_2(x)=A(\varphi_1(x))$ вә $\varphi_1(x)=A(\varphi_0(x))$ бәрабәрликләриндән алыныр ки, $\varphi_2(x)=A(A(\varphi_0(x)))$. Бурада $A^2(\varphi_0(x))=A(A(\varphi_0(x)))$ ишарә едәк. A^2 операторуна A операторунун *икинчи итерасиjасы* деjилир. Ујғун гајда илә, $A^l(\varphi_0(x))=A(A^{l-1}(\varphi_0(x)))$, $l=2,3,\dots$ бәрабәрлиjи илә тә'јин олунан A^l операторуна A операторунун l-чи итерасиjасы деjилир.

Нәтиҹә 2 (*Үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипи*). *Тутаг ки, $\Phi=\{\varphi(x)\}$ чохлуғу вә бу чохлуғда тә'сир едән кәсилмәз A операторунун мүәjјән A^l ($l\geqslant1$) итерасиjасы үчүн 10-чу теоремин шәртләри өдәнир. Онда (43) тәнлиjинин Φ чохлуғунда jеканә һәлли вар.*

Исбаты. Бу һалда (42) шәрти

$$|A^l(\varphi(x))-A^l(\psi(x))|\leqslant m\sup_X|\varphi(x)-\psi(x)|,\quad 0\leqslant m<1 \qquad (46)$$

шәрти илә әвәз олунур. Она көрә дә $B=A^l$ ишарә етсәк, сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән Φ чохлуғунда

$$\varphi(x)=B(\varphi(x)) \qquad (47)$$

тәнлиjинин jеканә $\psi^*(x)$ һәлли вар вә бу һәллин $\psi_1(x)=B(\psi_0(x))$, $\psi_2(x)=B(\psi_1(x))=B^2(\psi_0(x)),\dots,\psi_k(x)=B(\psi_{k-1}(x))=B^k(\psi_0(x)),\dots$

ардычыллығынын мүнтәзәм лимити кими тапмаг олар; бурада $\psi_0(x)$ функсиjасы Φ аиләсиндән көтүрүлмүш ихтиjари функсиjадыр. Демәли,

$$\psi^*(x)=\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=\lim_{k\to\infty}B^k(\psi_0(x)).$$

Бурадан, A оператору кәсилмәз олдуғундан

$$A(\psi^*(x))=A(\lim_{k\to\infty}B^k(\psi_0(x)))=\lim_{k\to\infty}A(B^k(\psi_0(x)))=$$

$$=\lim_{k\to\infty}B^k(A(\psi_0(x)))$$

олур. Дикәр тәрәфдән, (46) шәртинә әсасән

$$|B^k(A(\psi_0(x)))-B^k(\psi_0(x))|\leqslant m\sup_X|B^{k-1}(A(\psi_0(x)))-$$

$$-B^{k-1}(\psi_0(x))| \leqslant \cdots \leqslant m^k \sup_X |A(\psi_0(x)) - \psi_0(x)|.$$

Бу бәрабәрсизликдә k сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк, $A(\psi^*(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} B^k(A(\psi_0(x)))$ вә $\psi^*(x) = \lim\limits_{k\to\infty} B^k(\psi_0(x))$ олдуғундан $|A(\psi^*(x)) - \psi^*(x)| = \lim\limits_{k\to\infty}|B^k A(\psi_0(x)) - B^k(\psi_0(x))| = 0$ олур. Демәли,

$$\psi^*(x) = A(\psi^*(x)).$$

Бу исә көстәрир ки, $\psi^*(x)$ функсијасы (43) тәнлијинин һәллидир

Фәрз едәк ки, $\psi(x)$ функсијасы (43) тәнлијинин $\psi^*(x)$ һәллиндән фәргли һәллидир. Онда $\psi(x)$ функсијасы һәм дә (47) тәнлијинин һәлли олар. Доғрудан да, $\psi(x) = A(\psi(x))$ олдуғундан $A(\psi(x)) = A(A(\psi(x))) = A^2(\psi(x))$ вә демәли, $\psi(x) = A^2(\psi(x)) = \cdots = A^l(\psi(x))$ олар. Бурадан $\psi(x) = A^l(\psi(x))$ аларыг. Бу исә о демәкдир ки, $\psi(x)$ функсијасы (47) тәнлијинин һәллидир. Бу тәнлијин һәллинин јеканәлијинә әсасән $\psi(x) = \psi^*(x)$ олмалыдыр. Беләликлә нәтиҹә исбат олунду.

б) *Сыхылмыш ин'икас принсипинин интеграл тәнлијин һәллинин варлығы мәсәләсинә тәтбиги.* Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында, $K(x, s)$ функсијасы исә $R = \{a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant s \leqslant b\}$ квадратында кәсилмәздир вә $M = \sup_R |K(x, s)|$. Онда λ параметринин $|\lambda| M(b-a) < 1$ шәртини өдәјән гијмәтләри үчүн

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$$

интеграл тәнлијинин $[a, b]$ парчасында јеканә кәсилмәз һәлли вар. Бу мәсәләнин һәллинә сыхылмыш ин'икас принсипини тәтбиг етмәк үчүн X чохлуғу олараг $[a, b]$ парчасыны, Φ чохлуғу олараг $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олан функсијалар синфи $C[a, b]$-ни көтүрәк вә A операторуну

$$A(\varphi(x)) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$$

дүстуру илә тә'јин едәк.

Көстәрәк ки, $C[a, b]$ чохлуғу вә A оператору үчүн сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләри өдәнир. Доғрудан да, ријази анализ курсундан мә'лумдур ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функсија мәһдуддур вә бу парчада мүнтәзәм јығылан кәсилмәз функсијалар ардычыллығынын лимити дә кәсилмәздир. Дикәр тәрәфдән, $C[a, b]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ функсијалары үчүн

$$|A(\varphi(x)) - A(\psi(x))| = \left|\lambda \int_a^b K(x, s)[\varphi(s) - \psi(s)]\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| M \int_a^b |\varphi(s) - \psi(s)|\,ds \leqslant |\lambda| M(b-a) \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(s) - \psi(s)|.$$

Бурада $m = |\lambda| M(b-a) < 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг, ајдындыр ки, сыхылмыш ин'икас принсипинин бүтүн шәртләри өдәнир.

Беләликлә, $\varphi(x) = A(\varphi(x))$ тәнлијинин $C[a, b]$ чохлуғунда јеканә $\varphi^*(x)$ һәлли вар.

в) *Үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипинин Коши мәсәләсинин һәллинә тәтбиги.* Јухарыда исбат олунан Пикар теоремини үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипи илә исбат едәк. Бунун үчүн X чохлуғу олараг $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасыны, Φ чохлуғу олараг $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасында кәсилмәз олмагла $\sup|\varphi(x) - y_0| \leqslant b$ шәртини өдәјән $\{\varphi(x)\}$ функсијалар чохлуғуну көтүрәк вә A операторуну

$$A(\varphi(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\,d\xi$$

дүстуру илә тә'јин едәк.

Истәнилән $\varphi(x) \in \Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(x)) - y_0| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi))|\,d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant M\alpha \leqslant b$$

олдуғундан, бурадан аларыг ки, A оператору Φ чохлуғунда тә'сир едир.

Тутаг ки, $\varphi(x), \psi(x) \in \Phi$. Онда Липшис шәртинә әсасән

$$|A(\varphi(x)) - A(\psi(x))| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|\,d\xi\right| \leqslant K|x - x_0| \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|$$

олур. Бурадан

$$|A^2(\varphi(x)) - A^2(\psi(x))| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(\xi, A(\varphi(\xi))) - f(\xi, A(\psi(\xi)))]\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |A(\varphi(\xi)) - A(\psi(\xi))|\,d\xi\right| \leqslant K^2\left(\left|\int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\,d\xi\right| \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|\right) = K^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!} \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|.$$

Бу гајданы n дәфә тәкрар етмәклә аларыг ки,

$$|A^n(\varphi(x)) - A^n(\psi(x))| \leqslant \frac{K^n |x - x_0|^n}{n!} \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|.$$

Бурада $|x - x_0| \leqslant a$ олдуғундан, кифаjәт гәдәр бөjүк n әдәди үчүн $\frac{K^n a^n}{n!} < 1$ олар. Демәли, A операторунун белә шәрти өдәjән n-ләр үчүн n-чи итерасиjасы Ф чохлуғу илә бирликдә сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләрини өдәjир. Она көрә Ф чохлуғунда $\varphi(x) = A(\varphi(x))$ тәнлиjинин jеканә $\varphi^*(x)$ һәлли вар, jә'ни $[x_0 - a, x_0 + a]$ парчасында

$$\varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi^*(\xi))\, d\xi$$

еjнилиjи өдәнир. Бу исә көстәрир ки, $y = \varphi^*(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән вә $[x_0 - a, x_0 + a]$ парчасында тә'jин олунмуш һәллидир.

§ 9. ҺӘЛЛИН ҺАМАРЛЫҒЫ ҺАГГЫНДА

Тутаг ки, D областында

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

тәнлиjи верилмишдир.

Бу тәнлиjин һәлләринин һамарлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 11. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиjасынын D областында x, y дәjишәнләринә нәзәрән $p\ (p \geqslant 0)$ тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар (p-чи тәртиб дә дахил олмагла). Онда (1) тәнлиjинин истәнилән һәллинин, тә'jин олундуғу интервалда $p + 1$ тәртибдән кәсилмәз төрәмәси вар (p 0 тәртибли төрәмә дедикдә функсиjанын өзү баша дүшүлүр).*

Исбаты. Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин (a, b) интервалында тә'jин олунмуш һәр һансы һәллидир:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),\ x \in (a, b). \qquad (48)$$

Бурадан алыныр ки, $\varphi(x)$ функсиjасы (a, b) интервалында кәсилмәздир. $\varphi(x)$ вә $f(x, y)$ функсиjаларынын кәсилмәзлиjиндән вә (48) еjнилиjиндән $\varphi'(x)$-ин кәсилмәзлиjи алыныр. Тутаг ки, $p = 1$. Онда (48) еjнилиjинин сағ тәрәфинин мүрәккәб функсиjа кими кәсилмәз төрәмәси вар вә демәли, сол тәрәфинин дә x-ә нәзәрән кәсилмәз төрәмәси олмалыдыр. Бурадан алырыг ки, $\varphi(x)$ һәллинин 2-чи тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар вә бу төрәмә

$$\varphi''(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) \qquad (49)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Тутаг ки, $p = 2$. Онда jухарыда апарылан мүһакимәни (49) еjнилиjи үчүн тәкрар едәрәк, $\varphi(x)$ һәллинин үчүнчү тәртиб кәсилмәз төрәмәсинин олдуғуну аларыг. Мүһакимәни бу гаjда илә истәнилән p әдәди үчүн тәкрар етмәк олар.

Гейд 8. Теоремдәки шәрт һәллин кәсилмәз диференсиалланан олмасы үчүн анҹаг кафи шәртдир. Елә тәнликләр гурмаг олар ки, бу тәнликдә $f(x, y)$ функсиjасы нәинки диференсиалланан деjил, һәтта бә'зи нөгтәләрдә тә'jин олунмаjыб, анҹаг тәнлиjин һәр бир һәллинин истәнилән тәртибдән төрәмәси вар. Буну көстәрмәк үчүн ашағыдакы мисаллара бахаг.

1. $y' = \sec x - y \operatorname{tg} x$ тәнлиjи xOy мүстәвисинин $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -1\right)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ нөгтәләрини чыхмагла алынан областда верилир. Доғрудан да, бу гаjда илә алынан областын һәр бир нөгтәсинин әтрафында jа $f(x, y) = \sec x - y \operatorname{tg} x$ функсиjасы, jахуд да $\frac{1}{f(x, y)}$ функсиjасы кәсилмәздир. Көстәрилән нөгтәләрдә исә һәмин функсиjалар $\frac{0}{0}$ шәкилли геjри-муәjjәнлиjә чеврилир вә көстәрмәк олар ки,

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)} f(x, y) = 0, \quad \lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -1\right)} f(x, y) = 0.$$

Бурадан аjдындыр ки, көстәрилән нөгтәләрдә $f(x, y)$ функсиjасынын гиjмәтини сыфыр көтүрмәклә тәнлиjә бүтүн xOy мүстәвисиндә бахмаг олар.

Тәнлиjин үмуми һәлли

$$y = \sin x + c \cos x$$

олур. Бу һәлләр бүтүн һәгиги охда тә'jин олуну б вә истәнилән тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри вар.

2. $y' = 4x\sqrt{y}$ тәнлиjиндә сағ тәрәфдәки, $f(x, y) = 4x\sqrt{y}$ функсиjасы $D\{-\infty < x < +\infty;\ y \geqslant 0\}$ jарыммүстәвисиндә кәсилмәздир, лакин $y = 0$ хәтти боjунча y-ә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәси jохдур. Тәнлиjин һәлләри $y = (x^2 - c)^2$, $(x^2 \geqslant c)$, $y = 0$ шәклиндәдирләр вә аjдындыр ки, бу һәлләрин истәнилән тәртибдән төрәмәләри вар.

Чалышмалар

1. [0,1] парчасыны 10 бәрабәр һиссәjә бөләрәк $y' = x - y$ тәнлиjинин $y(0) = 0$ шәртини өдәjән һәлли үчүн Еjләр сыныг хәттини гурун. Алынан сыныг хәттин $x = 0{,}55$ нөгтәсиндә гиjмәтини һесаблаjын.
2. 1-чи мәсәләдә верилмиш тәнлиjин $y(0) = 0$ шәртини өдәjән һәллини гурун вә $n = 10$ көтүрмәклә гурулмуш Еjләр сыныг хәтти илә һәмин һәллин бөлкү нөгтәләриндәки гиjмәтләрини мүгаjисә един.
3. Сонлу $[a, b]$ парчасында еjни дәрәҹәдән кәсилмәз вә пар-

чаны бир нөгтәсиндә мәһдуд олан функсијалар аиләсинин мүнтәзәм мәһдуд олдуғуну исбат един.

4. $\{e^{-nx^2}\}$ аиләсинин $[-1, 1]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәз олмадығыны исбат един.

5. $\left\{\frac{x^n \cos nx}{n}\right\}$ аиләсинин $[-1, 1]$ парчасында Арсела теореминин шәртләринин өдәдијини көстәрин.

6. Ашағыдакы теореми исбат един:

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы $D = \{x_0 \leqslant x < +\infty; -\infty < y < +\infty\}$ чохлуғунда кәсилмәздир вә $|f(x, y)| \leqslant k(|y|)$, белә ки, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{k(z)} = +\infty$. Онда $y' = f(x, y)$ тәнлијинин истәнилән y_0 үчүн $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли $[x_0, +\infty)$ јарымохунда тә'јин олунмушдур.

Көстәриш. Көстәрмәли ки, $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән һәр һансы $y = y(x)$ һәлли јалныз сонлу $[x_0, \bar{x})$ јарыминтервалында тә'јин олунмушса, $\lim\limits_{x \to \bar{x}-0} |y(x)| = +\infty$ олмалыдыр. Теоремин шәртинә әсасән $dx \geqslant \frac{|dy|}{k(|y|)}$. Бурадан алынан $\bar{x} - x_0 \geqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{k(z)} = +\infty$ бәрабәрсизлији зиддијјәт верир.

7. Ашағыдакы тәнликләрин һәлләринин варлыг вә јеканәлик областларыны тапын.

а) $y' = y - \sqrt{y^2 - x^2}$; в) $y' = |y - x|^a + 1$;

б) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$; г) $y' = 2x + 1 + \sqrt[3]{y - x^2 - x}$.

8. Ашағыдакы мисалларда верилән парчаларда $n = 3$, $\varphi_0(x) = y(0)$ гәбул едәрәк $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ Тонелли јахынлашмаларыны гурун:

а) $y' = 3x + y + 1$, $y(0) = 0$; $[0,2]$;
б) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$, $[0,1]$.

9. Ашағыдакы мисалларда, верилмиш сыфырынчы јахынлашмалара әсасән, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ ардычыл јахынлашмаларыны гурун:

а) $y' = 3x + y + 1$, $y(0) = 1$, $\varphi_0(x) = x$;
б) $y' = x^2 + xy$, $y(1) = 0$, $\varphi_0(x) = 1$;
в) $y' = y + e^x$, $y(0) = 0$, $\varphi_0(x) = 0$.

10. Ашағыдакы тәнликләрин һәлләринин координат башланғычынын әтрафында һамарлығыны арашдырын.

а) $y' = y^2 \sqrt[3]{y} + x^3 |x|$;

б) $y' = (x^2 - y^2)^{5/2} + x \ln y$.

III ФӘСИЛ

ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗӘРӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМАМЫШ БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘКЛИФЛӘР

а) *Һәллин тә'рифи.*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

шәклиндә олан тәнлијә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш биртәртибли ади диференсиал тәнлик дејилир; бурада $F(x, y, z)$ үч өлчүлү Евклид фәзасынын мүәјјән D областында тә'јин олунмуш мә'лум функсијадыр.

(a, b) интервалында диференсиалланан $y = \varphi(x)$ функсијасы

1) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$, $x \in (a, b)$,
2) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$, $x \in (a, b)$

шәртләрини өдәјирсә, *һәмин функсијаја (1) тәнлијинин (a, b) интервалында һәлли дејилир.*

$\Phi(x, y) = 0$ тәнлијиндән тә'јин олунан $y = \varphi(x)$ функсијасы мүәјјән (a, b) интервалында (1) тәнлијинин һәлли исә, $\Phi(x, y)$ функсијасына (1) *тәнлијинин интегралы* дејилир.

Параметрик шәкилдә верилмиш диференсиалланан

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; t \in (t_0, t_1)$$

функсијасы

1) $\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \in D$, $t \in (t_0, t_1)$,

2) $F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = 0$, $t \in (t_0, t_1)$

шәртләрини өдәјирсә, һәмин функсијаја (1) тәнлијинин *параметрик шәкилдә һәлли* дејилир.

Тутаг ки, $F(x, y, z)$ функсијасы z дәјишәнинә нәзәрән n дәрәчәли чохһәдлидир:

$$F(x, y, z) = A_n(x, y) z^n + A_{n-1}(x, y) z^{n-1} + \ldots + A_1(x, y) z + A_0(x, y);$$

бурада $A_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ функсијалары xOy мүстәвисинин ејни бир G областында тә'јин олунмушлар вә

$$A_n(x, y) \neq 0.$$

Бу һалда (1) тәнлији ашағыдакы шәклә дүшәр:

$$A_n(x, y)(y')^n + A_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + A_1(x, y) y' + A_0(x, y) = 0. \tag{2}$$

Ајдындыр ки, G областынын $A_n(x, y) \neq 0$ олан һәр бир гејд олунмуш (x, y) нөгтәси үчүн (2) тәнлији y'-ә нәзәрән n дәрәҹәли ҹәбри тәнликдир.

Ҹәбрин әсас теореминә көрә, $A_n(x, y) \neq 0$ олан (x, y) нөгтәләри үчүн, (2) тәнлијинин комплекс әдәдләр мејданында n сајда көкү вар

$$y' = f_k(x, y), \ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Бурада $f_k(x, y)$ һәгиги вә ја комплекс гијмәтләр алан функсијалардыр

Диференсиал тәнликләрин бу курсунда анҹаг һәгиги һәлләр арашдырылдығындан, (3) тәнликләриндән анҹаг сағ тәрәфи һәгиги оланлара бахаҹағыг. Тутаг ки, белә тәнликләрин сајы m-дир $(m \leqslant n)$.

Беләликлә, (2) тәнлији төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш m сајда һәгиги тәнликләрә парчаланыр.

Тутаг ки, (1) тәнлији төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y' = f_k(x, y), \ k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

һәгиги тәнликләринә парчаланыр. Бу тәнликләрин һәр бирини I, II фәсилләрдә верилән үсулларла арашдырмаг олар. Ајдындыр ки, $f_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$ функсијалары мүәјјән G областында кәсилмәз олдугда бу областын ихтијари (x_0, y_0) нөгтәсиндән (4) тәнликләринин һәр биринин ән азы бир интеграл әјриси кечир.

Фәрз едәк ки, (4) тәнликләринин сајы m-дир. Онда (4) тәнликләриндән һәр биринин һәлли ејни заманда (1) тәнлијинин һәлли олдуғундан алырыг ки, верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлијинин ән азы m сајда интеграл әјриси кечир.

Тутаг ки, G областынын һәр бир (x, y) нөгтәсиндә $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots, f_m(x, y)$ функсијалары мүхтәлиф гијмәтләр алыр. Бу һалда (4) тәнликләри G областында m сајда мүхтәлиф истигамәтләр тә'јин едир вә демәли, (1) тәнлији (x, y) нөгтәсиндә m сајда истигамәт мүәјјән едир. Буна көрә дә (1) тәнлијини һәлл етмәк, һәндәси олараг графикләри G областында јерләшән вә һәр бир нөгтәсиндә тохунанынын истигамәти бу нөгтәдәки m истигамәтдән һеч олмаса бири илә үст-үстә дүшән бүтүн һамар әјриләри тапмаг демәкдир.

б) *Коши мәсәләси.* (1) тәнлијинин

$$y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

шәртини өдәјән һәлләринин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси* дејилир. Ајдындыр ки, (1) тәнлији үчүн Коши мәсәләсини һәлл етмәк, һәндәси олараг һәмин тәнлијин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриләрини тапмаг демәкдир.

Мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн (1) тәнлијинин $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында тә'јин олунан вә (5) шәртини өдәјән һәлләринин сајы

$$F(x_0, y_0, z) = 0 \tag{6}$$

ҹәбри тәнлијинин тә'јин етдији истигамәтләрин сајына бәрабәр

оларса, дејирләр ки, (x_0, y_0) нөгтәсиндә *Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.* Әкс һалда дејирләр ки, (x_0, y_0) нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији *позулур.*

Һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији сахланан интеграл әјрисинә ујғун һәллә хүсуси һәлл, һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулан интеграл әјрисинә ујғун һәллә мәхсуси һәлл дејилир. Мәхсуси һәллә ујғун интеграл әјрисинә бә'зән мәхсуси интеграл әјриси дә дејирләр.

Инди (1) тәнлијинин (5) шәртини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 1. *Тутаг ки, 1) (6) ҹәбри тәнлијинин m сајда һәгиги, мүхтәлиф $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m > 0)$ көкләри вар; 2) һәр бир (x_0, y_0, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ нөгтәси вә мүәјјән $a > 0$, $b > 0$, $c_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ әдәдләри үчүн $F(x, y, z)$ функсијасы $R_i = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a;\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b;\ z_i - c_i \leqslant z \leqslant z_i + c_i\}$ паралелопипединдә кәсилмәздир, кәсилмәз $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ төрәмәләри вар, һәм дә $|F_z(x, y, z)| \geqslant m_i > 0$. Онда (1) тәнлијинин (5) шәртини өдәјән вә мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында тә'јин олунмуш m сајда мүхтәлиф һәлли вар.*

Исбаты. $z_1, z_2, \ldots, z_m$ әдәдләри мүхтәлиф олдуғундан $c_1, c_2, \ldots, c_m$ әдәдләрини елә сечмәк олар ки, $R_1, R_2, \ldots, R_m$ паралелопипедләри кәсишмәзләр. Гејри-ашкар функсијанын варлығы һаггында теоремә әсасән (x_0, y_0, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ нөгтәсинин елә әтрафы вар ки, бу әтрафда (1) тәнлијинин y'-ә нәзәрән јеканә

$$y' = f_i(x, y) \ (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4'}$$

һәлли вар, белә ки, $f_i(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән гапалы $D_i = \{x_0 - a_i \leqslant x \leqslant x_0 + a_i;\ y_0 - b_i \leqslant y \leqslant y_0 + b_i\}$ $(0 < a_i \leqslant a,\ 0 < b_i \leqslant b)$ әтрафында кәсилмәздир вә кәсилмәз

$$\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, f_i(x, y))}{F_{y'}(x, y, f_i(x, y))}$$

хүсуси төрәмәси вар. Шәртә көрә $|F_{y'}(x, y, f_i(x, y))| \geqslant m_i > 0$ олдуғундан елә $K_i \geqslant 0$ әдәди вар ки, $(x, y) \in D_i$ үчүн $\left|\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant K_i$ олур. Бурадан алырыг ки, $f_i(x, y)$ функсијасы гапалы D_i областында y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир. Онда (II фәсилдәки 9-ҹу теоремә әсасән), (4') тәнлијинин (5) шәртини өдәјән вә $[x_0 - h_i, x_0 + h_i]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә $y = \varphi_i(x)$ һәлли вар. Бурада $h_i = \min\left\{a_i, \frac{b_i}{M_i}\right\}$, $M_i = \sup\limits_{D_i} |f_i(x, y)|$. Әкәр $h = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{h_i\}$ гәбул етсәк, аларыг ки, (1) тәнлијинин (5) шәртини өдәјән вә $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында тә'јин олунмуш m сајда һәлли вар.

һәм дә $R_1, R_2, \ldots, R_m$ параллелопипедләри кәсишмәдијиндән бу һәлләр мүхтәлифдир. Теорем исбат олунду.

в) *Умуми һәлл.* Тутаг ки, (1) тәнлији төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш m сајда (4′) тәнликләринә парчаланмышдыр вә

$$\varphi_1(x,y)=c,\ \varphi_2(x,y)=c,\ \ldots,\ \varphi_m(x,y)=c \qquad (7)$$

һәмин тәнликләрин үмуми интегралларыдыр. Бу үмуми интегралларын күллисинә (1) тәнлијинин *үмуми интегралы* дејилир.

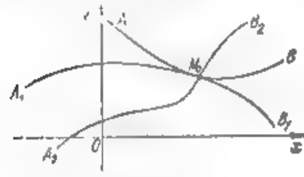
Ајдындыр ки, (7) үмуми интегралыны

$$(\varphi_1(x,y)-c)(\varphi_2(x,y)-c)\ldots(\varphi_m(x,y)-c)=0$$

шәклиндә дә јазмаг олар. Бу бәрабәрлијин сол тәрәфи c сабитинә нәзәрән m дәрәчәли чохһәдлидир.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнликләр нәзәријјәсиндә олдуғу кими, (1) тәнлијинин үмуми һәлли мүхтәлиф шәкилләрдә верилә биләр.

Верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндә $f_1(x,y), f_2(x,y), \ldots, f_m(x,y)$ функсијаларындан һеч олмаса икисинин гијмәти ејни, бу нөгтәнин мүәјјән әтрафында исә һәмисинин гијмәтләри мүхтәлиф оларса, (x_0, y_0) нөгтәсиндә (1) тәнлијинин һәллинин јеканәлији позулур. Буна бахмајараг, ола биләр ки, (x_0, y_0) нөгтәсиндән (4′) тәнликләриндән һәр биринин јеканә интеграл әјриси кечсин. Буну изаһ етмәк үчүн $m=3$ көтүрәк вә тутаг ки, $f_1(x_0, y_0)=f_2(x_0, y_0)$. Онда (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлијинин (4′) тәнликләри илә тә'јин олунан AM_0B, $A_1M_0B_1$, $A_2M_0B_2$ интеграл әјриләриндән башга (шәкил 10) бир һиссәси $y'=f_1(x,y)$ тәнлијинин, дикәр һиссәси исә $y'=f_2(x,y)$ тәнлијинин интеграл әјриләринин бирләшдирилмәси илә алынан AM_0B_1 вә A_1M_0B интеграл әјриләри дә кечир.



Шәкил 10.

Мисал 1.

$$y'^2+(x^2-1)y'-x^2=0 \qquad (8)$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлији y'-ә нәзәрән һәлл етсәк, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y'=1,\ y'=-x^2$$

тәнликләрини аларыг. Ајдындыр ки,

$$y=x+c,\ y=-\frac{x^3}{3}+c$$

функсијалары ујғун олараг бу тәнликләрин үмуми һәлләри олур. Онда (8) тәнлијинин үмуми интегралы

$$(y-x-c)\left(y+\frac{x^3}{3}-c\right)=0$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунар.

Ајдындыр ки, алынмыш тәнликләрин сағ тәрәфләри олан $f_1(x,y)=1$, $f_2(x,y)=-x^2$ функсијалары xOy мүстәвисинин бүтүн нөгтәләриндә мүхтәлиф гијмәтләр алыр вә мүстәвинин ихтијари (x_0, y_0) нөгтәсиндән бу тәнликләрин һәр биринин јеканә интеграл әјриси кечир.

Демәли, xOy мүстәвисинин һәр бир нөгтәсиндән (8) тәнлијинин ики мүхтәлиф интеграл әјриси кечир, јә'ни һәр бир нөгтәдә бу тәнлик үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.

Мисал 2.

$$y'^2-2xy'=0 \qquad (9)$$

тәнлији төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y'=0,\ y'=2x$$

тәнликләринә парчаланыр. Онда $y=c$, $y=x^2+c$ функсијалары бу тәнликләрин ујғун үмуми һәлләридир вә мүстәвинин ихтијари (x_0, y_0) нөгтәсиндән һәмин тәнликләрин һәр биринин јеканә интеграл әјриси кечир. Лакин бу тәнликләрин сағ тәрәфи олан $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=2x$ функсијалары $x=0$ дүз хәтти бојунча бәрабәр гијмәтләр алдығындан, бу хәтт бојунча (9) тәнлијинин һәллинин јеканәлији позулур. Доғрудан да, (9) тәнлији Oy оху үзәриндә көтүрүлмүш истәнилән $(0, y_0)$ нөгтәсиндә јеканә $y'=0$ истигамәти тә'јин етдији һалда, һәмин нөгтәдән $y=y_0$, $y=x^2+y_0$ вә онларын көмәји илә гурулан интеграл әјриләри кечир. Амма $x \ne 0$ олдугда $f_1(x,y) \ne f_2(x,y)$ олдуғундан $x=0$ дүз хәтти үзәриндә јерләшән нөгтәләр мүстәсна олмагла, мүстәвинин галан нөгтәләриндә (9) тәнлији үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Бурада $x=0$ функсијасы тәнлији өдәмәдијиндән, онун мәхсуси һәлли јохдур.

§ 2. МӘХСУСИ ҺӘЛЛИН ТАПЫЛМАСЫ

а) *Мәхсуси һәллин дискриминант әјриси васитәсилә тапылмасы.* Тутаг ки, $F(x,y,z)$ функсијасы D областында кәсилмәздир, кәсилмәз F_y, F_z төрәмәләри вар вә (1) тәнлији төрәмәјә көрә һәлл олунмуш (4) тәнликләринә парчаланыр. Ајдындыр ки, (4) тәнликләринин һәр биринин мәхсуси һәлли (әкәр варса), һәм дә (1) тәнлијинин мәхсуси һәлли олур. II фәсилдә исбат олунан 9-чу теоремә әсасән $f_k(x,y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән гапалы әтрафында кәсилмәздирсә вә мәһдуд $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ төрәмәси варса, бу нөгтәдән

$$y'=f_k(x,y) \qquad (4)$$

тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир, јә'ни бу нөгтәдә һәллин јеканәлији позула билмәз. Она көрә дә, көзләмәк олар

ки, (4) тәнлијинин һәллинин јеканәлији $\frac{\partial f_x}{\partial y}$ төрәмәси гејри-мәхдуд олан нөгтәләрдә позулсун. Белә нөгтәләрин һәндәси јериндән ибарәт олан әјри, (4) тәнлијинин мәхсуси һәлли үчүн *шүбһәли әјри* адланыр. Беләликлә, мәхсуси һәлли бу һәлл үчүн шүбһәли олан әјриләр ичәрисиндә ахтараркән, $\frac{\partial f_x}{\partial y}$ төрәмәсинин гејри-мәһдуд олдуғу нөгтәләрин һәндәси јериндән ибарәт олан әјриләри тапыб, бу әјриләрин (4) тәнлијинин интеграл әјриси олуб-олмадығыны јохламаг лазымдыр. Сонра исә интеграл әјриси оланлар үзәриндә јеканәлијин позулуб-позулмадығыны јохламаг лазымдыр. Көстәрәк ки, (1) тәнлијинин мәхсуси һәлләрини тапаркән һәмишә (4) тәнликләринә кечмәјә еһтијач јохдур. Доғрудан да, (4) тәнлијиндә y'-ә x, y дәјишәнләринин функсијасы кими бахсаг, $\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial f_x}{\partial y}$ олур. Бу төрәмәни билаваситә (1) тәнлијиндән гејри-ашкар функсијанын төрәмәси кими $\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, y')}{F_{y'}(x, y, y')}$ шәклиндә тапмаг олар.

Ајдындыр ки, $F_{y'}(x, y, y') = 0$ олдугда $\frac{\partial y'}{\partial y}$ төрәмәси гејри-мәһдуд олур. Бу төрәмәнин гејри-мәһдуд олдуғу әјри бојунча һәм дә (1) тәнлији өдәнмәлидир. Одур ки, (1) тәнлијинин мәхсуси һәлли үчүн шүбһәли олан әјри

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases}$$

системини өдәмәлидир. Бу системдән y'-и јох етмәклә алынан $R(x, y) = 0$ әјрисинә (1) тәнлијинин дискриминант әјриси дејилир. Дискриминант әјрисинин (вә ја онун һиссәсинин) мәхсуси интеграл әјриси олмасы үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнмәлидир. 1) һәмин әјри (1) тәнлијинин интеграл әјриси олмалыдыр, 2) бу әјринин һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулмалыдыр.

б) *Мәхсуси һәллин интеграл әјриләр аиләсинин гуршајаны кими тапылмасы.* Тутаг ки,

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{10}$$

аиләси (1) тәнлијинин үмуми интегралыдыр. Әкәр (10) аиләсинин гуршајаны* варса, бу гуршајан (1) тәнлијинин мәхсуси һәлли олур. Доғрудан да, $y = \varphi(x)$ әјриси (10) аиләсинин гуршајаны исә, бу әјринин һәр бир $(x, \varphi(x))$ нөгтәсиндә ону тә'јин едән $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ елементи (10) аиләсинин һеч олмаса бир әјрисинин елементи илә үст-үстә дүшүр. Бу көстәрир ки, $y = \varphi(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин һәллидир. Дикәр тәрәфдән, $y = \varphi(x)$ гуршајанынын һәр бир нөгтәсиндән, бу әјри дә дахил олмагла (1) тәнлијинин тә'јин етдији истигамәтләрин сајындан һеч олмаса бир ваһид артыг интеграл әјриси кечир. Демәли, гуршајан үзәриндә көтүрүлмүш һәр бир нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулур. Она көрә $y = \varphi(x)$ мәхсуси һәлл олур.

Беләликлә, тәнлијин мәхсуси һәллини интеграл әјриләри аиләсинин гуршајаны кими тә'јин етмәк үчүн (10) аиләсинин гуршајаныны тапмаг лазымдыр.

Мисал 3.

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0 \tag{11}$$

тәнлијини y'-ә нәзәрән квадрат тәнлик кими һәлл етсәк,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}, \quad y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} \tag{12}$$

бирчинс тәнликләрини аларыг. Бу тәнликләри һәлл едәрәк (11) тәнлијинин үмуми интегралыны $x^2 - 2cy + c^2 = 0$ шәклиндә гурмаг олар.

Ајдындыр ки, (12) тәнликләринин сағ тәрәфләри $y = \pm x$ дүз хәтләри бојунча бәрабәр гијмәт алырлар. Она көрә дә һәмин дүз хәтләр бојунча (11) тәнлијинин һәллинин јеканәлији позулур.

Дикәр тәрәфдән, ајдындыр ки, $y = \pm x$ функсијалары (11) тәнлијини өдәјирләр. Демәли, $y = \pm x$ һәлләри (11) тәнлијинин мәхсуси һәлләридир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, $y = \pm x$ функсијалары (12) тәнликләринин дә мәхсуси һәлләридир.

Гејд едәк ки, $y = \pm x$ мәхсуси интеграл әјриләрини (11) тәнлијинин дискриминант әјриләри кими

$$\begin{cases} xy'^2 - 2yy' + x = 0, \\ xy' - y = 0 \end{cases}$$

системиндән y'-и јох етмәклә, һәм дә тәнлијин үмуми интегралы аиләсинин гуршајаны кими

$$\begin{cases} x^2 - 2cy + c^2 = 0, \\ -y + c = 0 \end{cases}$$

системиндән c-ни јох етмәклә алмаг олар.

Мисал 4.

$$y'^2 - 16x^2 yy' = 0 \tag{13}$$

тәнлијиндән $y < 0$ олдугда

* Һәр бир нөгтәсиндә һамар аиләнин һеч олмаса бир әјрисинә тохунан вә һеч бир һиссәси аиләнин әјриләриндән бири илә үст-үстә дүшмәјән һамар әјрија аиләнин гуршајаны дејилир. Мә'лумдур ки, (10) аиләсинин гуршајаны

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \Phi_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

системини өдәјир.

$$y' = 0$$

һәгиги тәнлији, $y \geqslant 0$ олдугда исә

$$y' = 0,\ y' = 4x\sqrt{y},\ y' = -4x\sqrt{y} \qquad (14)$$

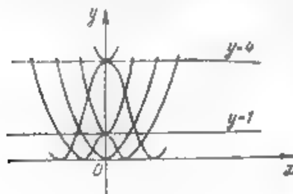
тәнликләри алыныр. Демәли, $y<0$ областында (13) тәнлијинин үмуми һәлли $y=c$ шәклиндәдир вә бу областын һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Ајдындыр ки, $y>0,\ x\neq 0$ областында (14) тәнликләринин сағ тәрәфләри мүхтәлиф гијмәтләр алырлар вә бу областын ихтијари нөгтәсиндән һәмин тәнликләрин һәр биринин јеканә һәлли кечир. $y=0$ вә $x=0\ (y>0)$ хәтләри бојунча (14) тәнликләринин сағ тәрәфләри бәрабәр гијмәтләр алырлар, һәм дә $y=0$ функсијасы һәмин тәнликләрин 2-чи вә 3-чүсүнүн мәхсуси һәлләридир, лакин $x=0\ (y>0)$ функсијасы һәлл дејил. (14) тәнликләринин үмуми һәлләри ујғун олараг

$$y=c,\ \sqrt{y}-x^2=c\ \ (c+x^2\geqslant 0),\ \sqrt{y}+x^2=c\ \ (c-x^2\geqslant 0)$$

шәклиндәдир вә демәли, $y>0$ областында (13) тәнлијинин үмуми интегралы

$$(y-c)(\sqrt{y}-x^2-c)(\sqrt{y}+x^2-c)=0. \qquad (15)$$

Ајдындыр ки, $y=0$ мәхсуси һәллини (15) аиләсиндән $c=0$, $c=-x^2$, $c=x^2$ көтүрмәклә алмаг олар, јә'ни мәхсуси һәлли c-јә әдәди гијмәт вермәклә дә үмуми интегралдан алмаг олар. Гејд едәк ки, (15) аиләсиндән $c=2x^2+1$ көтүрмәклә алынан $y=(x^2+1)^2$ функсијасы (13) тәнлијинин хүсуси һәллидир (шәкил 11).



Шәкил 11.

Бу мисалдан ајдындыр ки, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнликләрдән фәргли олараг, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш тәнлијин мүәјјән хүсуси һәллини бә'зән онун үмуми интегралында c сабитини x дәјишәниндән асылы функсија илә әвәз етмәклә, мәхсуси һәллини исә c сабитинә мүәјјән әдәди гијмәт вермәклә алмаг олар.

§ 3. НАТАМАМ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

тәнлијинә x, y дәјишәнләриндән һәр һансы бири вә ја һәр икиси ашкар дахил олмадыгда, белә тәнликләрә натамам диференсиал тәнликләр дејилир. Демәли, натамам диференсиал тәнликләр

$$F(y')=0,\ F(x,y')=0,\ F(y,y')=0$$

шәклиндә олан тәнликләрдир. Бу тәнликләри арашдыраг.

а) *Анчаг төрәмәдән асылы тәнликләр.* Белә тәнлијин үмуми шәкли

$$F(y')=0 \qquad (16)$$

олур. Тутаг ки, $F(k)=0$ чәбри тәнлијинин сонлу вә ја һесабы сајда һәгиги $k_1, k_2, \ldots$ көкләри вар. Онда (16) тәнлијиндән, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y'=k_i\ \ i=1,2,\ldots$$

тәнликләрини алырыг вә онларын үмуми һәлләри күллиси

$$y=k_ix+c,\quad i=1,2,\ldots$$

(16) тәнлијинин үмуми һәлли олур. Бурадан тә'јин олунан

$$k_i=\frac{y-c}{x},\ i=1,2,\ldots$$

гијмәтини $F(k_i)=0$ бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг, (16) тәнлијинин үмуми интегралы

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0;$$

Мисал 5. $\sin y'=0$ тәнлијинә бахаг. Бу тәнликдән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш сонсуз сајда

$$y'=k\pi,\ k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ldots$$

тәнликләри алыныр. Онда

$$y=k\pi x+c,\quad k=0;\pm 1;\pm 2;\ldots$$

функсијалары күллиси бахылан тәнлијин үмуми һәлли,

$$\sin\frac{y-c}{x}=0$$

исә үмуми интегралы олур.

Мисал 6. $y'^3-1=0$ тәнлијинин үмуми интегралы $\left(\frac{y-c}{x}\right)^3-1=0$. Бу үмуми интеграл $y'=1$ һәгиги тәнлијинин һәлләри илә јанашы

$$y'=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

комплекс тәнликләринин һәлләрини дә өзүндә сахлајыр.

Гејд 1. $F(k)=0$ тәнлијинин көкләри мүәјјән бир интервалы долдурарса, (16) тәнлијинин јухарыда көстәрилән һәлләрдән фәргли һәлләри дә ола биләр.

Мисал 7. $y'+|y'|=0$ тәнлијинә бахаг. Бу һалда

$$k+|k|=0.$$

тәнлијинин һәлләри $(-\infty, 0]$ јарымохуну долдурур. Она көрә дә бахылан диференсиал тәнлијин

$$y = kx + c, \ k \in (-\infty, 0]$$

һәлләриндән фәргли $y = -x^2$, $y = -x^2$, $x \in [0, +\infty)$ вә c, һәлләри дә вар.

б) *Ахтарылан функсија ашкар дахил олмајан тәнликләр.* Белә тәнликләр.

$$F(x, y') = 0 \tag{17}$$

шәклиндәдир Бу тәнлији һәлл етмәк үчүн ашағыдакы һаллара бахаг.

1) *Тәнлији y'-ә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүндүр.* Онда

$$y' = f_k(x), \ k = 1, 2, \ldots$$

тәнликләрини аларыг вә бу һалда (17) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \int f_k(x)\,dx + c, \quad k = 1, 2, \ldots$$

бәрабәрликләри илә верилир.

2) *Тәнлији*

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \tag{18}$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр, јә'ни мүәјјән (t_0, t_1) интервалында тә'јин олунан һамар $\varphi(t), \psi(t)$ функсијалары үчүн $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$ ејнилији өдәнир.

Тәнлијин интеграл әјриләри бојунча $dy = y'\,dx$ диференсиал мүнасибәти өдәндијиндән, (18)-ә әсасән

$$dy = \psi(t)\ \varphi'(t)\,dt.$$

Бурадан

$$y = \int \psi(t)\ \varphi'(t)\,dt + c$$

вә демәли,

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c$$

мүнасибәтләри (17) тәнлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәлли олур.

3) *(17) тәнлијини x-ә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүндүр:*

$$x = \varphi(y'). \tag{19}$$

Бу һал, $y' = t$ көтүрмәклә 2-чи һала кәтирилир.

Гејд 2. Әкәр һәр һансы a әдәди үчүн

$$\lim_{z \to +\infty} F(a, z) = 0, \ \lim_{z \to -\infty} F(a, z) = 0$$

мүнасибәтләриндән һеч олмаса бири өдәнәрсә, $x = a$ функсијасы (17) тәнлијинин һәлли олур. Бу һәлл хүсуси һәлл ола биләр.

Гејд 3. Тутаг ки, (17) тәнлији

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0 \tag{20}$$

шәклиндәдир вә $P(x, z)$, $Q(x, z)$ функсијалары ујғун олараг k вә m дәрәчәли бирчинс функсијалардыр. Онда (20) тәнлијини

$$x^k P\left(1, \frac{y'}{x}\right) + x^m Q\left(1, \frac{y'}{x}\right) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурада мүәјјәнлик үчүн $k > m$ гәбул едиб $y' = tx$ әвәзләмәси апарсаг, (20) тәнлијини

$$x = \sqrt[k-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}, \quad y' = t\sqrt[k-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар. Бу исә јухарыда бахдығымыз 2-чи һала ујғундур.

Мисал 8. $e^{y'} - y'^2 - x = 0$ тәнлијини

$$x = e^t - t^2, \ y' = t$$

параметрик шәкилдә јазмаг олар вә онун үмуми һәлли

$$x = e^t - t^2, \ y = (t-1)e^t - \frac{2}{3}t^3 + c$$

параметрик шәклиндә тапылыр.

Мисал 9.

$$x^3 + y'^3 - xy' = 0$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнликдә

$$P(x, y') = x^3 + y'^3, \ Q(x, y') = -xy'$$

функсијалары ујғун олараг $k = 3$, $m = 2$ дәрәчәли бирчинс функсијалардыр. Одур ки, $y' = tx$ әвәзләмәси апармагла тәнлији

$$x = \frac{t}{1+t^3}, y' = \frac{t^2}{1+t^3}$$

параметрик шәклинә кәтирмәк олар. Бурадан, бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{1+4t^3}{6(1+t^3)^2} + c$$

параметрик шәклиндә тапырыг.

в) *Сәрбәст дәјишән ашкар дахил олмајан тәнликләр.* Натамам тәнликләрдән бир синфи дә

$$F(y, y') = 0 \tag{21}$$

шәклиндә олан тәнликләрдир.

1) Тутаг ки, (21) тәнлијини y'-ә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүндүр:

$$y' = f_k(y), \ k = 1, 2, \ldots.$$

Алынан тәнликләри һәлл етмәклә (21) тәнлијинин үмуми интегралыны гурмаг олар.

2) Тутаг ки, (21) тәнлијини

$$y=\varphi(t),\ y'=\psi(t) \qquad (22)$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр. Бурадан $dy = y'dx$ мүнасибәтинә әсасән алырыг ки,

$$dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt.$$

Бу тәнлији һәлл едәрәк (21) тәнлијинин үмуми һәллини

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+c,\ y=\varphi(t)$$

параметрик шәклиндә гура биләрик.

3) Тутаг ки, (21) тәнлији y-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$y=\varphi(y').$$

Бу һал, $y'=t$ гәбул етмәклә 2-чи һала кәтирилир.

Г е ј д 4. $F(a,0)=0$ исә, $y=a$ функсијасы да (21) тәнлијинин һәллидир. Бу һәлл мәхсуси һәлл ола биләр.

Мисал 10.

$$y^{2/3}+y'^{2/3}=a^{2/3}$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлији

$$y=a\sin^3 t,\ y'=a\cos^3 t$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар. Бурадан тәнлијин үмуми һәллини

$$x=\frac{5}{3}\operatorname{tg}^3 t-5\operatorname{tg} t+5t+c,\ y=a\sin^3 t$$

параметрик шәклиндә тапырыг. Ајдындыр ки, $y=a$ функсијасы да бахылан тәнлијин һәллидир.

Мисал 11.

$$y-(y'-1)e^{y'}=0$$

тәнлијини $y'=t$, $y=(t-1)e^t$ параметрик шәклиндә јазмаг олар. Онда јухарыда көстәрилән гајда илә бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$x=e^t+c,\ y=(t-1)e^t$$

вә ја параметри јох етмәклә

$$y=(x-c)[\ln(x-c)-1],\ (x>c)$$

шәклиндә тапа биләрик. Бу мисалда $F(y,y')=y-(y'-1)e^{y'}$ вә $a=-1$ әдәди $F(a,0)=0$ тәнлијинин көкүдүр, јә'ни $y=-1$ бахылан тәнлијин һәллидир. Көстәрмәк олар ки, $y=-1$ дүз хәтти, һәлләр аиләсинин гуршајанылыр. Демәли, $y=-1$ һәлли мәхсуси һәллдир.

г) *Натамам тәнликләрә кәтирилән тәнликләр.* Мүәјјән k әдәди, $(x,y,z)\in D$ нөгтәси вә $(ux,u^k y,u^{k-1}z)\in D$ шәртини едәјән истәнилән u үчүн

$$F(ux,u^k y,u^{k-1}z)=u^m F(x,y,z) \qquad (23)$$

оларса, (1) тәнлијинә *үмумиләшмиш бирчинс тәнлик* дејилир.

Көстәрәк ки, үмумиләшмиш бирчинс тәнлији

$$x=e^t,\ y=ze^{kt}$$

әвәзләмәси васитәсилә ($x<0$ олдугда $x=-e^t$, $y=ze^{kt}$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр) натамам тәнлијә кәтирмәк олар. Доғрудан да, әвәзләмәјә әсасән $y'=\frac{dy}{dx}=e^{(k-1)t}\left(\frac{dz}{dt}+kz\right)$ олдуғундан, (23) шәртини дә нәзәрә алмагла (1) тәнлијини

$$F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+kz\right)=0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу исә сәрбәст дәјишән ашкар шәкилдә дахил олмајан тәнликдир.

Мисал 12. $(xy'+3y)^2-49x=0$ тәнлији үмумиләшмиш бирчинс тәнликдир. Бу тәнликдә $x=e^t$, $y=ze^{0,5t}$ $(x>0)$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\left(\frac{dz}{dt}+3{,}5z\right)^2-49=0$$

тәнлији алынар. Бу тәнлији һәлл едәрәк бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$x=e^t,\ y=ce^{-3t}\pm 2e^{0,5t}$$

параметрик шәклиндә вә ја параметри јох етмәклә $y=cx^{-3}\pm 2\sqrt{x}$ шәклиндә тапарыг.

§ 4. ПАРАМЕТР ДАХИЛ ЕТМӘЈИН ҮМУМИ ҮСУЛУ

Бу параграфда

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

тәнлијиндән y'-и x, y дәјишәнләринин елементар функсијалары васитәсилә ифадә етмәк мүмкүн олмајан үмуми һала бахылыр.

Тутаг ки, uOv мүстәвисинин мүәјјән Ω областында тә'јин олунан һамар

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ y'=h(u,v) \qquad (24)$$

функсијалары ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1) $(\varphi(u,v),\psi(u,v),h(u,v))\in D,\quad (u,v)\in\Omega,$

2) $F(\varphi(u,v),\psi(u,v),h(u,v))=0,\quad (u,v)\in\Omega.$

Бу һалда (24) тәнликләр системинә (1) тәнлијинин параметрик шәкли дејилир.

Көстәрәк ки, (1) тәнлијинин (24) параметрик шәкли мә'лум оларса, ону һәмишә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнлијә кәтирмәк олар. Доғрудан да, (24)-дән тә'јин олунан

$$dx = \varphi_u(u,v)\,du + \varphi_v(u,v)\,dv, \quad dy = \psi_u(u,v)\,du + \psi_v(u,v)\,dv,$$
$$y' = h(u,v)$$

ифадәләрини $dy = y'dx$ мүнасибәтиндә јазсаг

$$[\psi_u(u,v) - h(u,v)\,\varphi_u(u,v)]\,du + [\psi_v(u,v) -$$
$$- h(u,v)\,\varphi_v(u,v)]\,dv = 0 \qquad (25)$$

тәнлијини аларыг. Бу исә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнликдир.

Тутаг ки, (25) тәнлијинин үмуми һәлли $v = \omega(u,c)$ шәклиндәдир. Онда,

$$x = \varphi(u, \omega(u,c)), \quad y = \psi(u, \omega(u,c)) \qquad (26)$$

(1) тәнлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәлли олар; бурада c ихтијари сабитдир. (26) системиндән u параметрини јох етмәк мүмкүн оларса, (1) тәнлијинин

$$y = \Phi(x,c)$$

шәклиндә үмуми һәллини вә ја

$$\Phi(x,y,c) = 0$$

шәклиндә үмуми интегралыны аларыг. $v = g(u)$ функсијасы (25) тәнлијинин мәхсуси һәлли исә, $x = \varphi(u, g(u))$, $y = \psi(u, g(u))$ функсијасы (1) тәнлијинин мәхсуси һәлли ола биләр.

Мисал 13. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$ тәнлијинә бахаг. Бу тәнлији

$$x = vue^{-u}, \quad y = v, \quad y' = e^u$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар вә ујғун (25) тәнлији

$$(u-1)(v\,du - dv) = 0$$

шәклиндәдир. Бурадан $u = 1$ вә $v = ce^u$ һәлләрини аларыг. Онда $x = cu$, $y = ce^u$ бахылан тәнлијин параметрик шәкилдә үмуми һәлли олар. Одур ки, u параметрини јох етсәк, тәнлијин $y = ce^{x/c}$ шәкилдә үмуми һәллини аларыг. Бахылан тәнлијин $u = 1$ һәллинә ујғун һәлли $y = ex$ олар. Асанлыгла јохламаг олар ки, бу һәлл $y = ce^{x/c}$ аиләсинин гуршајаныдыр вә демәли, бахылан тәнлијин мәхсуси һәллидир.

Параметр дахил етмәјин үмуми үсулуну тәтбиг едәркән (1) тәнлијинин (24) параметрик шәклиндә көстәрилмәси вә параметрик шәкилдә көстәрилмәси мүмкүн олдугда, алынан (25) тәнлијинин квадратура илә һәлл олунмасы мәсәләси мејдана чыхыр.

Ашағыдакы хүсуси һаллары арашдыраг:

а) *Сәрбәст дәјишәнә нәзәрән һәлл олунан тәнликләр.* Тутаг ки, (1) тәнлији x-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x = \varphi(y, y').$$

Параметр олараг y вә p-ни көтүрмәклә бу тәнлији

$$x = \varphi(y,p), \quad y' = p$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк олар. Бурадан $dy = y'dx$ мүнасибәтинә әсасән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$[p\,\varphi_y(y,p) - 1]\,dy + \varphi_p(y,p)\,dp = 0$$

тәнлијә алыныр.

Мисал 14. $xy'^3 = yy'^2 + y^{4/3}$ тәнлији x-ә нәзәрән һәлл олунандыр. Ону

$$x = \frac{y}{p} + \frac{y^{4/3}}{p^3}, \quad y' = p$$

шәклиндә јазараг $dy = p\,dx$ мүнасибәтиндән истифадә етсәк:

$$\frac{dy}{dp} - \frac{9}{4p}y = \frac{3}{4}py^{2/3}$$

Бернулли тәнлијини аларыг. Бурадан

$$y = p^{9/4}\left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^3.$$

Демәли, бахылан тәнлијин параметрик шәкилдә үмуми һәлли

$$x = p^{5/4}\left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^3 + \left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^4,$$
$$y = p^{9/4}\left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^3.$$

Ајдындыр ки, $y = 0$, алынмыш Бернулли тәнлијинин мәхсуси һәллидир. Асанлыгла јохламаг олар ки, $y = 0$ һәм дә бахылан тәнлијин мәхсуси һәллидир.

б) *Ахтарылан функсијаја нәзәрән һәлл олунан тәнликләр.* Тутаг ки, (1) тәнлији y-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$y = f(x, y').$$

Бу тәнлији

$$y = f(x,p), \quad y' = p$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар вә бурадан да $dy = p\,dx$ мүнасибәтинә әсасән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$[f_x(x,p) - p]\,dx + f_p(x,p)\,dp = 0$$

тәнлији алынар.

Мисал 15. $y = xy' + \sqrt{x(1+y'^2)}$ тәнлијинин һәлл едәк. Бунун үчүн $y' = p$ гәбул едиб, тәнлијә

$$y = px + \sqrt{x(1+p^2)}$$

шәклиндә јазаг. Бурадан

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2p}{1+p^2}x + \frac{2}{\sqrt{1+p^2}}x^{3/2} = 0$$

Бернулли тәнлији алынар вә онун үмуми һәлли $x=(1+p^2)^{-1}(c+$ $+\operatorname{arc\,tg} p)^{-2}$. Онда бахылан тәнлијин үмуми һәлли:

$$x = (1+p^2)^{-1}(c+\operatorname{arc\,tg} p)^{-2},$$

$$y = p(1+p^2)^{-1}(c+\operatorname{arc\,tg} p)^{-2} + (c+\operatorname{arc\,tg} p)^{-1}.$$

в) *Клеро тәнлији.*

$$y = xy' + \psi(y')$$

тәнлијинә Клеро тәнлији дејилир; бурада $\psi(z)$ верилмиш дифференсиалланан функсијадыр. Көстәрәк ки, Клеро тәнлији квадратура илә һәлл олунур. Бунун үчүн тәнлији

$$y = xp + \psi(p), \quad y' = p$$

параметрик шәклиндә јазыб, јухарыдакы гајданы тәтбиг едәк. Онда

$$[x + \psi'(p)]\,dp = 0$$

тәнлијини аларыг. Бурадан да

$$dp = 0, \; x + \psi'(p) = 0$$

тәнликләри алыныр вә онларын ујғун һәлләри $p = c$, $x =$ $= -\psi'(p)$ олур. Бу һәлләрә ујғун олараг, Клеро тәнлијинин

$$y = cx + \psi(c), \tag{27}$$

үмуми һәлли вә

$$x = -\psi'(p), \; y = -p\psi'(p) + \psi(p) \tag{28}$$

һәлли алыныр.

Көстәрәк ки, $\psi(p)$ функсијасынын икинчи тәртиб кәсилмәз төрәмәси варса вә $\psi''(p) \neq 0$ исә, (28) функсијасы Клеро тән-
лијинин мәхсуси һәллидир. Бунун үчүн көстәрәк ки, (28) илә тә'јин олунан әјри (27) аиләсинин гуршајаныдыр. Тә'рифә көрә (27) аиләсинин гуршајаны

$$\begin{cases} y = cx + \psi(c), \\ 0 = x + \psi'(c) \end{cases} \tag{29}$$

системиндән c параметрини јох етмәклә алыныр. $\psi''(p) \neq 0$ олдуғундан (29) дүстурлары c параметриндән асылы һамар функсија тә'јин едир. Она көрә (29) системинә (27) аиләсинин гуршајанынын параметрик шәкилдә тәнлији кими бахмаг олар.

Ајдындыр ки, (28) вә (29) системләри ејни бир функсија тә'јин едир.

Мисал 16. Ихтијари нөгтәдә әјријә чәкилмиш тохунанын координат охларындан ајырдығы үчбучағын саһәси $2a^2$-дыр. Әјрини тапын.

Һәлли. Тутаг ки, (x, y) ахтарылан әјри үзәриндә ихтијари нөгтәдир. Бу нөгтәдә әјријә чәкилән тохунанын тәнлији

$$Y - y = y'(X - x)$$

олар; бурада (X, Y) тохунанын чари координатларыдыр. Тохунанын координат охларындан ајырдығы парчалар $x - \frac{y}{y'}$ вә $y - xy'$ олдуғундан, шәртә көрә

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(y - xy') = 4a^2.$$

Бурадан

$$y = xy' \pm 2a\sqrt{-y'} \qquad (y' < 0)$$

Клеро тәнлији алынар. $y = cx \pm 2a\sqrt{-c}$, $(c < 0)$ тәнлијин үмуми һәлли, $xy = a^2$ исә мәхсуси һәллидир.

г) *Лагранж тәнлији.*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

тәнлијинә Лагранж тәнлији дејилир, бурада $\varphi(p)$, $\psi(p)$ верилмиш дифференсиалланан функсијалардыр вә $\varphi(p) \not\equiv p$ ($\varphi(p) \equiv p$ олдугда Клеро тәнлији алыныр). Лагранж тәнлијини

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \; y' = p$$

параметрик шәкилдә јазараг, $dy = pdx$ мүнасибәтинә әсасән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$[\varphi(p) - p]\,dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp = 0$$

тәнлијини аларыг. Ајдындыр ки, p-јә сәрбәст дәјишән, x-ә ахтарылан функсија кими бахдыгда бу тәнлик хәтти тәнликдир.

Мисал 17. Координат башланғычындан кечән вә һәр бир нөгтәсиндә чәкилмиш нормалынын биринчи рүбдә координат охлары арасында галан парчасынын узунлуғу 2-јә бәрабәр олан әјрини тапын.

Һәлли. Әјри үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари (x, y) нөгтәсиндә чәкилән нормалын тәнлији

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

олдуғундан, бу нормал координат охларыны ујғун олараг $(x + yy', 0)$ вә $\left(0, y + \frac{x}{y'}\right)$ нөгтәләриндә кәсир. Мәсәләнин шәртинә әсасән

$$(x + yy')^2 + \left(y + \frac{x}{y'}\right)^2 = 4.$$

Бурадан

$$y = -\frac{x}{y'} \pm \frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Лагранж тәнлији алыныр вә

$$x = cp(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \pm p(1+p^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y = -c(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \mp (1+p^2)^{-\frac{3}{2}} \pm 2(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

онун параметрик шәкилдә үмуми һәлли олур. Графики координат башланғычындан кечән вә мәсәләнин шәртини едәјән һәлл

$$x = p(p^2+2)(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad y = p^2(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

§ 5. ТРАЈЕКТОРИЈА ҺАГГЫНДА МӘСӘЛӘ

Биртәртибли диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин һәндәси тәтбигләриндән бири трајекторија һаггында мәсәлә дир.

Тутаг ки, a параметриндән асылы

$$\Phi(x, y, a) = 0 \qquad (30)$$

һамар әјриләр аиләси верилмишдир. *Бу аиләнин һәр бир әјриси илә ејни α буҹағы алтында кәсишән әјринин тапылмасы мәсәләсинә трајекторија һаггында мәсәлә, әјринин өзүнә исә аиләнин трајекторијасы дејилир.* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *олдугда трајекторија ортогонал,* $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ *олдугда исә изогонал трајекторија адланыр.*

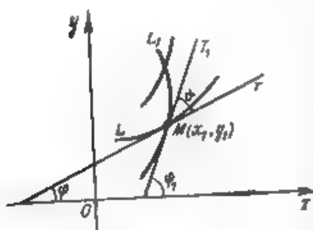
Верилмиш аиләнин трајекторијаларыны тапаг. Бунун үчүн әввәлҹә аиләнин диференсиал тәнлијини гураг. Бу мәгсәдлә x-ә сәрбәст дәјишән, y-ә исә ахтарылан функсија кими бахыб, (30) бәрабәрлијиндән төрәмә алаг:

$$\Phi_x(x, y, a) + \Phi_y(x, y, a)\, y' = 0. \qquad (31)$$

(30) вә (31) мүнасибәтләриндән a параметрини јох етсәк,

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (32)$$

тәнлијини аларыг. Ајдындыр ки, (30) аиләси (32) тәнлијинин үмуми интегралыдыр.



Шәкил 12.

Тутаг ки, L_1 әјриси (30) аиләсинин трајекторијасыдыр вә $M(x_1, y_1)$ нөгтәси бу трајекторија үзәриндә ихтијари нөгтәдир (шәкил 12). (30) аиләсиндән бу нөгтәдән кечән әјрисини L илә ишарә едәк. L вә L_1 әјриләринә $M(x_1, y_1)$ нөгтәсиндә чәкилән MT вә MT_1 тохунанларынын Ox охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији буҹаглары ујғун олараг φ вә φ_1 илә ишарә етсәк, $\varphi_1 - \varphi = \alpha$ олар. $M(x_1, y_1)$ нөгтәси L_1 әјриси үзрә һәрәкәт етдикҹә φ вә φ_1 буҹаглары дәјишир, лакин $\varphi_1 - \varphi$ фәрги һәмишә сабит олуб, α-ја бәрабәр олур.

Төрәмәнин һәндәси мә'насына әсасән MT вә MT_1 тохунанларынын буҹаг әмсаллары $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$ олар.

Тутаг ки, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Онда $\varphi = \varphi_1 - \alpha$ бәрабәрлијинә әсасән, MT вә MT_1 тохунанларынын буҹаг әмсаллары арасында

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi_1}$$

вә ја

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k\frac{dy_1}{dx_1}}, \quad (k = \operatorname{tg}\alpha) \qquad (33)$$

мүнасибәтини аларыг.

$M(x_1, y_1)$ нөгтәси (32) тәнлијинин L интеграл әјриси үзәриндә олдуғундан, (33) мүнасибәтинә әсасән,

$$F\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{1 + k\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0$$

олмалыдыр. $M(x_1, y_1)$ нөгтәси L_1 әјриси үзәриндә ихтијари нөгтә олдуғундан, бурадан аларыг ки, бу әјри бојунҹа

$$F\left(x, y, \frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}}\right) = 0, \qquad (34)$$

јә'ни (34) мүнасибәти (30) аиләсинин изогонал трајекторијаларынын диференсиал тәнлијидир.

Беләликлә, (30) аиләсинин изогонал трајекторијаларынын тапылмасы мәсәләси (34) диференсиал тәнлијинин һәллинә кәтирилир.

Тутаг ки, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Бу һалда $\varphi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ олдуғундан $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$. Демәли, MT вә MT_1 тохунанларынын буҹаг әмсаллары арасында

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$$

мүнасибәти едәнир. Бурадан, јухарыдакына охшар мүһакимә апармагла аларыг ки, (30) аиләсинин ортогонал трајекторијаларынын диференсиал тәнлији

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \tag{35}$$

Мисал 18. Координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләсинин изогонал вә ортогонал трајекторијаларыны тапмалы.

Һәлли. Координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләси

$$y = ax$$

тәнлији илә верилир; бурада a параметрдир. Бу аиләнин диференсиал тәнлији

$$y = \frac{dy}{dx}x \tag{36}$$

олур. Алынмыш тәнликдә $\frac{dy}{dx}$ әвәзинә $\left(\frac{dy}{dx} - k\right) : \left(1 + k\frac{dy}{dx}\right)$ јазсаг, алынан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}$$

диференсиал тәнлији, изогонал трајекторијалар аиләсинин диференсиал тәнлији олар. Ајдындыр ки, бу тәнлик бирҹинс тәнликдир вә онун үмуми һәлли

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c\exp\left(\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Алынан аилә, координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләсинин изогонал трајекторијаларыдыр.

Бахылан аиләнин ортогонал трајекторијаларыны тапмаг үчүн (36) тәнлијиндә $\frac{dy}{dx}$ әвәзинә $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ јазаг. Онда

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнлијин һәлләри исә

$$x^2 + y^2 = c$$

чеврәләр аиләсидир.

Чалышмалар

1. Ашағыдакы тәнликләри төрәмәјә нәзәрән һәлл едиб үмуми һәллини тапын:

а) $y'^2 + yy' + 2ye^x - 4e^{2x} = 0$; *Ҹаваб:* $(y - e^x - ce^{-x})(y + 2e^x - c) = 0$.

б) $y'^2 - (x+1)y + xy^2 = 0$; *Ҹаваб:* $(y - ce^x)\left(y - ce^{\frac{x^2}{2}}\right) = 0$.

в) $y'^2 + 2yy' - y^2(2 - ye^x)e^x = 0$; *Ҹаваб.* $[ye^x(1 + ce^x) - 1][y(c + e^x) - 1] = 0$.

г) $x^2y'^3 - x^2y'^2 - y^2y' + y^2 = 0$. *Ҹаваб:* $(y - ce^x)(y - ce^{-\frac{x}{2}})(y - x - c) = 0$.

2. $y'^2 - (x+1)yy' + xy^2 = 0$, $y'^2 + 2yy' + y^2(2 - ye^x)e^x = 0$ тәнликләринин махсуси һәлләрини, тәнлијин дискриминант әјриси вә үмуми һәллин гуршаjаны васитәсилә тапын.

3. Ашағыдакы натамам тәнликләри һәлл един:

а) $x^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$, *Ҹаваб:* $x = a\cos^3 t$, $32y = a^2\sin 2t(3 + 2\sin^2 t - 8\sin^4 t) - 6a^2t + c$.

б) $y^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$, *Ҹаваб:* $x = 3\operatorname{ctg} t + 3t + c$, $y = a\cos^3 t$.

4. $\sin y' + |\sin y'| = 0$ тәнлијинин үмуми һәллини тапын. Көстәрин ки, төрәмәси $(2k - 1)\pi \leqslant y' \leqslant 2k\pi$ $(k = 0; \pm 1, \pm 2; \ldots)$ шәртини едәјән ихтијари $y = \varphi(x)$ функсијасы да онун һәллидир.

5. Параметр дахил етмәклә ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $y = xy' + x^a\varphi(y')$; $(a \neq 0, a \neq 1)$ *Ҹаваб:* $x = \left\{[\varphi(p)]^{\frac{1-a}{a}}\left(c + \frac{1-a}{a}\int[\varphi(p)]^{-\frac{1}{a}}dp\right)\right\}^{\frac{1}{a-1}}$, $y = xp + x^a\varphi(p)$.

б) $2y = 3xy' - y'^2$; *Ҹаваб:* $2xp^3 = c + p^4$, $4yp^2 = 3c + p^4$; $y = 0$.

в) $y = xy' - 2(1 + y')^2$; *Ҹаваб:* $y = cx - 2(1 + c)^2$, $8(x + y) = x^2$.

г) $y = 3xy'^2 + y'^3$; *Ҹаваб:* $2x(3p - 1)^2 = 3p^2(1 - 2p) + c$, $y = 3xp^2 + p^3$; $y = 0$; $27y = 9x + 1$.

г) $2x = \frac{y}{y'} - y^2y'^2$. *Ҹаваб:* $2p^2x = c - c^2p$, $py = c$, $32x^3 = -27y^4$.

6. Ашағыда верилмиш аиләләрин диференсиал тәнликләрини тапын:

а) $y = cx^2 + c^2$, *Ҹаваб:* $4x^2y = 2x^3y' + y'^2$.

б) $(y - c)^2 = 4xc$, *Ҹаваб:* $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

в) $y^2 + 2cxy = c^2$, *Ҹаваб:* $(x^2 + 1)y'^2 - y^2 = 0$.

г) $x = ct$, $y = \frac{c}{2}(1 + t^2)$, *Ҹаваб:* $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.

7. $y = x$ дүз хəттинə тохунан ваһид радиуслу чеврəлəр аилəсинин диференсиал тəнлиjини тапын.

Чаваб: $[(x-y\pm\sqrt{2})^2-1]y'^2-2y'=1-(y\pm\sqrt{2}-x)^2$.

8. Тəпəлəри $y = x$ дүз хəтти үзəриндə jерлəшəн вə $y = x^2 + 2bx + c$ шəклиндə олан параболалар аилəсинин диференсиал тəнлиjини тапын.

Чаваб: $y'' - 2y' + 4(x - y) = 0$.

9. Верилмиш аилəлəрин ортогонал траjекториjаларыны тапын.

а) $x^2 + 2ay = a^2 \ (a > 0)$, *Чаваб*: $cx^2 - 2cy + 1 = 0 \ (c > 0)$.

б) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$, *Чаваб*: $(x^2 + y^2)^2 = 2cxy$.

Көстəриш. Полjар координат системинə кечмəли.

в) $r = a(1 - \cos\varphi)$, *Чаваб*: $r = c(1 + \cos\varphi)$.

10. $y = ce^x$ аилəси илə 45°-ли бучаг əмəлə кəтирəн траjекториjалары гурун.

Чаваб: $(1 + y)^2 - ce^{x+y} = 0$.

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ еллипслəр аилəсинин (a, b верилмиш əдəдлəрдир) ортогонал траjекториjаларыны тапын.

Чаваб: $y^{b^2} = cx^{a^2}$.

IV ФƏСИЛ

ДИФЕРЕНСИАЛ ТƏНЛИКЛƏР СИСТЕМИ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАJЫШЛАР ВƏ ТƏ'РИФЛƏР

Тəтбиги əһəмиjjəтли мəсəлəлəрин һəлли, үмумиjjəтлə, бир нечə ахтарылан функсиjа вə онларын төрəмəлəри дахил олан диференсиал тəнликлəр системинə кəтирилир. Адəтəн механика вə физика мəсəлəлəрини һəлл едəркəн сəрбəст дəjишəн, заман олдуғундан, бундан сонра сəрбəст дəjишəни t илə, ахтарылан функсиjалары исə $x, y, z, \ldots$ вə jа $x_1, x_2, \ldots$ илə, онларын төрəмəлəрини исə $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$ вə с. ишарə едəчəjик. Ахтарылан функсиjалары $x_1, x_2, \ldots, x_n$ илə ишарə етсəк, *диференсиал тəнликлəр системини* үмуми һалда

$$F_i(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(m_n)}) = 0 \qquad (1)$$
$$i = 1, \ldots, n$$

шəклиндə jазмаг олар; бурада $F_1, F_2, \ldots, F_n$ функсиjалары $1 + m_1 + m_2 + \cdots + m_n + n$ өлчүлү Евклид фəзасынын мүəjjəн G областында верилмиш функсиjалардыр.

Үмумиjjəтлə, (1) системиндə тəнликлəрин саjы илə ахтарылан функсиjаларын саjы еjни олмаjа билəр. Лакин биз тəнликлəрин саjы илə ахтарылан функсиjаларын саjы еjни олан системлəрə бахачағыг. (1) системиндə $n = 1$ оларса, x_1 əвəзинə x, m_1 əвəзинə m jазмагла

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}) = 0 \qquad (2)$$

тəнлиjини аларыг. $m > 1$ олдугда белə тəнлиjə *jүксəк тəртибли тəнлик* деjилир.

Геjд едəк ки, $x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ функсиjасынын (1) системиндə иштирак едəн төрəмəлəринин əн jүксəк тəртиблисинин тəртиби m_i исə m_i-jə (1) системинин x_i дəjишəнинə нəзəрəн тəртиби, $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ əдəдинə исə системин тəртиби деjилир. Тутаг ки, (1) системи əн jүксəк тəртиб төрəмəлəрə нəзəрəн һəлл олунандыр:

$$x_i^{(m_i)} = f_i(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(m_1-1)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(m_n-1)}) \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Бу системə *jүксəк тəртиб төрəмəлəрə нəзəрəн һəлл олунмуш систем деjилир*.

Хүсуси һалда, (2) тəнлиjи m-чи тəртиб төрəмəjə нəзəрəн һəлл олунандырса, алынан

$$x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}) \qquad (4)$$

тəнлиjинə *jүксəк тəртиб төрəмəjə нəзəрəн һəлл олунмуш тəнлик деjилир*.

Əлавə функсиjалар дахил етмəклə (1) системини, һəр бир тəнлиjиндə ахтарылан функсиjаларын анчаг биринчи тəртиб төрəмəси иштирак едəн jени системə кəтирмəк олар. Доғрудан да,

$$\begin{array}{l} x_1 = x_{11}, \ \dot{x}_1 = x_{12}, \ldots, x_1^{(m_1-1)} = x_{1m_1}, \\ x_2 = x_{21}, \ \dot{x}_2 = x_{22}, \ldots, x_2^{(m_2-1)} = x_{2m_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_{n1}, \ \dot{x}_n = x_{n2}, \ldots, x_n^{(m_n-1)} = x_{nm_n} \end{array} \qquad (5)$$

ишарə етсəк, (1) системини

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, \ \dot{x}_{12} = x_{13}, \ldots, \dot{x}_{1m_1-1} = x_{1m_1}, \\ \dot{x}_{21} = x_{22}, \ \dot{x}_{22} = x_{23}, \ldots, \dot{x}_{2m_2-1} = x_{2m_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n1} = x_{n2}, \ \dot{x}_{n2} = x_{n3}, \ldots, \dot{x}_{nm_n-1} = x_{nm_n}, \\ F_i(t, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm_n}, \dot{x}_{nm_n}) = 0, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (6)$$

системи илə əвəз етмəк олар.

Көстәрәк ки, (1) системи илә (6) системи еквивалентдир: (1) системинин мүәјјән һәлли верилдикдә (6) системинин мүәјјән бир һәллини гурмаг олар вә тәрсинә, (6) системинин мүәјјән һәлли верилдикдә (1) системинин бир һәллини гурмаг олар. Бунун үчүн әввәлчә (1) системинин һәллинин тә'рифини верәк.

Тутаг ки, (a,b) интервалында, үјғун олараг, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ тәртибдән төрәмәләри олан $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијалары верилмишдир. Онда $t\in(a,b)$ үчүн

1) $(t, \varphi_1(t), \dot\varphi_1(t), \ldots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot\varphi_n(t), \ldots, \varphi_n^{(m_n)}(t)) \in G$,

2) $F_i(t, \varphi_1(t), \dot\varphi_1(t), \ldots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot\varphi_n(t), \ldots, \varphi_n^{(m_n)}(t)) = 0$
$$i=1,2,\ldots,n$$

оларса, $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_n=\varphi_n(t)$ *функсијаларына (1) системинин (a,b) интервалында һәлли дејилир.*

Верилмиш (1) системинин (6) системинә кәтирилмә гајдасындан ајдындыр ки, $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$, $\ldots, x_n=\varphi_n(t)$ функсијалары (1) системинин (a,b) интервалында һәллидирсә:

$$x_{11}=\varphi_1(t), x_{12}=\dot\varphi_1(t), \ldots, x_{1m_1}=\varphi_1^{(m_1-1)}(t),$$
$$x_{21}=\varphi_2(t), x_{22}=\dot\varphi_2(t), \ldots, x_{2m_2}=\varphi_2^{(m_2-1)}(t),$$
. . . .
$$x_{n1}=\varphi_n(t), x_{n2}=\dot\varphi_n(t), \ldots, x_{nm_n}=\varphi_n^{(m_n-1)}(t)$$

функсијалары һәмин интервалда (6) системинин һәллидир.

Тәрсинә, тутаг ки, $x_{ij}=\psi_{ij}(t)$, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m_i$ функсијалары (6) системинин һәллидир. Бурадан алынып ки, $\psi_{11}(t), \psi_{21}(t), \ldots, \psi_{n1}(t)$ функсијаларынын үјғун олараг $m_1, m_2, \ldots, m_n$ тәртибдән төрәмәләри вар вә $x_1=\psi_{11}(t)$, $x_2=\psi_{21}(t), \ldots, x_n=\psi_{n1}(t)$ функсијалары (1) системинин һәллидир.

Хүсуси һалда, (3) системиндә $m_1=m_2=\cdots=m_n=1$ олдугда алынан

$$\dot x_i=f_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (7)$$

системинә *n тәртибли нормал систем дејилир.* Биз кәләҹәкдә јалныз нормал системләри өјрәнәҹәјик.

Сәрбәст дәјишән (7) системинин сағ тәрәфинә ашкар шәкилдә дахил олмадыгда, јә'ни систем

$$\dot x_i=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (8)$$

шәклиндә олдугда, она *автоном* вә ја *динамик* систем дејилир.

(7) системинин сағ тәрәфи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән хәтти оларса, белә системә *хәтти систем* дејилир.

$$x_i=a_{i1}(t)x_1+a_{i2}(t)x_2+\cdots+a_{in}(t)x_n+f_i(t), \qquad (9)$$
$$i=1,2,\ldots,n$$

шәклиндә олан хәтти системә *бирҹинс олмајан хәтти систем*,

$$\dot x_i=a_{i1}(t)x_1+a_{i2}(t)x_2+\cdots+a_{in}(t)x_n,$$
$$i=1,2,\ldots,n$$

системинә исә (9) системинә үјғун *бирҹинс систем* дејилир. $a_{ij}(t)=a_{ij}=\text{const}$, $i,j=1,2,\ldots,n$ олдугда, хәтти систем *сабит әмсаллы хәтти систем адланыр.*

§ 2. НОРМАЛ СИСТЕМИН ҺӘЛЛИ ҺАГГЫНДА

а) *Системин һәлли.* Тутаг ки, $f_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $i=1,2,\ldots,n$ функсијалары $n+1$ өлчүлү Евклид фәзасынын мүәјјән D областында тә'јин олунмушлар. Бу һалда дејирләр ки,

$$\dot x_i=f_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (7)$$

системи D областында верилмишдир.

Үмуми шәкилдә верилмиш (1) системинин һәллинин тә'рифинә әсасән, нормал системин һәллинин тә'рифи ашағыдакы шәкилдә олар.

Фәрз едәк ки, (a,b) интервалында диференсиалланан $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_n=\varphi_n(t)$ функсијалары верилмишдир вә

1) $(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))\in D$, $t\in(a,b)$,

2) $\dot\varphi_i(t)=f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))$, $t\in(a,b)$, $i=1,2,\ldots,n$

шәртләри өдәнир. *Онда $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_n=\varphi_n(t)$ функсијаларына (7) системинин (a,b) интервалында һәлли дејилир.*

Системин һәлләрини тапмаг мәсәләсинә онун интегралланмасы дејилир. Системин интегралланмасында әсас мәсәлә онун һәлләрини тапмаг вә онларын хассәләрини өјрәнмәкдән ибарәтдир.

б) *Һәндәси изаһ.* Тутаг ки, $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_n=\varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин (a,b) интервалында тә'јин олунмуш һәр һансы һәллидир. Һәр бир $t\in(a,b)$ үчүн $(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t))$-јә $n+1$ өлчүлү Евклид фәзасынын нөгтәси кими бахсаг, t аргументи (a,b) интервалында дәјишдикдә бу нөгтәләр һәмин фәзада бир әјри тәсвир едәр. Бу әјријә системин $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_n=\varphi_n(t)$ һәллинә үјғун *интеграл әјриси дејилир.* $t=t_0$ олдугда $\varphi_i(t_0)=x_i^0$, $i=1,2,\ldots,n$ оларса, *һәмин интеграл әјриси $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндән кечир.*

D областындан һәр һансы $M(t,x_1,\ldots,x_n)$ нөгтәси көтүрүб, бу нөгтәдә f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ функсијаларынын гијмәтләрини һесаблајаг вә һәмин нөгтәдән истигамәтверичи косинуслары $1, f_1(t,x_1,\ldots,x_n), \ldots, f_n(t,x_1,\ldots,x_n)$ әдәдләри илә мүтәнасиб олан дүз хәтт парчасы кечирәк. Бу гајда илә D областынын һәр бир нөгтәсиндә, (7) системинин көмәји илә бир истигамәт тә'јин етмиш олуруг. Белә истигамәтләр чохлуғуна *истигамәтләр мејданы дејилир.* Ајдындыр ки, верилмиш $(t,\varphi_1(t),\ldots,$

$\varphi_n(t)$) интеграл әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә она чәкилән тохунанын истигамәти һәмин нөгтәдә мејданын истигамәти илә үст-үстә дүшүр. Демәли, *системи һәлл етмәк, һәндәси олараг һәр бир нөгтәсиндә чәкилмиш тохунаны, мејданын һәмин нөгтәдәки истигамәти илә үст-үстә дүшән әјриләри тапмагдан ибарәтдир.*

Системин сағ тәрәфиндәки $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијаларындан һеч олмаса бири, верилмиш $P(t', x_1', \ldots, x_n')$ нөгтәсиндә $\frac{0}{0}$ шәкилли гејри-мүәјјәнлијә чеврилирсә, бу нөгтәдә мејданын истигамәти мүәјјән олунмур. Belә нөгтәдән кечән һәллә бахылмыр вә мүәјјән $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ һәлли

$$\lim_{t \to t'} \varphi_i(t) = x_i', \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шәртини өдәјирсә, дејирләр ки, *бу һәлл P нөгтәсинә јанашыр.*

в) Коши мәсәләси. (7) нормал системинин

$$\varphi_1(t_0) = x_1^0, \ \varphi_2(t_0) = x_2^0, \ldots, \varphi_n(t_0) = x_n^0 \quad (10)$$

шәртләрини өдәјән $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси*, $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ әдәдләринә исә *Коши мә'лумлары* вә ја *башланғыч мә'лумлар* дејилир.

Коши мәсәләсини һәлл етмәк, *һәндәси олараг, $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир.*

Фәрз едәк ки, $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары (7) нормал системинин (10) шәртләрини өдәјән вә мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $(t_0 - h, t_0 + h)$ интервалында тә'јин олунмуш һәллидир. *Әкәр (7) системинин (10) шәртләрини өдәјән һәр бир башга $x_1 = \psi_1(t), x_2 = \psi_2(t), \ldots, x_n = \psi_n(t)$ һәлли, мүәјјән $\delta > 0$, $(\delta \leqslant h)$ үчүн $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ интервалында $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ һәлли илә үст-үстә дүшүрсә, $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир, дејилир.* Экс һалда, *ја'ни M_0 нөгтәсиндән бирдән чох интеграл әјриси кечәрсә вә ја һәмин нөгтәдән кечән интеграл әјриси јохдурса, дејәчәјик ки, бу нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулур.*

Ашағыда исбат едәчәјик ки, $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары M_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында кәсилмәздирләрсә, (7) системинин (10) шәртләрини өдәјән **һеч олмаса бир һәлли вар. Әлавә олараг $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларынын M_0 нөгтәси әтрафында кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ хүсуси төрәмәләри варса, бу һәлл јеканә олур.**

г) Үмуми, хүсуси вә мәхсуси һәлл. Тутаг ки, D областынын һәр бир нөгтәсиндән (7) системинин јеканә интеграл әјриси кечир вә n сајда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләриндән асылы олан

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ i = 1, 2, \ldots, n \quad (11)$$

функсијалар аиләси ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1) D областындан көтүрүлмүш һәр бир $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәси үчүн (11) системи $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$c_i = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \ i = 1, 2, \ldots, n; \quad (12)$$

2) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринин (12) илә тә'јин олунан һәр бир гијмәтиндә (11) функсијалары (7) нормал системинин һәллидир. Онда (11) функсијалары аиләсинә D областында (7) нормал системинин *үмуми һәлли* дејилир.

Үмуми һәллдән Коши мәсәләсинин һәллини алмаг олар. Доғрудан да, (12)-јә әсасән $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини

$$c_i^0 = \psi_i(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклиндә тә'јин едиб (11)-дә јазсаг, алынан

$$x_i = \varphi_i(t, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

функсијалары (7) системинин (10) шәртләрини өдәјән һәлли олур. Бә'зән t аргументинин мүәјјән t_0 гијмәтини гејд едәрәк үмуми һәллдә $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләри әвәзинә ахтарылан функсијаларын $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ башланғыч гијмәтләрини көтүрүрләр. Бу заман (11) үмуми һәлли

$$x_i = \tilde{\varphi}_i(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклиндә јазылыр. Үмуми һәллин белә формасына *Коши формасы дејилир.*

Верилмиш һәллә ујғун олан интеграл әјриси үзәриндәки һәр бир нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији сахланарса, белә һәллә хүсуси һәлл дејилир.

Үмуми һәллин тә'рифиндән ајдындыр ки, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринин (12) дүстурлары илә тә'јин олунан һәр бир гијмәтиндә ($\pm\infty$ дахил олмагла) үмуми һәллдән алынан һәлл хүсуси һәллдир.

Верилмиш һәллә ујғун олан интеграл әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позуларса һәллә мәхсуси һәлл дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, D илә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији сахланан максимал областы ишарә етсәк, мәхсуси һәлли $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринин һеч бир гијмәтиндә үмуми һәллдән алмаг олмаз вә мәхсуси һәлл варса, она ујғун олан интеграл әјриси анҹаг бу областын сәрһәдиндә јерләшир.

шир. Демәли, һәмин интеграл әјриси һәм дә D областынын сәрһәдинин тәнлијини өдәмәлидир. D областынын сәрһәди ән чоху n өлчүлү олдуғундан алыныр ки, мәхсуси һәлл ән чоху $n-1$ ихтијари сабитдән асылы ола биләр. Ајдындыр ки, бу һалда (7) системинин һәм дә D областынын һәмин сәрһәд нөгтәләри үчүн тә'јин олундуғу фәрз олунур.

Мисал 1.

$$\begin{cases}\dot x = -x + y,\\ \dot y = 3\sqrt[3]{y^2}\end{cases}$$

системиндә $f_1(t,x,y) = -x+y$, $f_2(t,x,y)=3\sqrt[3]{y^2}$ функсијалары t,x,y дәјишәнләринин фәзасында кәсилмәздирләр. Буна көрә дә фәзанын ихтијари нөгтәсиндән системин һеч олмаса бир интеграл әјриси кечир. Лакин $y=0$ мүстәвиси үзәриндә $f_2(t,x,y)$ функсијасынын y-ә нәзәрән хүсуси төрәмәси мәһдуд олмадығындан, һәмин мүстәви үзәриндәки нөгтәләрдә һәллин јеканәлији позула биләр.

Системин икинчи тәнлијинин үмуми һәлли $y=(t+c_1)^3$ шәклиндәдир вә $y=0$ онун мәхсуси һәллидир. Бунлары системин биринчи тәнлијиндә јеринә јазыб һәлл етсәк, $y>0$ $y<0$ областларында

$$x = c_2e^{-t} + (c_1+t)^3 - 3(c_1+t)^2 + 6(c_1+t) - 6,$$
$$y=(t+c_1)^3$$

үмуми һәллини вә

$$x = ce^{-t},\ y=0$$

шәклиндә һәллини аларыг. Икинчи һәлл мәхсуси һәллдир. Доғрудан да, $y=0$ мүстәвиси үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари $(t_0,x_0,0)$ нөгтәсиндән бахылан системин

$$x=(x_0+6)e^{t_0-t}+(t-t_0)^3-3(t-t_0)^2+6(t-t_0)-6,$$
$$y=(t-t_0)^3$$

вә

$$x = x_0e^{t_0-t},\ y=0$$

интеграл әјриләри кечир.

г) *Системин интегралы. Биринчи интеграл. Үмуми интеграл.* Тутаг ки, (11) функсијалар аиләси D областында (7) нормал системинин үмуми һәллидир. Үмуми һәллин тә'рифинә көрә (11) системи D областында $c_1,c_2,\dots,c_n$ сабитләринә нәзәрән (12) шәклиндә һәлл олунандыр. Демәли,

$$\psi_i(t,\varphi_1(t,c_1,c_2,\dots,c_n),\dots,\varphi_n(t,c_1,c_2,\dots,c_n)) = c_i,\quad i=1,2,\dots,n \qquad (13)$$

ејниликләри өдәнир. Бурадан алырыг ки, $\psi_i(t,x_1,\dots,x_n)$, $i=1,2,\dots,n$ функсијаларында $x_1,x_2,\dots,x_n$ аргументләри әвәзинә (7) системинин графики D областында јерләшән ихтијари һәллини јаздыгда һәмин функсијалар ејнилик кими сабитә чеврилирләр. Белә ки, мүхтәлиф һәлләри јаздыгда мүхтәлиф сабитләр алыныр.

Ејнилик кими сабит олмајан $\psi(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасында $x_1,x_2,\dots,x_n$ аргументләри әвәзинә (7) системинин графики D областында јерләшән ихтијари һәллини јаздыгда һәмин функсија ејнилик кими сабитә чевриләрсә, она (7) системинин интегралы,

$$\psi(t,x_1,x_2,\dots,x_n)=c \qquad (14)$$

мүнасибәтинә исә биринчи интегралы дејилир, бурада c $\psi(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасынын гијмәтләри чохлуғундан көтүрүлмүш ихтијари әдәддир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, (12) мүнасибәтләри илә тә'јин олунан $\psi_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$, $i=1,2,\dots,n$ функсијалары (7) системинин интегралларыдыр вә (12) бәрабәрликләринин һәр бири исә онун биринчи интегралыдыр.

Тутаг ки, $\psi(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасы (7) системинин D областында диференсиалланан интегралыдыр. Онда D областындан ихтијари $(\tau,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ нөгтәси көтүрүб, (7) системинин $x_1(\tau)=\xi_1$, $x_2(\tau)=\xi_2,\dots,x_n(\tau)=\xi_n$ шәртләрини өдәјән һәллини $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t),\dots,x_n=x_n(t)$ илә ишарә етсәк,

$$\psi(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))\equiv c. \qquad (15)$$

Алынан ејнилијин t-јә нәзәрән төрәмәсини тапаг:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\dot x_1(t)+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\dot x_n(t)\equiv 0. \qquad (16)$$

Ахырынчы ејнилији, $x_1=x_1(t), x_2=x_2(t),\dots,x_n=x_n(t)$ функсијалары (7) нормал системинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}f_1(t,x_1(t),\dots,x_n(t))+\dots+$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}f_n(t,x_1(t),\dots,x_n(t))\equiv 0 \qquad (17)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу ејниликдә $t=\tau$ јазаг:

$$\frac{\partial\psi(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial t}+\frac{\partial\psi(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial x_1}f_1(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)+\dots+$$
$$+\frac{\partial\psi(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial x_n}f_n(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)=0.$$

Дикәр тәрәфдән, $(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)$ нөгтәси D областынын ихтијари нөгтәси олдуғундан, сонунчу бәрабәрлији белә јаза биләрик:

$$\frac{\partial\psi(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial t}+\frac{\partial\psi(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1}f_1(t,x_1,\dots,x_n)+\dots+\frac{\partial\psi(t,x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n}f_n(t,x_1,\dots,x_n)=0. \qquad (18)$$

Алынан (18) ејнилијинин сол тәрәфинә $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ функсијасынын (7) системинә әсасән төрәмәси дејилир вә белә ишарә едилир: $\psi_{(7)}$.

Беләликлә, $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ функсијасы (7) системинин диференсиалланан интегралы исә, онун һәмин системә әсасән төрәмәси сыфыр олур. Бурадан ајдындыр ки, $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ функсијасы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f_1(t,x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+f_n(t,x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (19)$$

хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәллидир.

Көстәрәк ки, (19) тәнлијинин һәр бир $u=\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ һәлли (7) нормал системинин диференсиалланан интегралыдыр. Доғрудан да, $u=\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ функсијасы (19) хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлли исә, (18) ејнилији өдәнир. Бу ејниликдә $x_1, x_2, \dots, x_n$ әвәзинә (7) системинин һәр һансы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ һәллини јазсаг, (17) ејнилијини вә бурадан да (16) ејнилијини аларыг. Бу исә көстәрир ки, (15) ејнилији өдәнир

Апарылан мүһакимәләрә әсасән, системин интегралына ашағыдакы шәкилдә дә тә'риф вермәк олар:

Диференсиалланан вә $\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}$ төрәмәләриндән һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ функсијасынын (7) нормал системинә әсасән төрәмәси ејниликлә сыфра бәрабәрдирсә, она (7) системинин диференсиалланан интегралы дејилир.

Гејд едәк ки, (12) биринчи интеграллар системинин белә бир хассәси вар ки, бу системи $x_1, x_2, \dots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл етдикдә (7) нормал системинин үмуми һәлли алыныр. *Белә хассәјә малик олан n сајда биринчи интеграллар системинә (7) нормал системинин үмуми интегралы дејилир*

Үмумијјәтлә, верилмиш n сајда биринчи интегралын көмәји илә нә вахт системин үмуми һәллини гурмағын мүмкүн олдуғуну көстәрмәк үчүн, функсијалар системинин асылы олуб-олмамасы анлајышыны верәк.

Тутаг ки, D областында тә'јин олунмуш

$$u_1=\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\ \dots,\ u_n=\psi_n(t,x_1,\dots,x_n) \qquad (*)$$

функсијалары үчүн елә $F(u_1, \dots, u_n)$ функсијасы вардыр ки,

1) бу функсија $u_1, \dots, u_n$ дәјишәнләринин n өлчүлү фәзасында тә'јин олунуб вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар;
2) $F(u_1, \dots, u_n)$ функсијасы фәзанын һеч бир алт областында ејниликлә сабитә чеврилмир;
3) D областынын һәр бир гапалы мәһдуд алт областында

$$\Phi(t,x_1,\dots,x_n)=F(\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n))\equiv 0$$

ејнилији өдәнир. Онда дејирләр ки, (*) функсијалары D областында функсионал асылыдырлар (вә ја садәчә оларaг асылыдырлар).

Әкс һалда, (*) функсијалары D областында *функсионал асылы олмајан адланыр. (7) системинин функсионал асылы олмајан n сајда интегралына онун үмуми интегралы дејилир.*

Исбат едәчәјик ки, әкәр $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i=1, 2, \dots, n$ функсијалары D областында кәсилмәздирләрсә вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1, 2, \dots, n$, хүсуси төрәмәләри варса, (7) системинин функсионал асылы олмајан n сајда диференсиалланан интеграллары, јә'ни үмуми интегралы вар. (бах: VI фәсил, Теорем 7).

Теорем 1. *Тутаг ки, (*) функсијалары D областында (7) нормал системинин диференсиалланан интегралларыдыр. Бу интегралларын функсионал асылы олмамасы үчүн*

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\ne 0 \qquad (20)$$

шәртинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, (*) функсијалары (7) системинин D областында функсионал асылы олмајан диференсиалланан интегралларыдыр. Анализдән мә'лум олан теоремә әсасән, бурадан алыныр ки, һәр бир $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)\in D$ нөгтәсиндә

$$M=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial t} & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

матрисинин ранғы n-ә бәрабәрдир.

Ајдындыр ки, $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсиндә $\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=0$, $i=1, 2, \dots, n$ оларса, бу нөгтәдә (20) шәрти өдәнир. Она көрә дә $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсиндә $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial\psi_n}{\partial t}$ төрәмәләриндән һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан һала бахаг.

Шәртә көрә (*) функсијалары D областында (7) системинин диференсиалланан интеграллары олдуғундан, бу областда

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}f_1+\dots+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}f_n=0,$$
$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}f_1+\dots+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}f_n=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t}+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}f_1+\dots+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}f_n=0$$

мүнасибәтләри өдәнәр. Бу мүнасибәтләри $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәси үчүн јазыб $z_1=f_1,\dots,z_n=f_n$ ишарә етсәк,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}z_1+\dots+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}z_n=-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1}z_1+\dots+\dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n}z_n=-\dfrac{\partial\psi_n}{\partial t}\end{cases}$$

бәрабәрликләрини аларыг. Алынмыш бәрабәрликләрә $z_1,\dots,z_n$ мәчһулларына нәзәрән хәтти бирҹинс олмајан ҹәбри тәнликләр системи кими бахаг. Бу систем ујушан олдуғундан, мәчһулларын әмсалларындан дүзәлмиш матрисин рангы илә ҝенишләнмиш матрисин рангы бәрабәрдир. M матрисинин рангы n олдуғундан, бурадан (20) шәртинин өдәнмәси алыныр.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, D областында (20) шәрти өдәнир, лакин (*) функсијалары функсионал асылыдыр, јә'ни ејнилик кими сабит олмајан вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан елә $F(u_1,\dots,u_n)$ функсијасы вар ки, D областынын һәр бир гапалы мәһдуд алт областында

$$F(\psi_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(t,x_1,\dots,x_n))\equiv 0$$

ејнилији өдәнир. Бу ејнилији $x_1,\dots,x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән диференсиалласаг:

$$F_{u_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\dots+F_{u_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}\equiv0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_{u_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}+\dots+F_{u_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\equiv0$$

еjниликләрини аларыг. Шәртә көрә D областында $F_{u_1},\dots,F_{u_n}$ төрәмәләринин һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, бу еjниликләр (20) шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Тутаг ки, $\psi_1,\dots,\psi_n$ функсијалары D областында (7) системинин диференсиалланан вә функсионал асылы олмајан интегралларыдыр. Онда (20) шәртинә әсасән

$$\begin{cases}\psi_1(t,x_1,\dots,x_n)=c_1,\\ \psi_2(t,x_1,\dots,x_n)=c_2,\\ \dots\dots\dots\\ \psi_n(t,x_1,\dots,x_n)=c_n\end{cases}$$

системини $x_1, x_2,\dots,x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл етмәк олар вә алынан

$$\begin{cases}x_1=\varphi_1(t,c_1,\dots,c_n),\\ x_2=\varphi_2(t,c_1,\dots,c_n),\\ \dots\dots\dots\\ x_n=\varphi_n(t,c_1,\dots,c_n)\end{cases}$$

функсијалар аиләси (7) системинин D областында үмуми һәллидир; бурада $c_1, c_2,\dots,c_n$-ләр (*) функсијаларынын гијмәтләри чохлуғундан ихтијари сабитләрдир.

Системин һәр һансы биринчи интегралы мә'лум олдугда онун тәртибини бир ваһид азалтмаг олар. Доғрудан да тутаг ки,

$$\psi(t,x_1,\dots,x_n)=c \qquad (21)$$

(7) системинин биринчи интегралыдыр вә (21) тәнлијин x_n-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x_n=\omega(t,x_1,\dots,x_{n-1},c). \qquad (22)$$

Онда x_n-ин бу гијмәтини (7) системинин биринчи $n-1$ тәнлијиндә јазсаг, $n-1$ тәртибли

$$\dot x_i=f_i(t,x_1,\dots,x_{n-1},\omega(t,x_1,\dots,x_{n-1},c)),\ i=1,2,\dots,n-1$$

системини аларыг. Бу системи һәлл едиб (22) мүнасибәтини дә нәзәрә алсаг, (7) системинин үмуми һәллини гура биләрик.

Бу мүһакимәләрдән ајдындыр ки (7) системинин k сајда функсионал асылы олмајан биринчи интегралы мә'лум оларса, онун тәртибини k ваһид азалтмаг олар.

Бир чох һалларда верилмиш системи онунла еjникүчлү олан, лакин асан интегралланан јени системлә әвәз етмәклә биринчи интегралларыны алмаг олар.

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot x=x(x+y),\\ \dot y=-y(x+y)\end{cases}$$

системинә бахаг. Системин биринчи тәнлијини y-ә, икинчи тәнлијини x-ә вуруб тәрәф-тәрәфә топласаг:

$$\dot x y+\dot y x=0$$

тәнлијини аларыг. Бурадан системин

$$xy=c_1$$

биринчи интегралыны тапарыг вә онун көмәјилә системин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләси $\dot{x} = c_1 + x^2$ тәнлијинин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләсинә кәлир.

Мисал 3.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + y + t \end{cases}$$

системинин асылы олмајан интегралларыны тапаг. Бунун үчүн системи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x + y) = 2(x + y) + t, \\ \dfrac{d}{dt}(x - y) = -t \end{cases}$$

системи илә әвәз едәк. Алынан систем интегралланыр вә

$$(4x + 4y + 2t + 1)e^{-2t} = c_1,$$
$$2x - 2y + t^2 = c_2$$

шәклиндә ики биринчи интегралыны тапмаг олар. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\psi_1(t, x, y) = (4x + 4y + 2t + 1)e^{-2t},$$
$$\psi_2(t, x, y) = 2x - 2y + t^2$$

интеграллары функсионал асылы дејилдир вә буна көрә дә

$$x = Ae^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} + B,$$

$$y = Ae^{2t} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} - B \quad \left(A = \frac{c_1}{8},\ B = \frac{c_2}{4}\right)$$

функсијалары бахылан системин үмуми һәлли олур.

д) *Системин симметрик формасы.* (7) нормал системини

$$dt = \frac{dx_i}{f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

вә ја

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)} \tag{23}$$

шәклиндә јазмаг олар.

$$\frac{dy_1}{X_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})} = \frac{dy_2}{X_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})} = \cdots =$$
$$= \frac{dy_{n+1}}{X_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})} \tag{24}$$

системинә бахаг. Бурадан ајдындыр ки, $t = y_1$, $x_1 = y_2, \ldots, x_n = y_{n+1}$, $X_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \equiv 1$, $X_{i+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \equiv f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ гәбул етсәк, (23) системи (24) системинин хүсуси һалыдыр. *(24) системинә ади диференсиал тәнликләр системинин симметрик формасы дејилир.*

Симметрик системин нормал системдән фәрги ондан ибарәтдир ки, белә системә дәјишәнләр ејни һүгугла дахил олурлар.

Фәрз едәчәјик ки, $X_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ функсијалары мүәјјән D областында кәсилмәздирләр вә бу областын һеч бир нөгтәсиндә һамысы бирдән сыфыр дејил.

Тутаг ки, $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n+1}^0) \in D$ нөгтәсиндә $X_{n+1}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n+1}^0) \neq 0$. Онда (24) системиндә y_{n+1}-ә сәрбәст дәјишән кими бахараг $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n+1}^0)$ нөгтәсинин әтрафында ону n тәртибли

$$\frac{dy_i}{dy_{n+1}} = \frac{X_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})}{X_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{25}$$

нормал системи илә әвәз едә биләрик. *Бу нормал системин һәлли, интегралы, биринчи интегралы, үмуми һәлли вә үмуми интегралы, ујғун олараг, (24) симметрик системинин һәлли, интегралы, биринчи интегралы, үмуми һәлли вә үмуми интегралы адланыр.*

Гејд едәк ки, $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ функсијасы D областында (24) симметрик системинин диференсиалланан интегралы исә, $u = \psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ функсијасы һәмин областда

$$X_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\frac{\partial u}{\partial y_1} + X_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\frac{\partial u}{\partial y_2} +$$
$$+ \cdots + X_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\frac{\partial u}{\partial y_{n+1}} = 0, \tag{26}$$

хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлли олур.

Бир чох һалларда нормал системин симметрик шәклә кәтирилмәси онун биринчи интегралларыны тапмаг үчүн әлверишли олур. Системи (24) шәклиндә јаздыгдан сонра, диференсиаллара нәзәрән хәтти олан елә формалар ахтарылыр ки, сол тәрәфдә там диференсиал, сағ тәрәфдә исә сыфыр олсун. Алынан там диференсиалы интеграллајараг сабитә бәрабәр етмәклә биринчи интеграл тапылыр. Бу гајда илә n сајда функсионал асылы олмајан интеграл гурмаг мүмкүн олса, системин үмуми интегралыны вә демәли, үмуми һәллини гурмаг олар.

Мисал 4.

$$\frac{dy_1}{y_2+y_3}=\frac{dy_2}{-y_1+y_3}=\frac{dy_3}{y_1+y_2}$$

системинин үмуми интегралыны тапаг.

Һәлли. Чевирмәләрлә алынмыш

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1-dy_2}{y_2-y_1}=\dfrac{dy_2-dy_3}{y_3-y_2},\\[2mm] \dfrac{d(y_1+y_2+y_3)}{2(y_1+y_2+y_3)}=\dfrac{dy_1-dy_3}{-(y_1-y_3)}\end{cases}$$

системини интеграллајаг. Бу системин һәр тәнлији там диференсиал шәклиндәдир вә онлары интеграллајаг

$$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}=c_1,$$

$$(y_1+y_2+y_3)(y_1-y_3)^2=c_2$$

биринчи интегралларыны аларыг.

§ 3. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

а) Үмуми анлајышлар вә тә'рифләр. Биринчи параграфда гејд етдик ки, $n>1$ олдугда

$$F(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n)})=0 \qquad (2')$$

шәклиндә олан тәнлијә јүксәк тәртибли тәнлик дејилир вә онун тәртиби тәнликдә иштирак едән ән јүксәк тәртиб төрәмә илә мүәјјән олунур. Бу тәнликдән $x^{(n)}$-ә нәзәрән һәлл етмәклә алынан

$$x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)}) \qquad (4')$$

тәнлијинә ән јүксәк тәртиб төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнлик дејилир.

Јухарыда көстәрдијимиз гајдаја әсасән

$$x_1=x,\ x_2=\dot{x}_1=\dot{x},\ \ldots,\ x_n=\dot{x}_{n-1}=x^{(n-1)} \qquad (27)$$

әвәзләмәләри васитәсилә (4') тәнлијини

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \quad\cdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\\ \dot{x}_n=f(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{cases} \qquad (28)$$

нормал системинә кәтирмәк олар. Одур ки, нормал систем үчүн вердијимиз анлајышлары вә тә'рифләри ујғун дәјишикликләрлә (4') тәнлији үчүн дә вермәк олар.

Тутаг ки, $x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ldots,x_n=\varphi_n(t)$ функсијалары (28) системинин (a,b) интервалында

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ldots,x_n(t_0)=x_n^0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Онда (27) әвәзләмәләриндән ајдындыр ки, $x=\varphi_1(t)$ функсијасы (4') тәнлијинин (a,b) интервалында

$$x(t_0)=x_1^0,\ \dot{x}(t_0)=x_2^0,\ldots,x^{(n-1)}(t_0)=x_n^0 \qquad (29)$$

шәртләрини өдәјән һәллидир.

(4') тәнлијинин

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=x_0^1,\ldots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{n-1} \qquad (30)$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси*, $t_0, x_0, x_0^1,\ldots,x_0^{n-1}$ *әдәдләринә исә Коши мә'лумлары* дејилир.

Ајдындыр ки, $x=\varphi(t)$ функсијасы (4') тәнлијинин (a,b) интервалында (30) шәртләрини өдәјән һәлли исә,

$$x_1=\varphi(t),\ x_2=\dot{\varphi}(t),\ldots,x_n=\varphi^{(n-1)}(t)$$

функсијалары (28) системинин

$$x_1(t_0)=x_0,\ x_2(t_0)=x_0^1,\ldots,x_n(t_0)=x_0^{n-1}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Тә'рифә көрә $(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t))$, $t\in(a,b)$ нөгтәләринин һәндәси јери (28) системинин $(t_0,x_0,x_0^1,\ldots,x_0^{n-1})$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси олдуғундан, она (4') тәнлијинин һәмин нөгтәдән кечән *интеграл әјриси* дејәҹәјик.

Бу мүһакимәләр көстәрир ки, (4') тәнлији үчүн гојулмуш Коши мәсәләси, (28) системи үчүн гојулмуш мүәјјән Коши мәсәләсинә еквивалентдир.

Хүсуси һалда, $n=2$ олдугда (4') тәнлији

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x}) \qquad (4'')$$

шәклинә дүшүр вә онун үчүн башланғыч шәртләри

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=x_0^1 \qquad (30')$$

олур. (4'') тәнлијинин (30') шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси, һәндәси олараг һәмин тәнлијин tOx мүстәвиси үзәриндә (t_0,x_0) нөгтәсиндән кечән вә бу нөгтәдә тохунанынын буҹаг әмсалы x_0^1 олан интеграл әјрисини (әјриләрини) тапмаг демәкдир.

Нормал системин үмуми һәллинин тә'рифиндән ајдындыр ки,
$x_i=\varphi_i(t,c_1,c_2,\ldots,c_n)$, $i=1,2,\ldots,n$ функсијалары (28) системинин D областында үмуми һәлли олдугда

$$x=\varphi_1(t,c_1,c_2,\ldots,c_n) \qquad (31)$$

функцијасы һәмин областда (4′) тәнлијинин үмуми һәлли олур

Үмуми һәлдән (4′) тәнлијинин (30) башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини алмаг үчүн $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0, \\ \dot\varphi_1(t_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0^1, \\ \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0^{n-1} \end{cases} \qquad (32)$$

системиндән тә'јин етмәк лазымдыр.

Тутаг ки, (32) системиндән $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләри

$$c_i^0 = \psi_i\left(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклиндә тә'јин олунмушдур. Онда (4′) тәнлијинин (30) шәртләрини өдәјән һәлли

$$x = \varphi_1\left(t, \psi_1\left(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}\right), \ldots, \ldots, \psi_n\left(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}\right)\right)$$

олар. Бурада t_0 әдәдини гејд едәрәк $x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}$ әдәдләрини дәјишән көтүрмәклә алынан

$$x = \varphi\left(t, t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}\right) \qquad (33)$$

функцијасына үмуми һәлл кими бахмаг олар. *Үмуми һәллин белә формасына Коши формасы* дејилир.

Һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији сахланан интеграл әјрисинә ујғун олан һәллә *хүсуси һәлл*, јеканәлик позулан һәллә *мәхсуси һәлл* дејилир.

Гејд едәк ки, системдә олдуғу кими, (4′) тәнлијинин мәхсуси һәлли ән чоху $n-1$ сајда ихтијари сабитдән асылы ола биләр.

Мисал 1.

$$\ddot{x} = 3\sqrt[3]{\dot{x} - t} + 1$$

тәнлијини һәлл едәк.

Һәлли. $x = y + t$ әвәзләмәси апарсаг

$$\dot{y} = 3\sqrt[3]{y}$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнлијин үмуми һәлли

$$y = (2t + c_1)^{3/2}$$

шәклиндәдир вә $y = 0$ онун мәхсуси һәллидир. Онда

$$x = \frac{t^2}{6} + \frac{1}{35}(2t + c_1)^{7/2} + c_2 t + c_3$$

бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$x = \frac{t^3}{6} + a_1 t + a_2$$

мәхсуси һәлли олар.

б) Нормал системин јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирилмәси. Јухарыда көстәрдик ки, әлавә функцијалар дахил етмәклә јүксәк тәртибли тәнлији нормал системә кәтирмәк олар. Бә'зи һалларда исә нормал системи јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирмәк әлверишли олур.

Тутаг ки, (7) системиндә $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функцијаларынын D областында $(n-1)$ тәртибә гәдәр ($(n-1)$-чи тәртиб төрәмә дә дахил олмагла) кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар*.

Системин биринчи тәнлијиндә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә t дәјишәнинин функцијасы кими бахараг диференсиаллајаг. Бу заман (7) системини дә нәзәрә алараг јаза биләрик:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} f_j = \Phi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (34_1)$$

Бурадан, һәр дәфә (7) системини нәзәрә алмагла, $n-2$ дәфә ардычыл олараг диференсиаллајаг:

$$\dddot{x}_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j} f_j = \Phi_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (34_2)$$

. . . .

$$x_1^{(n-1)} = \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x_j} f_j = \Phi_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (34_{n-2})$$

$$x_1^{(n)} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_j} f_j = \Phi_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (34_{n-1})$$

* Һәллин варлығы һаггында икинчи фәсилдә вердијимиз теоремин исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, бу заман (7) системинин һәр бир һәллинин n-чи тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар.

Тутаг ки,

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dot{x}_1, \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ddot{x}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{(n-1)} \end{cases} \tag{35}$$

системи $x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x_i = \omega_i\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(n-1)}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{36}$$

Алынан гиј̆мәтләри (34_{n-1}) мүнасибәтиндә јеринә јазсаг, x_1-ә нәзәрән n тәртибли

$$x_1^{(n)} = \Phi_n\left(t, x_1, \omega_2(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(n-1)}), \ldots, \omega_n\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(n-1)}\right)\right) \tag{37}$$

тәнлијини аларыг.

Беләликлә, $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларынын $n-1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри варса вә (35) системи $x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунандырса, (7) системиндән (37) тәнлијини алмаг олар. Бу исә көстәрир ки, $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин (a, b) интервалында һәр һансы һәлли исә, $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы һәмин интервалда (37) тәнлијинин һәллидир.

Анализ курсундан мә'лумдур ки,

$$\frac{D(f_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \ldots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_3} \ldots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{38}$$

олдугда (35) системи $x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунандыр.

Көстәрәк ки, $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы (37) тәнлијинин һәр һансы һәлли исә, (38) шәрти өдәндикдә (36) мүнасибәтләри илә тә'јин олунан $x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары $x = \varphi_1(t)$ функсијасы илә бирликдә (7) системинин һәллидир.

Доғрудан да, $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы (37) тәнлијинин һәлли олдуғундан, бу функсија (36) мүнасибәтләри илә тә'јин олунан $x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары илә бирликдә (35) бәрабәрликләрини ејнилијә чевирир. Демәли, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин биринчи тәнлијини өдәјирләр. Буну нәзәрә алараг (34_1), (34_2), ..., (34_{n-1}) бәрабәрликләринин икинчи һиссәсиндән үчүнчү һиссәсини чыхмагла

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\dot{x}_3 - f_3) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\dot{x}_3 - f_3) + \cdots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_3}(\dot{x}_3 - f_3) + \cdots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0 \end{cases}$$

бәрабәрликләрини аларыг.

Бу бәрабәрликләрә $\dot{x}_2 - f_2, \ldots, \dot{x}_n - f_n$ фәргләринә нәзәрән хәтти бирчинс тәнликләр системи кими бахараг (38) шәртинә әсасән аларыг ки,

$$\dot{x}_2 - f_2 = 0, \ldots, \dot{x}_n - f_n = 0$$

ејниликләри өдәнир. Бу исә көстәрир ки, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин галан тәнликләрини дә өдәјир.

Ајдындыр ки, јухарыдакы әмәлијјатлары апараркән үмумилији позмадан, һәмишә системин биринчи тәнлијини көтүрмәк олар, әкс һалда мәчһулларын нөмрәсини дәјишмәклә буна наил ола биләрик.

Гејд едәк ки, (38) шәрти өдәнмәдикдә (35) системи $x_2, x_3, \ldots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунмаја биләр. Бу заман (7) нормал системини, үмумијјәтлә, n тәртибли бир тәнлијә кәтирмәк мүмкүн олмур, лакин бу системдән һәр биринин тәртиби n-дән аз олан бир груп тәнликләр алмаг олур ки, онларын тәртибләри чәми n-ә бәрабәр олур.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x^2 y + z, \\ \dot{z} = y - z \end{cases}$$

системини бир јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирәк.

Системин биринчи тәнлијини t-јә нәзәрән ики дәфә дифференсиаллајаг:

$$\ddot{x} = y + x^2 y,$$
$$\dddot{x} = (x^2 y + z)(1 + x^2) + 2xy\dot{x}.$$

Бурадан алынан

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \ddot{x} = y + x^2 y \end{cases}$$

системиндән y, z дәјишәнләринн тә'јин едиб $\dddot{x}$-нин ифадәсиндә јеринә јазсаг, үч тәртибли

$$\dddot{x} = (x^2-1)\ddot{x} + \left(1 + x^2 + \frac{2x\ddot{x}}{1+x^2}\right)\dot{x}$$

тәнлијини аларыг.

Мисал 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ \dot{y} = by + cz, \quad c \neq 0, \\ \dot{z} = ey + \gamma z \end{cases}$$

үчт өтиҹли системини

$$\dot{x} = ax,$$
$$\ddot{y} = (b+\gamma)\dot{y} + (ce - b\gamma)y$$

тәнликләринә кәтирмәк олар вә бу тәнликләрин тәртибләринин чәми үчдүр.

в) Јүксәк тәртиб төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш тәнликләр һаггында. Тутаг ки,

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2')$$

тәнлији верилмишдир. Бу тәнлијин *(30) башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә Коши мәсәләси* дејилир.

Фәрз едәк ки, (2') тәнлијини $x^{(n)}$-ә нәзәрән һәлл етмәклә

$$x^{(n)} = f_k(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \; k = 1, 2, \ldots \qquad (39)$$

тәнликләрини алмаг мүмкүндүр.

Алынмыш тәнликләрин үмуми һәлләри күллисинә (2') тәнлијинин *үмуми һәлли* дејилир. Ајдындыр ки, (2') тәнлијинин (30) шәртләрини өдәјән һәлләринин сајы, (39) тәнликләринин һәмин шәртләри өдәјән һәлләринин сајындан аз дејил.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш бир тәртибли тәнликләрдә олдуғу кими, (2') тәнлијинин (30) шәртләрини өдәјән һәлләринин сајы

$$F(t_0, x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{n-1}, z) = 0$$

тәнлијиндән тә'јин олунан мүхтәлиф z көкләринин сајына бәрабәр олдугда дејирләр ки, *Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.* Әкс һалда исә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулур.

г) *Аралыг интеграл, биринчи интеграл вә тәнлијин тәртибинин азалдылмасы.* Тутаг ки, n сајда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләриндән асылы олан

$$\Phi(t, x, c_1, \ldots, c_n) = 0 \qquad (40)$$

әјриләр аиләси верилмишдир. Аиләнин диференсиал тәнлијини гурмаг үчүн (40) тәнлијиндә x-ә t-нин функсијасы кими бахараг ону ардычыл олараг n дәфә диференсиалламагла алынан

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} = 0,$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\dot{x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\dot{x}^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\ddot{x} = 0, \qquad (41)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^n\Phi}{\partial t^n} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x}x^{(n)} = 0$$

тәнликләри илә (40) тәнлијиндән $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини јох етмәк лазымдыр. Бу заман (2') шәклиндә диференсиал тәнлик алыныр ки, һәмин тәнлик (40) аиләсинин диференсиал тәнлији олур.

Фәрз едәк ки, x функсијасынын k тәртибә гәдәр төрәмәләри вә $n-k$ сајда $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ $(k < n)$ сабитләри дахил олан

$$\psi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(k)}, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n) = 0 \qquad (42)$$

мүнасибәти верилмишдир, бурада ψ кифајәт гәдәр һамар функсијадыр. Бу мүнасибәти t-јә нәзәрән ардычыл олараг $n-k$ дәфә диференсиаллајаг:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x^{(k)}}x^{(k+1)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (43)$$
$$\frac{\partial^{n-k}\psi}{\partial t^{n-k}} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x^{(k)}}x^{(n)} = 0.$$

Онда $n-k+1$ сајда олан (42), (43) мүнасибәтләриндән $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$-и јох етдикдә (2') тәнлији алынарса, (42) *мүнасибәтинә (2') тәнлијинин аралыг интегралы дејилир.*

Хүсуси һалда, $k = n-1$ олдугда (42) аралыг интегралы

$$\psi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, c_n) = 0 \qquad (44)$$

шәклинә дүшүр вә *она (2') тәнлијинин биринчи интегралы* дејилир. Ајдындыр ки, (42) аралыг интегралына k тәртибли диференсиал тәнлик кими бахсаг, бу тәнлијин һәр бир һәлли (2') тәнлијинин һәллидир. Одур ки, (2') тәнлијинин (42) шәкилли аралыг интегралы мә'лум олдугда онун интеграллanмасы k тәртибли диференсиал тәнлијин интеграллaнмасына кәтирилир. Хүсуси һалда, тәнлијин ики функсионал асылы олмајан

$$\psi_1(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, c_{n-1}) = 0,$$
$$\psi_2(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, c_n) = 0$$

биринчи интеграллары мә'лум исә, бунлардан $x^{(n-1)}$ төрәмәсини јох етмәклә

$$\phi\left(t, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-2)}, c_{n-1}, c_n\right) = 0$$

аралыг интегралыны алмаг олар. Јә'ни тәнлијин тәртибини ики ваһид азалтмаг олар.

Ејни гајда илә үч, дөрд вә даһа чох асылы олмајан биринчи интеграллар мә'лум оларса, тәнлијин тәртибини үч, дөрд вә даһа чох азалтмаг олар. Хүсуси һалда, n сајда асылы олмајан биринчи интеграллар вериләрсә, һәмин интеграллардан $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}$ төрәмәләрини јох етмәклә (40) шәклиндә анлә аларыг ки, она да *(2′) тәнлијинин үмуми интегралы* дејилир

Мисал 4.

$$t x \ddot{x} - (x + 2t\dot{x})\dot{x} = 0$$

тәнлијинин

$$\dot{x} + c_1 t x^2 = 0$$

шәклиндә биринчи интегралы вар. Ону һәлл етмәклә алынан

$$c_1 x t^2 + c_2 x - 2 = 0$$

мүнасибәти бахылан тәнлијин үмуми интегралы олар.

§ 4. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ НАТАМАМ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ТӘРТИБИ АЗАЛДЫЛАБИЛӘН ТӘНЛИКЛӘР

Верилмиш n тәртибли

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2')$$

тәнлијиндә $t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}$ аргументләриндән һеч олмаса бири ашкар иштирак етмәјән тәнлијә *јүксәк тәртиб натамам тәнлик* дејилир. Ашағыда бә'зи јүксәк тәртиб натамам тәнликләрин интегралланмасы үсуллары верилир. Бундан әлавә бу параграфда тәртиби азалдыла билән бә'зи јүксәк тәртибли диференсиал тәнликләр өјрәнилир.

а) *Ахтарылан функсија вә онун мүәјјән тәртибә гәдәр төрәмәләри иштирак етмәјән тәнликләр.* Белә тәнликләр

$$F\left(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0 \quad (k \geq 1) \qquad (45)$$

шәклиндә олан тәнликләрдир.

Әввәлҹә (45) тәнлијинин хүсуси һалы олан

$$F\left(t, x^{(n)}\right) = 0 \qquad (46)$$

тәнлијинин һәлл үсулларыны верәк.

1). Тутаг ки, (46) тәнлији $x^{(n)}$-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x^{(n)} = f(t). \qquad (47)$$

Фәрз едәк ки, $f(t)$ функсијасы мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәздир. Тәнлији

$$dx^{(n-1)} = f(t)\,dt$$

шәклиндә јазыб, t_0-дан t-јә гәдәр интегралласаг, аларыг:

$$x^{(n-1)}(t) = \int_{t_0}^{t} f(t_1)\,dt_1 + c_1, \quad t_0 \in (\alpha, \beta).$$

Алынан тәнлији

$$dx^{(n-2)} = \left(\int_{t_0}^{t} f(t_1)\,dt_1 + c_1\right) dt$$

шәклиндә јазараг јенә дә t_0-дан t-јә гәдәр интегралласаг:

$$x^{(n-2)}(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} f(t_2)\,dt_2 + c_1(t - t_0) + c_2.$$

Бу гајда илә интеграллама әмәлини $n-2$ дәфә тәкрар етмәклә

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n + c_1 \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + c_{n-1}(t - t_0) + c_n. \qquad (48)$$

Бурада $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләрдир, t_0 исә (α, β) интервалындан ихтијари нөгтәдир.

Көстәрәк ки, (48) аиләси (47) тәнлијинин

$$D = \{\alpha < t < \beta; -\infty < x < +\infty; \ldots; -\infty < x^{(n-1)} < +\infty\}$$

областында үмуми һәллини верир.

Доғрудан да, D областындан көтүрүлмүш ихтијари $(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$ нөгтәси үчүн (48) аиләсиндән (47) тәнлијинин

$$x(t_0) = x_0, \; \dot{x}(t_0) = x_0^1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини јеканә гајда илә

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n + x_0^{n-1} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + x_0^1(t - t_0) + x_0 \qquad (49)$$

шәклиндә гурмаг олар. Хүсуси һалда, $x_0 = x_0^1 = \cdots = x_0^{n-1} = 0$ олдугда

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n$$

һәлли алынар вә бу һәлл

$$x(t_0) = 0,\ \dot{x}(t_0) = 0, \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = 0 \tag{50}$$

башланғыч шәртләрини өдәјир.
Билаваситә јохламагла көстәрмәк олар ки,

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)\, ds$$

функсијасы да (47) тәнлијинин (50) башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Һәллин јеканәлијинә әсасән алырыг ки, $\tilde{x}(t) = y(t)$, јә'ни

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)\, ds \tag{51}$$

дүстуру доғрудур. Бу *дүстура Коши дүстуру* дејилир.

2). Тутаг ки, (46) тәнлијини

$$t = \varphi(\tau),\ x^{(n)} = \psi(\tau),\ \tau \in (\tau_1, \tau_2) \tag{52}$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр, јә'ни

$$F(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0,\ \tau \in (\tau_1, \tau_2).$$

Дикәр тәрәфдән, $dx^{(n-1)} = x^{(n)} dt$ олдуғундан, (52) мүнасибәтләринә әсасән $dx^{(n-1)} = \psi(\tau)\varphi'(\tau) d\tau$. Бурадан, интеграллсмагла

$$x^{(n-1)} = \int \psi(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau + c_1 = \psi_1(\tau, c_1)$$

мүнасибәтини алырыг. Бу гајданы

$$t = \varphi(\tau),\ x^{(n-1)} = \psi_1(\tau, c_1)$$

мүнасибәтләринә тәтбиг етмәклә, нәтиҹәдә (46) тәнлијинин

$$t = \varphi(\tau),\ x = \psi_n(\tau, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

параметрик шәклиндә үмуми һәллини гура биләрик.

Ајдындыр ки, (46) тәнлији t-јә нәзәрән һәлл олунан һал, $x^{(n)} = \tau$ гәбул етмәклә, бу һала кәтирилир.

Ајдындыр ки, (45) тәнлијиндә $x^{(n)} = y$ әвәзләмәси апарсаг, $n-k$ тәртибли

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n-k)}) = 0$$

тәнлијини аларыг. Тутаг ки, алынмыш тәнлијин үмуми интегралы мә'лумдур:

$$\Phi(t, y, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = 0.$$

Бурада $y = x^{(k)}$ јазсаг, k тәртибли

$$\Phi(t, x^{(k)}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = 0$$

тәнлији алынар ки, бу да (46) шәклиндә олан тәнликдир.

Мисал 1.

$$t\dddot{x} + \ddot{x} - t\sqrt{\ddot{x}} = 0$$

тәнлијиндә $y = \ddot{x}$ әвәзләмәси апарсаг,

$$t\dot{y} + y - t\sqrt{y} = 0$$

Бернулли тәнлијини аларыг.

$$y = \frac{1}{t}\left(c_1 + \frac{1}{3} t^{3/2}\right)^2$$

бу тәнлијин үмуми һәлли, $y = 0$ мәхсуси һәллидир. Онда

$$x = c_1^2 t(\ln|t| - 1) + \frac{8c_1}{45} t^{5/2} + \frac{1}{108} t^4 + c_2 t + c_3$$

бахылан тәнлијин үмуми һәлли,

$$x = c_1 t + c_2$$

исә мәхсуси һәлли олар.

Мисал 2.

$$t^2 - \ddot{x}^2 = 1$$

тәнлијини

$$t = \operatorname{ch}\tau,\quad \ddot{x} = \operatorname{sh}\tau$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк олар.

Бурадан, $d\dot{x} = \ddot{x}dt$ мүнасибәтинә әсасән

$$t = \operatorname{ch}\tau,\quad \dot{x} = \frac{1}{4}\operatorname{sh}2\tau - \frac{1}{2}\tau + c_1.$$

$dx = \dot{x}\,dt$ олдуғундан, интеграллсмагла бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$t = \operatorname{ch}\tau,\quad x = \frac{1}{24}\operatorname{sh}3\tau + \frac{3}{8}\operatorname{sh}\tau - \frac{1}{2}\tau\operatorname{ch}\tau + c_1\operatorname{ch}\tau + c_2$$

шәклиндә гура биләрик.

б) Сәрбәст дәјишән ашкар шәкилдә дахил олмајан тәнликләр. Тутаг ки, сәрбәст дәјишән ашкар иштирак етмәјән

$$F(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{53}$$

тәнлији верилмишдир. Көстәрәк ки, бу тәнлијин тәртибини бир ваһид азалтмаг олар. Бунун үчүн тәнликдә $\dot{x} = p$ әвәз-

ләмәси апараraг, x-ә сәрбәст дәјишән, p-јә исә онун функсијасы кими бахаг. Бу заман:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = p\frac{dp}{dx},$$

$$\dddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = p\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dx^2}\right]$$

вә үмумијјәтлә,

$$x^{(k)} = p\,\omega_k\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{k-1}p}{dx^{k-1}}\right), \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Бурада ω_k мә'лум функсијадыр. Бу гијмәтләри (53) тәнлијиндә јазсаг, $n-1$ тәртибли

$$F_1\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

тәнлијини аларыг. Алынмыш тәнлијин үмуми интегралы

$$\Phi(x, p, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) = 0$$

оларса, (53) тәнлијинин үмуми интегралынын тапылмасы мәсәләси, бир тәртибли

$$\Phi(x, \dot{x}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) = 0$$

тәнлијинин үмуми интегралынын тапылмасы мәсәләсинә кәтириләр. Ајдындыр ки, $m_k (k = 1, 2, \ldots)$ әдәдләри

$$F(m, 0, 0, \ldots, 0) = 0 \tag{54}$$

тәнлијинин көкләри исә, $x = m_k (k = 1, 2, \ldots)$ функсијалары (53) тәнлијинин һәлләридир.

(53) тәнлијинин ики хүсуси һалына бахаг.

1). $F(x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0$ тәнлији. Бу тәнликдә $x^{(n-1)} = y$ әвәзләмәси апарсаг, бир тәртибли

$$F(y, \dot{y}) = 0$$

тәнлијини аларыг. Алынан тәнлији 3-чү фәсилдә верилән үсулларла арашдырмаг олар. Әкәр

$$\Phi(t, y, c_1) = 0$$

бу тәнлијин үмуми интегралы оларса, $y = x^{(n-1)}$ олдуғуну нәзәрә алмагла, $n-1$ тәртибли (46) шәкилли

$$\Phi(t, x^{(n-1)}, c_1) = 0$$

тәнлијини аларыг.

2). $F(x^{(n-2)}, x^{(n)}) = 0$ тәнлији. Бу тәнликдә $x^{(n-2)} = y$ әвәзләмәси апарсаг, ики тәртибли

$$F(y, \ddot{y}) = 0 \tag{55}$$

тәнлијини аларыг.

Тутаг ки, (55) тәнлији $\ddot{y}$-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\ddot{y} = f(y).$$

Онун һәр тәрәфини $2\dot{y}$-ә вурмагла

$$d(\dot{y}^2) = 2f(y)\,dy$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан да төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш

$$\dot{y}^2 = 2\int f(y)\,dy + c_1$$

тәнлији алынар. Бу тәнлијин үмуми интегралы

$$\Phi(t, y, c_1, c_2) = 0$$

шәклиндә тапыларса, $y = x^{(n-2)}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (46) шәкилли

$$\Phi(t, x^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0$$

тәнлији алынар.

Тутаг ки, $F(x^{(n-2)}, x^{(n)}) = 0$ тәнлијини $x^{(n-2)} = \varphi(\tau)$, $x^{(n)} = \psi(\tau)$ параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр. Онда

$$dx^{(n-2)} = x^{(n-1)}dt, \quad dx^{(n-1)} = x^{(n)}dt$$

мүнасибәтләриндән dt-ни јох етмәклә

$$x^{(n-1)}dx^{(n-1)} = \psi(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau$$

мүнасибәтини аларыг. Бурадан

$$x^{(n-1)} = \sqrt{2\int\psi(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau + c_1} \equiv \psi_1(\tau, c_1)$$

шәклиндә тә'јин едирик. Беләликлә, параметрик шәкилдә верилмиш

$$x^{(n-2)} = \varphi(\tau), \quad x^{(n-1)} = \psi_1(\tau, c_1)$$

тәнлијини аларыг.

$dx^{(n-2)} = x^{(n-1)}dt$ мүнасибәтинә әсасән

$$dt = \frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{\psi_1(\tau, c_1)}.$$

Бурадан,

$$t = \int\frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{\psi_1(\tau, c_1)} + c_2 = \varphi_1(\tau, c_1, c_2).$$

Беләликлә, $F(x^{(n-2)}, x^{(n)}) = 0$ тәнлијинин интегралланмасы, параметрик шәкилдә верилмиш

$$t = \varphi_1(\tau, c_1, c_2), \quad x^{(n-2)} = \varphi(\tau)$$

тәнлијинин интегралланмасына кәтирилир.

Мисал 3.

$$x^4 - x^3\ddot{x} = 1$$

тәнлиjи (53) шәкилли тәнликдир.

Тәнликдә $\dot{x} = p$ әвәзләмәси апармагла ону дәjишәнләринә аjрылан

$$x^3 p\frac{dp}{dx} = x^4 - 1$$

тәнлиjинә кәтирмәк олар вә бурадан

$$p = \pm\frac{\sqrt{x^4 + 2c_1x^2 + 1}}{x}.$$

Дикәр тәрәфдән, $p = \frac{dx}{dt}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, ахырынчы тәнлиjи

$$\frac{x\,dx}{\pm\sqrt{x^4 + 2c_1x^2 + 1}} = dt$$

шәклиндә jаза биләрик. Бурадан да, бахылан тәнлиjин үмуми интегралыны тапарыг:

$$x^2 + c_1 \pm \sqrt{x^4 + 2c_1x^2 + 1} = c_2e^{2t}.$$

Мисала уjғун олан (54) тәнлиjинин $m = \pm 1$ һәгиги көкләри вар вә демәли, $x = \pm 1$ функсиjалары да бахылан тәнлиjин һәлләридир, лакин бу һәлләри үмуми интегралдан $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ көтүрмәклә алмаг олар.

Мисал 4. $\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2 = 1$ тәнлиjини

$$\ddot{x} = \mathrm{sh}\,\tau, \quad \dddot{x} = \mathrm{ch}\,\tau$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк олар.

Бурадан $d\ddot{x} = \dddot{x}\,dt$ олдуғундан алырыг ки, $dt = d\tau$, jә'ни $\tau = t + c_1$. Демәли,

$$\ddot{x} = \mathrm{sh}\,(t + c_1).$$

Бу тәнлиjи һәлл етмәклә алынан

$$x = \mathrm{sh}\,(t + c_1) + c_2t + c_3$$

ифадәси бахылан тәнлиjин үмуми һәлли олар.

Мисал 5.

$$2\ddot{x} = 3x^2$$

тәнлиjинин $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ башланғыч шәртләрини өдәjән һәллини тапмалы.

Һәлли. Тәнлиjин һәр тәрәфини $\dot{x}$-э вурсаг.

$$2\dot{x}\ddot{x} = 3\dot{x}x^2 \text{ вә jа } d\left(\dot{x}^2\right) = 3x^2dx$$

тәнлиjини аларыг. Бурадан

$$\dot{x}^2 = x^3 + c_1.$$

Башланғыч шәртләрини нәзәрә алсаг, $(c_1 = 0)$

$$\dot{x}^2 = x^3$$

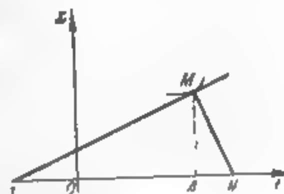
тәнлиjини аларыг. Алынан тәнлиjи $x(0) = 1$ шәртини нәзәрә алмагла һәлл едәрәк, бахылан тәнлиjин

$$x(t - 2)^2 = 4$$

интегралларыны тапарыг.

Мисал 6. Һәр бир нөгтәсиндә әjрилик радиусу, нормалын бу нөгтә илә абсис оху арасындакы парчасынын узунлуғуна бәрабәр олан әjрини тапын.

Һәлли. Ахтарылан $x = x(t)$ әjриси үзәриндә ихтиjари $M\,(t, x)$ нөгтәси көтүрәк. Бу нөгтәдә әjриjә MT тохунаныны вә MN нормалыны чәкәк (шәкил 13). Тохунаны Ot оху илә әмәлә кәтирдиjи буҹағы α илә ишарә етсәк, AMN дүзбуҹаглы үчбуҹағындан аjдындыр ки,



Шәкил 13.

$$MN = \frac{AM}{\cos\alpha} = x\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Төрәмәнин һәндәси мә'насына әсасән бурадан алырыг ки,

$$|MN| = |x|\sqrt{1 + \dot{x}^2}.$$

Диференсиал һәндәсәдән мә'лумдур ки, $x = x(t)$ шәклиндә верилмиш әjринин әjрилик радиусу $R = (1 + \dot{x}^2)^{3/2} : |\ddot{x}|$ дүстуру илә һесабланыр. Мәсәләнин шәртинә әсасән

$$(1 + \dot{x}^2)^{3/2} : |\ddot{x}| = |x|\sqrt{1 + \dot{x}^2}$$

олар вә бурадан

$$x\ddot{x} = 1 + \dot{x}^2, \quad -x\ddot{x} = 1 + \dot{x}^2$$

тәнликләри алыныр. Аjдындыр ки, бу тәнликләрдә сәрбәст дәjишән ашкар иштирак етмир. Бу тәнликләрдән биринчисини һәлл едәк. Бунун үчүн $\dot{x} = p$ әвәзләмәси апараг. Онда $\ddot{x} = p\frac{dp}{dx}$ вә тәнлик

$$xp\frac{dp}{dx} = 1 + p^2$$

дәјишәнләринә ајрылан тәнлијинә кәтирилир. Ону интеграллајыб $p = \dot x$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\dot x = \pm\sqrt{(c_1 x)^2 - 1}$$

биртәртибли тәнликләрини аларыг. Бурадан да интегралламагла үмуми интегралы алмыш оларыг:

$$2c_1c_2\, x\, e^{c_1 t} = 1 + c_2 e^{2c_1 t}.$$

Охшар гајда илә икинчи тәнлији дә һәлл етсәк

$$c_1^2(x^2 + t^2) + 2c_1c_2 t + c_2^2 = 1$$

үмуми интегралыны тә'јин едә биләрик.

в) *Ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс олан тәнликләр.* Тутаг ки, $F(t, x, \dot x, \dots, x^{(n)})$ функсијасы $x, \dot x, \dots, x^{(n)}$ дәјишәнләринә нәзәрән бирчинс функсијадыр, ја'ни истәнилән z вә мүәјјән m әдәди үчүн

$$F(t, zx, z\dot x, \dots, zx^{(n)}) = z^m F(t, x, \dot x, \dots, x^{(n)}) \qquad (56)$$

ејнилији өдәнир. Онда

$$F(t, x, \dot x, \dots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

тәнлији *ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс тәнлик* адланыр. Тәнликдә $\dot x = xy$ әвәзләмәси апараг, бурада y јени ахтарылан функсијадыр. Онда

$$\ddot x = \dot x y + x\dot y = x(y^2 + \dot y),$$

$$\dddot x = \dot x(y^2 + \dot y) + x(2y\dot y + \ddot y) = x(y^3 + 3y\dot y + \ddot y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x^{(n)} = x\,\omega_n(y, \dot y, \dots, y^{(n-1)}).$$

Бу гијмәтләри (2′) тәнлијиндә јазыб (56) ејнилијини нәзәрә алсаг,

$$x^m F(t, 1, y, \dots, \omega_n(y, \dot y, \dots, y^{(n-1)})) = 0$$

тәнлијини вә ја ($x \neq 0$ гәбул едәрәк)

$$F_1(t, y, \dot y, \dots, y^{(n-1)}) = 0 \qquad (57)$$

тәнлијини аларыг. Тутаг ки,

$$y = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

бу тәнлијин үмуми һәллидир. Әвәзләмәјә әсасән

$$\frac{\dot x}{x} = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

тәнлији алыныр вә бурадан (2′) тәнлијинин

$$x = c_n \exp\left(\int \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})\, dt\right) \qquad (58)$$

шәклиндә үмуми һәллини аларыг.

Гејд едәк ки, (57) тәнлијини аләркән $x = 0$ һәлли итә биләрди, лакин һәмин һәлл (58) үмуми һәллиндән $c_n = 0$ көтүрмәклә алыныр.

Мисал 7. $x\dot x\ddot x - tx^3 - \dot x^3 = 0$ тәнлијинин $x(0) = 1, \dot x(0) = 1$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини тапаг.

Һәлли. Ајдындыр ки, тәнлик $x, \dot x, \ddot x$-ә нәзәрән бирчинс тәнликдир. $\dot x = xy$ әвәзләмәси апарсаг, y-ә нәзәрән

$$y\,dy - t\,dt = 0$$

тәнлијини аларыг. Онун үмуми интегралы $y^2 - t^2 = c_1$. Беләликлә,

$$\frac{\dot x}{x} = \pm\sqrt{c_1 + t^2}$$

тәнлији алынар.

Башланғыч шәртләри нәзәрә алсаг, бурадан

$$\frac{dx}{x} = \pm\sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

Бу тәнлији $x(0) = 1$ шәртини нәзәрә алараг интеграллаласаг

$$x^2 = (t + \sqrt{1 + t^2})\, e^{t\sqrt{1+t^2}}$$

бахылан тәнлијин верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәлләри олар.

г) *Үмумиләшмиш бирчинс тәнликләр.* Истәнилән z вә мүәјјән κ, m әдәдләри үчүн

$$F(zt, z^\kappa x, z^{\kappa-1}\dot x, \dots, z^{\kappa-n}x^{(n)}) = z^m F(t, x, \dot x, \dots, x^{(n)}) \qquad (59)$$

ејнилији өдәнәрсә,

$$F(t, x, \dot x, \dots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2')$$

тәнлијинә үмумиләшмиш бирчинс тәнлик дејилир.

Белә тәнлијин тәртибини азалтмаг үчүн

$$t = e^\tau, \quad x = ye^{\kappa\tau}$$

әвәзләмәси апараг; бурада τ јени сәрбәст дәјишән, y исә јени ахтарылан функсијадыр. Бу әвәзләмәдән x-ин t-јә нәзәрән төрәмәләрини y-ин өзү вә τ сәрбәст дәјишәнинә нәзәрән төрәмәләри илә ифадә едәк:

$$\dot x = \frac{dx}{dt} = \frac{\kappa e^{\kappa\tau} y\,d\tau + e^{\kappa\tau} dy}{e^\tau d\tau} = e^{(\kappa-1)\tau}\left(\frac{dy}{d\tau} + \kappa y\right),$$

$$\ddot x = \frac{d\dot x}{dt} = \frac{d\dot x}{d\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = e^{-\tau}\,\frac{d}{d\tau}\left[e^{(\kappa-1)\tau}\left(\frac{dy}{d\tau} + \kappa y\right)\right] =$$

$$= e^{(\kappa-2)\tau}\left[\frac{d^2y}{d\tau^2} + (2\kappa - 1)\frac{dy}{d\tau} + \kappa(\kappa - 1)y\right], \dots$$

$$x^{(n)} = e^{(k-n)\tau}\omega_n\left(y, \frac{dy}{d\tau}, \ldots, \frac{d^n y}{d\tau^n}\right).$$

Бу гијмәтләри (2′) тәнлијиндә јазараг (59) шәртини нәзәрә алсаг,

$$F\left(1, y, \frac{dy}{d\tau}+ky, \ldots, \omega_n\left(y, \frac{dy}{d\tau}, \ldots, \frac{d^n y}{d\tau^n}\right)\right) = 0$$

тәнлијини аларыг. Алынмыш тәнлијә τ сәрбәст дәјишәни ашкар шәкилдә дахил дејилдир вә демәли, о, (53) шәкилли тәнликдир.

Мисал 8.

$$t^4\ddot{x} + (t\dot{x} - x)^3 = 0$$

тәнлијинин үмумиләшмиш бирчинс тәнлик олдуғуну јохлајаг вә ону һәлл едәк. Бунун үчүн $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = t^4\ddot{x} + (t\dot{x} - x)^3$ функсијасында $t, x, \dot{x}, \ddot{x}$ дәјишәнләрини ујғун олараг zt, $z^k x$, $z^{k-1}\dot{x}$, $z^{k-2}\ddot{x}$ илә әвәз едәк. Онда

$$F(zt, z^k x, z^{k-1}\dot{x}, z^{k-2}\ddot{x}) = z^{k+2}t^4\ddot{x} + z^{3k}(t\dot{x} - x)^3.$$

Бурадан ајдындыр ки, $k + 2 = 3k$, јә'ни $k = 1$ оларса, тәнлик үмумиләшмиш бирчинс тәнлик олар. Демәли, тәнликдә $t = e^\tau$, $x = ye^\tau$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр. Онда

$$\dot{x} = \frac{dy}{d\tau} + y, \quad \ddot{x} = \left(\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau}\right)e^{-\tau}.$$

Бу гијмәтләри тәнликдә јеринә јазсаг, садә чевирмәләрдән сонра

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^3 = 0$$

тәнлији алыныр. Алынмыш тәнлијә τ сәрбәст дәјишәни ашкар дахил олмадығындан $\frac{dy}{d\tau} = p$ әвәзләмәси едәк вә p-јә y-ин функсијасы кими бахаг. Онда $\frac{d^2y}{d\tau^2} = p\frac{dp}{dy}$ вә p-јә нәзәрән

$$p\frac{dp}{dy} + p + p^3 = 0$$

тәнлији алынар. Бурадан

$$\frac{dp}{dy} + (1 + p^2) = 0, \quad p = 0$$

тәнликләри алыныр. Биринчи тәнлијин үмуми һәлли

$$p = \mathrm{tg}(c_1 - y)$$

шәклиндәдир. Әвәзләмәјә әсасән бурадан

$$\frac{dy}{d\tau} = \mathrm{tg}(c_1 - y)$$

тәнлијини аларыг вә ону интегралламагла бахылан тәнлијин үмуми интегралыны тапырыг

$$t\sin\left(\frac{x}{t} - c_1\right) = c_2.$$

Ајдындыр ки, $p = 0$ тәнлијиндән $y = c$ олар вә демәли, $x = ct$ бахылан тәнлијин һәлли олар. Лакин бу һәлл үмуми һәллдән $c_2 = 0$ көтүрмәклә алыныр.

г) *Сол тәрәфи там диференсиал олан тәнликләр.* Һәр һансы $\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ функсијасынын t-јә нәзәрән там диференсиалы, јә'ни x-и t-нин функсијасы көтүрмәклә һесабланмыш төрәмәси $F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)})$ функсијасына бәрабәр оларса,

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2')$$

тәнлијинә сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлик дејилир.

Мә'лумдур ки, $\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ функсијасынын там диференсиалы

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\ddot{x} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x^{(n-1)}}x^{(n)}$$

дүстуру илә һесабланыр. Одур ки, (2′) тәнлији сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлик исә

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\ddot{x} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x^{(n-1)}}x^{(n)}$$

олар вә бу һалда, (2′) тәнлијини

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан исә $n - 1$ тәртибли

$$\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = c_1$$

тәнлији алынар.

Демәли, сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлијин бир биринчи интегралы һәмишә тапыла биләр.

Мисал 9.

$$\ddot{x} - t\dot{x} - x - 1 = 0$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлик үчүн

$$\ddot{x} - t\dot{x} - x - 1 = \frac{d}{dt}(\dot{x} - tx - t)$$

олдуғундан, бахылан тәнлијин биринчи интегралы

$$\dot{x} - tx - t = c_1$$

шәклиндә олар. Алынмыш тәнлик бир тәртибли хәтти тәнликдир. Ону һәлл етсәк, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$x = e^{\frac{t^2}{2}}\left(c_2 + c_1\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) - 1.$$

§ 5. НОРМАЛ СИСТЕМИН ҺӘЛЛИНИН ВАРЛЫҒЫ

Төрәмәјә көрә һәлл олунмуш биртәртибли диференсиал тәнлијин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында II фәсилдә исбат олунан теоремләрин чохуну нормал систем үчүн дә вермәк олур вә бу теоремләр аналожи үсул илә исбат олунурлар. Она көрә дә нормал системин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында бә'зи теоремларин гыса исбатыны вермәклә кифајәтләнәҹәјик.

Бу параграфда

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{60}$$

Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы һаггында ашағыдакы теорем исбат олунур.

Теорем 2 *(Пеано). Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары мәркәзи $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә олан $n+1$ өлчүлү, гапалы*

$$R = [t_0 - a \leqslant t < t_0 + a;\ x_i^0 - b \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + b;\ i = 1, 2, \ldots, n]$$

паралелепипединдә кәсилмәздирләр. Онда (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар; бурада

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \ M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\max_{R} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|\right\}.$$

Исбаты. Бир тәнлик үчүн верилмиш исбат гајдасы илә (бах: II фәсил, § 3) көстәрмәк олар ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан һәллинин варлығы мәсәләси

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(s, x_1(s), \ldots, x_n(s))ds, \quad i = 1, \ldots, n \tag{61}$$

интеграл тәнликләр системинин һәмин парчада кәсилмәз һәллинин варлығына еквивалентдир.

Садәлик үчүн $t_0 = 0$ көтүрәк вә (61) интеграл тәнликләр системинин $[0, \alpha]$ парчасында кәсилмәз һәллинин варлығыны көстәрәк.

Ихтијари $0 < h \leqslant \alpha$ әдәди көтүрүб

$$h_1 = \frac{h}{2}, \quad h_2 = \frac{h}{2^2}, \ldots, h_m = \frac{h}{2^m}, \ldots$$

ардычыллығыны дүзәлдәк. Һәр бир m нөмрәси үчүн, сыфырдан башлајараг, $[0, \alpha]$ парчасыны узунлуғу h_m-ә бәрабәр олан һиссәләрә бөләк вә бу бөлкүјә ујғун

$$x_i^m(0) = x_i^0,$$

$$x_i^m(t) = x_i^m(rh_m) + f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m))\,(t - rh_m),$$

$$t \in (rh_m, (r+1)h_m],\ r = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\alpha}{h_m}\right];\ i = 1, 2, \ldots, n; \tag{62}$$

$$m = 1, 2, \ldots$$

функсијаларыны дүзәлдәк. Бурада $[z]$ илә z әдәдинин там һиссәси ишарә олунмушдур

Бу гајда илә $[0, \alpha]$ парчасында кәсилмәз олан

$$\{x_1^m(t)\}, \{x_2^m(t)\}, \ldots, \{x_n^m(t)\} \tag{63}$$

функсијалар ардычыллығыны гururуг. Бу ардычыллыгларын һәр биринин $[0, \alpha]$ парчасында Арсела теореминин шәртләрини өдәдијини бир тәнлик үчүн Пеано теореминин исбатындакы гајда илә көстәрмәк олар. Одур ки, (63) ардычыллыгларындан $[0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан алт ардычыллыглар сечмәк олар. Садәлик үчүн һәмин алт ардычыллыглары јенә $\{x_1^m(t)\}, \{x_2^m(t)\}, \ldots, \{x_n^m(t)\}$ илә ишарә едәк вә фәрз едәк ки, бу ардычыллыглар $[0, \alpha]$ парчасында $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијаларына мүнтәзәм јығылырлар. Көстәрәк ки, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијалары $[0, \alpha]$ парчасында (61) интеграл тәнликләр системинин һәллидир ($t_0 = 0$).

Хүсуси һалда, (62) дүстурларында $t = (r+1)h_m$ көтүрсәк,

$$x_i((r+1)h_m) = x_i^m(rh_m) + f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \ldots,$$

$$x_n^m(rh_m))h_m, \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{64}$$

бәрабәрликләрини аларыг.

Ихтијари $t \in (0, \alpha]$ көтүрәк. Онда $l_m = \left[\frac{t}{h_m}\right]$ үчүн $\lim\limits_{m\to\infty} l_m h_m = t$, $\lim\limits_{m\to\infty}(l_m + 1)h_m = t$ вә демәли,

$$\lim_{m\to\infty} x_i^m(l_m h_m) = \varphi_i(t), \quad \lim_{m\to\infty} x_i^m((l_m + 1)h_m) = \varphi_i(t),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

(64) бәрабәрликләриндә r әдәдинә $0, 1, \ldots, l_m$ гијмәтләри вериб, алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$x_i^m((l_m+1)h_m) = x_i^0 + \sum_{r=0}^{l_m} f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m))h_m,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n \quad (65)$$

бәрабәрликләрини аларыг. Бу бәрабәрликләри ашағыдакы шәкилдә јазаг:

$$x_i^m((l_m+1)h_m) = x_i^0 + \sum_{r=0}^{l_m} f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))h_m +$$
$$+ \sum_{r=0}^{l_m} [f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m)) -$$
$$- f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))] h_m.$$

Биринчи чәм $f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))$ функсијасынын $[0, t]$ парчасында интеграл чәминдән

$$-f_i(l_m h_m, \varphi_1(l_m h_m), \ldots, \varphi_n(l_m h_m))((l_m+1)h_m - t)$$

топлананы илә фәргләнир. Она көрә

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r=0}^{l_m} f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))h_m =$$
$$\int_0^t f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))\, ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Шәртә көрә $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијалары кәсилмәз олдуғундан вә (63) ардычыллыглары $[0, \alpha]$ парчасында $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots \varphi_n(t)$ функсијаларына мүнтәзәм јығылдығындан

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r=0}^{l_m} [f_i(rh_m), x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m)) -$$
$$- f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))] = 0.$$

Беләликлә, (65) бәрабәрликләриндә m сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\varphi_i(t) = x_i^0 + \int_0^t f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))]\, ds,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n \quad (61)$$

олар. Теорем исбат олунду

Нәтичә 1. *Теоремин шәртләри дахилиндә (7) системинин (6) шәртини өдәјән вә $[0, \alpha]$ парчасында тә'јин олунан*

һәлли јеканә исә, (62) дүстурлары илә тә'јин олунан (63) функсијалар ардычыллыгларынын өзләри һәллә мүнтәзәм јығылырлар.

Нәтичә 2. *Тутаг ки, $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы гапалы R паралелепипедindә кәсилмәздир. Онда*

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \quad (4')$$

тәнлијинин

$$x(t_0) = x_0, \ \dot{x}(t_0) = x_1^0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \quad (66)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар; бурада

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$
$$M = \max_R |f(t, x_1, \ldots, x_n)|.$$

§ 6. ЈЕКАНӘЛИК ТЕОРЕМЛӘРИ

Бу параграфда нормал системин һәллинин јеканәлији һаггында ики теорем исбат олунур. Бунлардан бири Осгуд теоремидир. Осгуд теореми исбат едиләркән ашағыдакы леммадан истифадә едилир.

Лемма. *Тутаг ки, $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларынын (a, b) интервалында сонлу төрәмәси вар. Онда $z(t) = \sum_{i=1}^{m} |z_i(t)|$ функсијасынын (a, b) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә $D_+z(t)$ сағ, $D_-z(t)$ сол төрәмәләри вар вә*

$$|D_\pm z(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\dot{z}_i(t)|. \quad (67)$$

Исбаты. $z_i(t)$ функсијасынын (a, b) интервалында сонлу төрәмәси олмасына бахмајараг $|z_i(t)|$ функсијасынын (a, b) интервалынын бә'зи нөгтәләриндә төрәмәси олмаја биләр. Көстәрәк ки, (a, b) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә $D_+|z_i(t)|$ сағ, $D_-|z_i(t)|$ сол төрәмәләри вар вә $|D_+|z_i(t)|| = |D_-|z_i(t)|| = |\dot{z}_i(t)|$. Бунун үчүн ашағыдакы мүмкүн олан һаллара бахаг.

а) t нөгтәсиндә $z_i(t) \neq 0$. Шәртә көрә $z_i(t)$ функсијасы (a, b) интервалында кәсилмәз олдуғундан, t нөгтәсинин елә әтрафы вар ки, бу әтрафда өз ишарәсини сахлајыр. Она көрә

$$|z_i(t)| = z_i(t) \operatorname{sgn} z_i(t)$$

функсијасындан төрәмә алсаг,

$$D|z_i(t)| = \dot{z}_i(t) \operatorname{sgn} z_i(t).$$

Бурада

$$\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, & u>0 \text{ оларса,}\\ 0, & u=0 \text{ оларса,}\\ -1, & u<0 \text{ оларса.}\end{cases}$$

б) t нөгтәси $z_i(t)$ функсиjасынын изолә олунмуш сыфрыдыр. Онда $z_i(t)=0$ вә кичик $|h|>0$ әдәди үчүн $z_i(t+h)\neq 0$ олдуғундан

$$D_+|z_i(t)| = \lim_{h\to0\,(h>0)} \frac{|z_i(t+h)-z_i(t)|}{h} = \lim_{h\to0\,(h<0)}\left|\frac{z_i(t+h)-z_i(t)}{h}\right| = |\dot z_i(t)|,$$

$$D_-|z_i(t)| = \lim_{h\to0\,(h<0)} \frac{|z_i(t+h)|-|z_i(t)|}{h} = -\lim_{h\to0\,(h<0)}\left|\frac{z_i(t+h)-z_i(t)}{h}\right| = |\dot z_i(t)|.$$

в) t нөгтәси $z_i(t)$ функсиjасынын изолә олунмаjан сыфрыдыр. Онда $z_i(t)=0$ вә t-jә jығылан елә $\{t_n\}$ ардычыллығы вардыр ки, $z_i(t_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$ Бу һалда $|z_i(t)|$ функсиjасынын төрәмәси

$$D|z_i(t)| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z_i(t_n)-z_i(t)|}{t_n-t} = 0.$$

Демәли, бүтүн һалларда $|D_\pm|z_i(t)|| = |\dot z_i(t)|$. Бурадан

$$|D_\pm z(t)| = \left|\sum_{i=1}^{n} D_\pm|z_i(t)|\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|D_\pm|z_i(t)|| = \sum_{i=1}^{n}|\dot z_i(t)|.$$

Лемма исбат олунду.

Теорем 3 (Осгуд). *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсиjалары D областынын ихтиjари ики $(t, x_1, \ldots, x_n)$ вә $(t, y_1, \ldots, y_n)$ нөгтәләри үчүн*

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \omega\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|\right),\ i=1, 2, \ldots, n \qquad (68)$$

бәрабәрсизликләрини өдәjирләр. Бурада $\omega(u)$ функсиjасы $(0, u_0]$, $(u_0>0)$ jарыминтервалында мүсбәтдир, кәсилмәздир вә

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{u_0}\frac{du}{\omega(u)} = +\infty \qquad (69)$$

шәртини өдәjир. Онда D областынын һәр бир $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсi үчүн (7) системинин (60) шәртләрини өдәjән ән чоху бир һәлли вар.

Исбаты. Тутаг ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәjән ики $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ вә $x_i=\psi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ мүхтәлиф һәлли вар. $z_i(t)=\varphi_i(t)-\psi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ ишарә едиб, $z(t)=\sum_{i=1}^{n}|z_i(t)|$ функсиjасыны дүзәлдәк. Фәрзиjјәмизә көрә $z(t_0)=0$ вә елә t_1 нөгтәси вар ки, $z(t_1)=z_1>0$.

Үмумилиjи позмадан $t_1>t_0$ гәбул етмәк олар. (Әкс һалда t әвәзинә $-t$ кәтүрмәклә буна наил олмаг олар.) Теоремин (68) шәртләринә әсасән

$$|\dot z_i(t)| = |\dot\varphi_i(t)-\dot\psi_i(t)| = |f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) - f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))| \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(t)-\psi_j(t)|\right) = \omega\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j(t)|\right).$$

Бурадан

$$\sum_{j=1}^{n}|\dot z_j(t)| \leqslant n\,\omega\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j(t)|\right)$$

бәрабәрсизлиjи алыныр. Леммадан алынан (67) бәрабәрсизлиjини бурада нәзәрә алсаг, $|D_\pm z(t)| \leqslant n\omega(z(t))$.

$z(t_1)=z_1>0$ олдуғундан ахырынчы бәрабәрсизлиjи күчләндириб

$$|D_\pm z(t)| < (n+1)\,\omega(z(t)) \qquad (70)$$

шәкилдә jазмаг олар.

Инди

$$\dot y = (n+1)\,\omega(y)$$

тәнлиjинин $y(t_1)=z_1$ шәртини өдәjән һәллинә бахаг. Теоремин (69) шәртинә әсасән бу мәсәләнин jеканә мүсбәт $y=y(t)$ һәлли вар вә һәллин графики асимптотик олараг Ot охунун мәнфи һиссәсинә jахынлашыр (бах: II фәсил, § 6).

Аjдындыр ки, $y(t)$ вә $z(t)$ функсиjаларынын графикләри (t_1, z_1) нөгтәсиндә кәсишир вә (70) бәрабәрсизлиjинә әсасән $t=t_1$ олдугда

$$|D_- z(t_1)| < (n+1)\,\omega(z(t_1)) = (n+1)\,\omega(y(t_1)) = \dot y(t_1).$$

Бурадан алыныр ки, кичик $\varepsilon>0$ әдәди үчүн

$$z(t) > y(t),\quad t\in(t_1-\varepsilon, t_1) \qquad (71)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир.

Көстәрәк ки, (71) бәрабәрсизлиjи бүтүн (t_0, t_1) интервалында өдәнир. Доғрудан да, әкс һалда елә $t_2\in(t_0, t_1)$ нөгтәси тапылар ки, бу нөгтәдә $z(t_2)=y(t_2)$ вә $D_+z(t_2)\geqslant\dot y(t_2)$ олар. Ахырынчы мүнасибәт, (70)-ә әсасән алынан

$$|D_+ z(t_2)| < (n+1)\,\omega(z(t_2)) = (n+1)\,\omega(y(t_2)) = \dot y(t_2)$$

бәрабәрсизлијинә зиддир. Демәли, $t \in (t_0, t_1)$ үчүн $z(t) > y(t)$ о ур. Бурадан, хүсуси һалда, $z(t_0) \geqslant y(t_0) > 0$ алыныр. Бу исә $z(t_0) = 0$ шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Нәтичә 1. *$f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары D областында кәсилмәздирләрсә вә Осгуд теореминин шәртләрини өдәјирләрсә, һәмин областын һәр бир нөгтәсиндән (7) системинин јеканә интеграл әјриси кечир.*

Һәллин варлығы Пеано теореминдән, јеканәлији исә Осгуд теореминдән алыныр.

Нәтичә 2. *Тутаг ки, $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы D областында тә'јин олунуб вә*

$$|f(t, x_1, \ldots, x_n) - f(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \omega\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)$$

шәртини өдәјир. Бурада $\omega(u)$ Осгуд теореминдәки шәртләри өдәјән функсијадыр. Онда $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ нөгтәси үчүн (4′) тәнлијинин (66) башланғыч шәртләрини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

Г е ј д. Осгуд теореминдәки $\omega(u)$ функсијасы олараг $\omega(u) = Ku$ $(K \geqslant 0)$ көтүрсәк, (68) шәрти

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклинә дүшүр. Бу һалда дејирләр ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ *функсијалары $x_1, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир.*

Көстәрмәк олар ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ функсијасынын D областында $x_1, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән мәһдуд хүсуси төрәмәләри варса вә област $x_1, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән габарыг исә, һәмин функсија D областында $x_1, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир.

Теорем 4. *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары $(n+1)$-өлчүлү, гапалы*

$$R = \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a;\ x_i^0 - b \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + b,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

паралелепипединдә кәсилмәздир вә бурада

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)|\,(t - t_0) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\{|x_j - y_j|\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{72}$$

бәрабәрсизликләрини өдәјир. Онда (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бурада $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$,

$$M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\max_{R} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|\right\}.$$

И с б а т ы. Һәллин варлығы Пеано теореминдән алыныр. Она көрә һәллин јеканәлијини исбат едәк. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан ики $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ вә $x_i = \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ мүхтәлиф һәлләри вар.

Ајдындыр ки,

$$F_i(t) = \frac{\varphi_i(t) - \psi_i(t)}{t - t_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

функсијалары $(t_0, t_0 + \alpha]$ јарыминтервалында кәсилмәздирләр. Дикәр тәрәфдән, $\varphi_i(t_0) = \psi_i(t_0) = x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олдуғундан, Лопитал гајдасыны тәтбиг етсәк,

$$\lim_{t \to t_0 + 0} F_i(t) = \lim_{t \to t_0 + 0} \frac{\varphi_i(t) - \psi_i(t)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0 + 0} \frac{\dot\varphi_i(t) - \dot\psi_i(t)}{1} =$$
$$= \lim_{t \to t_0 + 0} [f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) - f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))] =$$
$$= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Демәли, $F_i(t)$ функсијаларынын t_0 нөгтәсиндәки гијмәтини сыфра бәрабәр көтүрсәк, бу функсијалар $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында кәсилмәз олар.

Тутаг ки, $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha} |F_i(t)|\right\} = |F_{i_0}(t_1)|$. Онда $t_1 > t_0$ вә $|F_{i_0}(t_1)| > 0$. Дикәр тәрәфдән, (72) шәртинә əсасән алыныр ки,

$$m = |F_{i_0}(t_1)| = \frac{|\varphi_{i_0}(t_1) - \psi_{i_0}(t_1)|}{t_1 - t_0} =$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_0}\left|\int_{t_0}^{t_1} [f_{i_0}(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) - f_{i_0}(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\left\{\frac{|\varphi_j(t) - \psi_j(t)|}{t - t_0}\right\} dt = \tag{73}$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\{|F_j(t)|\}\,dt.$$

Һәр бир $t \in [t_0, t_1]$ нөгтәси үчүн

$$\Phi(t) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\{|F_j(t)|\}$$

10*

ишарә едәк. $F_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары $[t_0, t_1]$ парчасында кәсилмәз вә һамысы ејнилик кими сабит олмадығындан, $\Phi(t)$ бу парчада ејнилик кими сабит олмајан, кәсилмәз функсијадыр.

Јухарыда алынмыш (73) бәрабәрсизлијини

$$m \leqslant \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t)\, dt$$

шәклиндә јазыб, интеграла орта гијмәт теореминин тәтбиг етсәк,

$$m \leqslant \Phi(\bar{t}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ | F_i(t) | \} = |F_{\kappa_0}(\bar{t})|, \; t_0 < t < t_1, 1 \leqslant \kappa_0 \leqslant n.$$

m әдәдинин тә'јининә әсасән $|F_{\kappa_0}(\bar{t})| < |F_{i_0}(t_1)| = m$ олмалыдыр. Алынан зиддијјәт теоремин доғрулуғуну көстәрир.

§ 7. НОРМАЛ СИСТЕМ ҮЧҮН АРДЫЧЫЛ ЈАХЫНЛАШМА ҮСУЛУ

Бу параграфда (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында Пикар теореминин гыса исбаты верилир.

Теорем 5 (Пикар). *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ функсијалары мәркәзи $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә олан $(n+1)$-өлчүлү, гапалы $R = \{t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0 + a;\; x_i^0 - b \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + b, i = 1, 2, \ldots, n\}$ паралелепипединдә кәсилмәздир вә $x_1, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир:*

$$| f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n) | \leqslant \tag{74}$$
$$\leqslant K \sum_{j=1}^{n} | x_j - y_j |, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Онда (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар, бу һәлли ардычыл јахынлашмаларын лимити кими тапмаг олар. Бурада $\alpha = \min \left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{\max\limits_{R} | f_i(t, x_1, \ldots, x_n) | \right\}$.

Исбаты. Башланғыч јахынлашма олараг $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында кәсилмәз олан вә $|\varphi_i^0(t) - x_i^0| \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots, n$ шәртләрини өдәјән $x_i = \varphi_i^0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларыны көтүрүб,

$$\varphi_i^{m+1}(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i\left(s, \varphi_1^m(s), \ldots, \varphi_n^m(s)\right) ds, \tag{75$_m$}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad m = 0, 1, \ldots,$$

рекурент дүстурлары илә тә'јин олунан

$$\{\varphi_1^m(t)\}, \{\varphi_2^m(t)\}, \ldots, \{\varphi_n^m(t)\} \tag{*}$$

ардычыллыгларыны дүзәлдәк.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ үчүн

$$|\varphi_i^m(t) - x_i^0| \leqslant b, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

бәрабәрсизликләри өдәнир. Дикәр тәрәфдән, (75$_m$) дүстурларындан (74) Липшис шәртинә әсасән

$$|\varphi_i^{m+1}(t) - \varphi_i^m(t)| \leqslant K \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j^m(s) - \varphi_j^{m-1}(s)| ds \right|, \tag{76}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad m = 1, 2, \ldots$$

бәрабәрсизликләри алыныр. Бурадан, хүсуси һалда, $m = 1$ олдугда

$$|\varphi_i^2(t) - \varphi_i^1(t)| \leqslant K \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j^1(s) - \varphi_j^0(s)| ds \right|, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Дикәр тәрәфдән, $\varphi_i^0(t)$, $\varphi_i^1(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан елә $L > 0$ әдәди тапмаг олар ки, $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ үчүн

$$|\varphi_i^0(t)| \leqslant L, \quad |\varphi_i^1(t)| \leqslant L, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Демәли,

$$|\varphi_i^1(t) - \varphi_i^0(t)| \leqslant 2L, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

бәрабәрсизликләри өдәнир. Бу гијмәтләндирмәни јухарыдакы бәрабәрсизликдә јеринә јазсаг,

$$|\varphi_i^2(t) - \varphi_i^1(t)| \leqslant 2nLK|t - t_0|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

олар. Ријази индуксија үсулу илә

$$|\varphi_i^{m+1}(t) - \varphi_i^m(t)| \leqslant 2L(nK)^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n, \\ m = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

олдуғуну көстәрмәк олар. Бурадан, $|t - t_0| \leqslant \alpha$ олдуғундан, алырыг ки,

$$L + 2L + 2L\frac{nK\alpha}{1!} + 2L\frac{(nK\alpha)^2}{2!} + \cdots + 2L\frac{(nK\alpha)^m}{m!} + \cdots \tag{77}$$

әдәди сырасы

$$\varphi_i^0(t) + \left(\varphi_i^1(t) - \varphi_i^0(t)\right) + \left(\varphi_i^2(t) - \varphi_i^1(t)\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\varphi_i^{m+1}(t) - \varphi_i^m(t)\right) + \cdots, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{78}$$

функсионал сыралары үчүн мажорант сырадыр. Даламбер әламәтинә көрә (77) әдәди сырасы јығылыр. Онда Вејерштрас

әламәтинә әсасән алырыг ки, (78) функсионал сыралары $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылырлар. Демәли, (*) функсионал ардычыллыглары $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында мүәјјән кәсилмәз $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијаларына мүнтәзәм јығылырлар. Бир тәнлик үчүн ардычыл јахынлашма үсулундакы кими, көстәрмәк олар ки,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t} f_i(s, \varphi_1^m(s), \ldots, \varphi_n^m(s))\,ds = \int_{t_0}^{t} f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))\,ds, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Она көрә дә (75_m) бәрабәрликләриндә m сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\varphi_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))\,ds, \quad i=1, 2, \ldots, n. \quad (79)$$

Бурадан $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијаларынын (7) системин (60) шәртләрини өдәјән һәлли олдуғу алыныр.

Һәллин јеканәлијини исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан $x_i=\varphi_i(t), i=1, 2, \ldots, n$ һәллиндән башга $x_i=\psi_i(t), i=1, 2, \ldots, n$ һәлли дә вардыр. Онда $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында

$$\psi_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(s, \psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))\,ds, \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (80)$$

ејниликләри өдәнир.

Липшис шәртинә әсасән (79) вә (80) бәрабәрликләриндән алырыг ки,

$$|\varphi_i(t)-\psi_i(t)| \leqslant K\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(s)-\psi_j(s)|\,ds\right|, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Бурадан

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)-\psi_i(t)| \leqslant nK\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(s)-\psi_i(s)|\,ds\right|$$

бәрабәрсизлији алыныр. *Мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки,* $t\in[t_0, t_0+\alpha]$. Бу һалда бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк аларыг ки,

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)-\psi_i(t)| \leqslant 0, \quad t\in[t_0, t_0+\alpha].$$

Демәли, $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында $\varphi_i(t)\equiv\psi_i(t), i=1, 2, \ldots, n$. Ејни гајда илә $t\in[t_0-\alpha, t_0]$ үчүн $\varphi_i(t)\equiv\psi_i(t), i=1, 2, \ldots, n$ олдуғуну көстәрмәк олар. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, (9) хәтти диференсиал тәнликләр системиндә $a_{ij}(t)$, $i, j=1, 2, \ldots, n$ әмсаллары вә $f_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәздирләр. Онда истәнилән $t_0\in(\alpha, \beta)$ вә ихтијари $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ әдәдләри үчүн (9) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Хүсуси һалда, сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин истәнилән башланғыч шәрти өдәјән јеканә һәлли вар вә бу һәлл бүтүн һәгиги охда тә'јин олунмушдур.*

§ 8. ДАВАМЕТДИРИЛМӘЈӘН ҺӘЛЛ

Бу параграфда

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (7)$$

системинин һәлләринин давамы мәсәләси өјрәнилир. Бурада $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары $t, x_1, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән D областында тә'јин олунмушдур.

Тутаг ки,

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (81)$$

функсијалары (α, β) интервалында,

$$x_i = \psi_i(t), \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (82)$$

функсијалары исә $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалында вә ја (α, β) интервалыны өзүндә сахлајан (α, γ) $(\gamma>\beta)$ интервалында (7) системинин һәллидир. *Бу һәлләр (α, β) интервалында үст-үстә дүшдүкдә (82) һәллинә (81) һәллинин сағa давамы дејилир, (81) һәлли исә сағa даваметдирилән һәлл адланыр.*

Аналожи олараг сола даваметдирилән һәллә тә'риф вермәк олар. *Нә сағa, нә дә сола давам етдирилә билмәјән һәллә даваметдирилмәјән һәлл дејилир.*

Ајдындыр ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары D областында кәсилмәздирсә, бу областын һәр бир $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәси үчүн (7) системинин

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (60)$$

шәртләрини өдәјән һеч олмаса бир һәлли вар. Доғрудан да, елә $a>0$ вә $b>0$ әдәдләри тапмаг олар ки, мәркәзи $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә олан $(n+1)$-өлчүлү, гапалы

$$R=\{t_0-a\leqslant t\leqslant t_0+a;\ x_i^0-b\leqslant x_i\leqslant x_i^0+b,\ i=1, 2, \ldots, n\}$$

паралелепипеди тамамилә D областында јерләшсин. Онда Пеано теореминә әсасән, (7) системинин (6С) шәртләрини өдәјән вә мүәјјән $[\alpha_1, \beta_1]$ (бурада $\alpha_1 = t_0 - \alpha$, $\beta_1 = t_0 + \alpha$; $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max_{1 \le i \le n}\left\{\max_{R} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|\right\}$) парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли (белә һәлләр чох оларса, онлардан бирини) $x_i = \varphi_i^1(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ илә ишарә едәк вә онун сағә давам етдирилмәси мәсәләсини өјрәнәк. Бунун үчүн $x_i^1 = \varphi_i(\beta_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ишарә едиб (7) системинин $x_i(\beta_1) = x_i^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ шәртләрини өдәјән һәллинә бахаг. Пеано теореминә әсасән бу мәсәләнин мүәјјән $[\alpha_2, \beta_2]$ ($\alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$) парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли (әкәр белә һәлләр чох оларса, онлардан бирини) $x_i = \varphi_i^2(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ишарә едәк. Онда

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^1(t), & t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \varphi_i^2(t), & t \in (\beta_1, \beta_2], \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

функсијалары (7) системинин $[\alpha_1, \beta_2]$ парчасында һәлли олур. Демәли, бу һәлл $x_i = \varphi_i^1(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин давамыдыр. Гејд едәк ки, бу һәлли даваметдирилмәјән һәллә гәдәр давам етдирмәк олар (бах: II фәсил, § 4). Ајдындыр ки, Коши мәсәләсинин һәлли јеканә олмадыгда ејни бир һәллин мүхтәлиф давамлары ола биләр.

Теорем 6. *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары D областында кәсилмәздирләр вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, хүсуси төрәмәләри вар. Онда D областынын һәр бир $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәси үчүн (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән јеканә даваметдирилмәјән һәлли вар.*

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә D областынын һәр бир нөгтәсиндә (7) системи үчүн Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар. Доғрудан да, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары R-дә кәсилмәз олмагла бәрабәр, бурада $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирләр. Демәли, 5-чи теоремә әсасән (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә мүәјјән $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бу һәлли јухарыда көстәрилән гајда илә мүәјјән интервала гәдәр давам етдирмәк олар. Беләликлә, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән һәр бир һәллинин өзүнүн тә'јин олундуғу интервал вардыр.

Системин (60) шәртләрини өдәјән бүтүн мүмкүн олан һәлләринин тә'јин олундуғу интервалларын сол учларындан ибарәт чохлуғу R_1, сағ учларындан ибарәт чохлуғу исә R_2 илә

ишарә едәк. R_1 чохлуғунун дәгиг ашағы сәрһәдини a (хүсуси һалда, $a = -\infty$ ола биләр) илә, R_2 чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәдини исә b (хүсуси һалда, $b = +\infty$ ола биләр) илә ишарә едәк. Инди системин (60) шәртләрини өдәјән вә (a, b) интервалында тә'јин олунан

$$x_i = \Phi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{83}$$

һәллини гураг. Бунун үчүн (a, b) интервалынын ихтијари t^* нөгтәсиндә (83) функсијаларыны тә'јин етмәк лазымдыр.

Мүәјјәнлик үчүн $t_0 < t^*$ олдуғуну фәрз едәк. Гурмаја көрә b әдәди R_2 чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәди олдуғундан, системин (60) шәртләрини өдәјән вә t^* нөгтәсини өз дахилиндә сахлајан интервалда тә'јин олунан һәлли вар. Бу интервалда тә'јин олунан $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәлли үчүн $\Phi_i(t^*) = \varphi_i(t^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ көтүрәк. Көстәрәк ки, (83) функсијаларынын $t = t^*$ нөгтәсиндә гијмәтләринин белә көтүрүлмәси $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин сечилмәсиндән асылы олмур. Доғрудан да, системин (60) шәртләрини өдәјән вә t^* нөгтәсини өз дахилиндә сахлајан башга интервалда тә'јин олунан $x_i = \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллини көтүрсәк, һәллин јеканәлијинә әсасән $\psi_i(t^*) = \varphi_i(t^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олмалыдыр. Демәли, (83) функсијалары $t = t^*$ нөгтәсиндә биргијмәтли тә'јин олунур.

Бу гајда илә (83) функсијаларыны (a, b) интервалында тә'јин едәрик. Һәллин јеканәлијинә әсасән һәр бир $t^* \in (a, b)$ нөгтәсинин бу интервала дахил олан елә әтрафы вар ки, (83) функсијалары һәмин әтрафда системин (60) шәртләрини өдәјән һәлләринин бири илә үст-үстә дүшүр. Она көрә (83) функсијалары (a, b) интервалында системин (60) шәртләрини өдәјән һәлли олур. Тутаг ки, $x_i = \varphi_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары системин (60) шәртләрини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунан һәр һансы һәллидир. Онда $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_2$ вә демәли, $a \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant b$ олур. Бурадан һәллин јеканәлијинә әсасән, (α, β) интервалынын (a, b) интервалына дахил олмасы вә (83) һәлли илә $x_i = \varphi_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин (α, β) интервалында үст-үстә дүшмәси алыныр. Демәли, (83) һәлли $x_i = \varphi_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин давамыдыр. Нәһајәт, көстәрәк ки, (83) һәлли давам етдирилмәјәндир. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, (83) һәлли давам етдириләндир вә $x_i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәлли бу һәллин давамыдыр. Онда $x_i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин тә'јин олундуғу $(\bar{a}, \bar{b})$ интервалы (a, b) интервалыны дахилиндә сахлајыр вә $t \in (a, b)$ үчүн $\Phi_i(t) = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олур. Ајдындыр ки, $x_i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларына системин (60) шәртләрини өдәјән һәлли кими баха биләрик.

Она көрә $\bar{a} \in R_1$ вә $\tilde{b} \in R_2$ олур. Бурадан a вә b әдәдләринин тә'јининә әсасән алырыг ки, $a = \bar{a}$, $b = \tilde{b}$ олмалыдыр. Демәли, $x_i = \Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ вә $x^i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәлләри тамамилә үст-үстә дүшүр.

Беләликлә, (83) функсијалары системин (60) шәртләрини өдәјән вә даваметдирилмәјән јеканә һәлли олур.

Чалышмалар.

1. Исбат етмәли ки, $g(s)$ функсијасы $[0, +\infty)$ јарымохунда кәсилмәз олдугда

$$x_2^2 + 2\int_0^{x_1} g(s)\,ds = c_1$$

мүнасибәти

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) \end{cases}$$

системинин биринчи интегралыдыр.

2. Системин үмуми вә мәхсуси һәлләрини тапын:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1}{t} + \sqrt[3]{t^2 x_1}, \\ \dot{x}_2 = x_2 + \sqrt[3]{t x_1^2} - \dfrac{2}{3} t^2. \end{cases}$$

Чаваб: $x_1 = t\left(c_1 + \frac{2}{3} t\right)^{3/2}$, $x_2 = c_2 e^t - c_1(1 + t)$, $\quad x_1 = 0$, $x_2 = ce^t + \frac{2}{3}(t^2 + 2t + 2)$.

3. Ашағыдакы тәнликләр системинин үмуми интегралларыны тапын:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \dfrac{x_2}{t}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1}{t} + x_2. \end{cases}$ *Чаваб:* $t(x_1 - x_2)e^{-t} = c_1$, $\frac{1}{t}(x_1 + x_2)e^{-t} = c_2$.

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2. \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 + x_2 = c_1$, $(x_2 - x_1)e^{2(x_1+x_2)t} = c_2$.

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{t - x_2}{x_2 - x_1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1 - t}{x_2 - x_1}. \end{cases}$ *Чаваб:* $t + x_1 + x_2 = c_1$, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + c_1 t = c_2$.

г) $\dfrac{dx_1}{2x_1^2 + t^2} = \dfrac{dx_2}{2x_1x_2} = \dfrac{dt}{x_1 t}$. *Чаваб:* $\dfrac{x_1^2 + t^2}{t^4} = c_1$, $\dfrac{x_2}{t^2} = c_2$.

4. Ашағыдакы системләри јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирмәклә верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәлләрини тапын:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2^3}{x_1^2}. \end{cases}$ $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$. *Чаваб:* $x_1 = e^{4t}$, $x_2 = 2e^{4t}$.

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2}{t}(2x_1 - 1). \end{cases}$ $x_1(1) = 2$, $x_2(1) = 4$

Чаваб: $x_1 = \dfrac{2}{1 - 2\ln t}$, $x_2 = \dfrac{4}{t(1 - 2\ln t)^2}$.

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + t x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 6 \end{cases}$

системинин $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинә $x_1^1(t)$, $x_2^1(t)$, $x_1^2(t)$, $x_2^2(t)$ јахынлашмаларыны гурун.

6. $x + c_1 t + c_2 t x = 0$ аиләсинин диференсиал тәнлијини гурмалы:

Чаваб: $t x \ddot{x} - 2t\dot{x}^2 + 2x\dot{x} = 0$.

7. Тәртиби азалтмагла ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $\dddot{x} - 6t\sqrt[3]{\ddot{x}^2} = 0$. *Чаваб:* 1. $x = c_1 t + c_2$,

2. $x = \dfrac{t^8}{56} + \dfrac{c_1}{10} t^6 + \dfrac{c_1^2}{4} t^4 + \dfrac{c_1^3}{2} t^2 + c_2 t + c_3$.

б) $\ddot{x}^2 + \dddot{x}^2 - 1 = 0$. *Чаваб:* $x = \sin(\pm t + c_1) + c_2 t + c_3$

в) $t\dddot{x} - \ddot{x} + t\dot{x} - x = 0$. *Чаваб:* $x = c_1 t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$

г) $t^2 \ddot{x}^2 - 5t\dot{x}\ddot{x} + 6\dot{x}^2 = 0$. *Чаваб:* $x = c_1 t^4 + c_2$; $x = c_1 t^3 + c_2$.

8. Сәрбәст дәјишән ашкар дахил олмајан тәнликләри һәлл един:

а) $x\ddot{x} = x^2 - 4$. *Ҹаваб:* 1. $x = \pm 2t + c_1$. 2. $\ln\left(\sqrt{c_1}\,x + \sqrt{c_1 x^2 + 4}\right) = c_2 \pm \sqrt{c_1}\,t$, 3. $c_1 x = 2\sin(\pm c_1 t + c_2)$.

б) $\ddot{x} = x^3$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Ҹаваб:* $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - t}$.

9. Ашағыдакы бирҹинс вә үмумиләшмиш бирҹинс тәнликләри һәлл един:

а) $tx\ddot{x} - 2t\dot{x}^2 - x\dot{x} = 0$. *Ҹаваб:* $x(t^2 + c_1) = c_2$.

б) $t^2\ddot{x} + (t\dot{x} - x)^2 = 0$. *Ҹаваб:* $x = t\ln\left(1 - \frac{c_2}{t}\right) + c_1 t$.

10. Ашағыдакы там диференсиаллы тәнлијн һәлл един:

$x\dot{x} - x^2 + x^2(x + t\dot{x}) = 0$. *Ҹаваб:* $x\left(c_2 c_1^2 e^{c_1 t} - c_1 t - 1\right) = c_1^2$.

V ФӘСИЛ

ХӘТТИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР

а) *Хәтти систем анлајышы.* Бу фәсилдә нормал системин хүсуси һалы олан

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad (1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

хәтти системи өјрәнилир. Бела системин һәлләри бир чох хассәләрә маликдир. Бу хассәләрә әсасән системин үмуми һәллинин гурулушуну өјрәнмәк вә бә'зи хүсуси һалларда ону тапмаг мүмкүн олур. Үмуми һәллин гурулушуну билмәк исә өз нөвбәсиндә хәтти тәнликләр нәзәријјәсинин бир чох мәсәләләрини (һәллин дајаныглығы, рәгси вә с.) өјрәнмәкдә мүһүм рол ојнајыр.

Вектор вә матрис анлајышларындан истифадә олунмасы, хәтти диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин бир чох мәсәләләринин шәрһини садәләшдирмәјә имкан верир. Одур ки, әввәлҹә векторлар вә матрисләр нәзәријјәсинин бә'зи анлајышларыны верәк.

б) *Векторлар нәзәријјәсинин бә'зи анлајышлары.* Елементләри n сајда $x_1, x_2, \dots, x_n$ әдәдләриндән ибарәт олан бир сүтунлу

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрисинә *n-өлчүлү сүтун вектор,* бир *сәтирли* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *матрисинә n-өлчүлү сәтир вектор,* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *әдәдләринә исә x векторунун компонентләри* дејилир.

Истәнилән λ әдәди үчүн λx *һасили дедикдә компонентләри* $\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n$ *олан вектор баша дүшүлүр. Верилмиш x вә y векторларынын $x + y$ ҹәми, компонентләри* $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$ *олан вектора дејилир.*

Ики x вә y векторларынын скалјар һасили

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур.

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

*әдәдинә x векторунун узунлуғу вә ја нормасы дејилир**. *Бу нормаја, адәтән, Евклид нормасы* дејилир. Норма анлајышындан истифадә едәрәк x вә y векторлары арасындакы мәсафәни

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

дүстуру илә вермәк олар.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, истәнилән x, y векторлары вә λ әдәди үчүн $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (үчбуҹаг бәрабәрсизлији), $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ мүнасибәтләри доғрудур.

Тутаг ки, $\{x^m\}$ векторлар ардычыллығы вә a вектору үчүн

$$\lim_{m \to \infty} \|x^m - a\| = 0$$

мүнасибәти өдәнир. Онда дејирләр ки, $\{x^m\}$ векторлар ардычыл

* Бә'зән x векторун нормасы олараг $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ вә ја $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ көтүрүлүр.

ғыгы a векторуна јығылыр. $\sum_{k=1}^{\infty} x_{1k}, \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k}, \ldots \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ *әдәди сыралары үчүн оларағ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләринә јығылырларса, дејирләр ки,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} x_{1k} \\ \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \end{pmatrix}$$

векторлар сырасы, компонентләри $a_1, a_2, \ldots, a_n$ олан a векторуна јығылыр.

Мә'лумдур ки, n-өлчүлү векторлар чохлуғу n-өлчүлү хәтти фәза тәшкил едир вә бу фәзанын һәр бир векторуну n сајда хәтти асылы олмајан векторлар үзрә јеканә ғајда илә ајырмағ олар. Бу фәзаны R_n илә ишарә едәчәјик. Тутаг ки, $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ функсијалары (α, β) интервалында тә'јин олунмушлар. Компонентләри $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ олан $x(t)$ векторуна (α, β) интервалында тә'јин олунмуш *вектор-функсија* дејилир. Бу вектор-функсијанын *интегралы* $\int_\alpha^\beta x(t)dt$ дедикдә, *компонентләри* $\int_\alpha^\beta x_1(t)dt, \ldots, \int_\alpha^\beta x_n(t)dt$ *олан вектор*, $x(t)$ *төрәмәси дедикдә исә, компонентләри* $\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)$ *олан вектор баша дүшүлүр.* Көстәрәк ки

$$\left\| \int_\alpha^\beta x(t)dt \right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \| x(t) \| dt \quad (\alpha < \beta) \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бунун үчүн $\Delta = \frac{\beta - \alpha}{m}$ ишарә едиб, $[\alpha, \beta]$ парчасыны $t_0 = \alpha, t_1 = \alpha + \Delta, t_2 = \alpha + 2\Delta, \ldots, t_m = \alpha + m\Delta = \beta$ нөгтәләри илә узунлуглары Δ олан m сајда һиссәләрә бөләк.

Интегралын тә'рифинә көрә

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,dt = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x(t_k)\Delta$$

олдуғундан, үчбучаг бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\left\| \int_\alpha^\beta x(t)dt \right\| = \left\| \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x(t_k)\Delta \right\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \| x(t_k) \| \Delta = \int_\alpha^\beta \| x(t) \| dt.$$

Бу исә (2) бәрабәрсизлијинин доғрулуғуну көстәрир.

в) *Матрисләр нәзәријјәсинин елементләри.* Тутаг ки, n-тәртибли (вә ја $n \times n$ өлчүлү)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадрат матриси верилмишдир. Садәлик үчүн бу матриси $A = (a_{ij})$ илә ишарә едәк.

Ики $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *матрисләринин чәми* $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ *матрисинә, һасили исә* $AB \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$ *матрисинә* дејилир. Үмумијјәтлә, матрисләр үчүн $AB \neq BA$. Әкәр $AB = BA$ *оларса, A вә B матрисләринә коммутатив матрисләр* дејилир. Истәнилән λ әдәди үчүн λA *һасили дедикдә елементләри* λa_{ij} *олан* (λa_{ij}) *матриси баша дүшүлүр*

Верилән $A = (a_{ij})$ матрисинин баш диагонал елементләринин чәминә онун изи дејилир вә $\mathrm{Sp}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ишарә олунур.

Тәртиби n олан A квадрат матриси илә n-өлчүлү x сүтун векторунун һасили Ax, компонентләри $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j$ олан вектордур. Векторун Евклид нормасына үјғун оларағ $A = (a_{ij})$ матрисинин нормасы

$$\| A \| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|, \quad \| \lambda A \| = | \lambda | \, \| A \|,$$
$$\| AB \| \leqslant \| A \| \, \| B \|, \quad \| Ax \| \leqslant \| A \| \, \| x \|.$$

A матрисинин *елементләри мүәјјән* (α, β) *интервалында тә'јин олунмуш* $a_{ij}(t)$ *функсијалары оларса, она матрис-функсија дејилир вә* $A(t) = (a_{ij}(t))$ *ишарә олунур. Елемент-*

ләри ејни бир интервалда кәсилмәз олан матрис-функсија һәмин интервалда кәсилмәз матрис-функсија адланыр.

Верилмиш $A(t)$ матрис-функсијасынын интегралы, елементләри $\int a_{ij}(t)\,dt$ олан $\int A(t)\,dt = \left(\int a_{ij}(t)\,dt\right)$ матрисинә, төрәмәси исә елементләри $\frac{d}{dt} a_{ij}(t)$ олан $\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} a_{ij}(t)\right)$ матрисинә дејилир.

Исбат етмәк олар ки, $A(t)$, $B(t)$ матрис-функсијаларынын төрәмәләри варса,

$$\frac{d}{dt}(A(t)\,B(t)) = \frac{dA(t)}{dt}\,B(t) + A(t)\,\frac{dB(t)}{dt} \qquad (3)$$

дүстуру доғрудур.

Тутаг ки, $A(t)$ матрис-функсијасы (α, β) интервалында диференсиалланандыр вә бу интервалда тәрси вар. Онда $A(t)\,A^{-1}(t) = E$ (E—ваһид матрисдир) ејнилијиндән (3) дүстуруна әсасән аларыг ки,

$$\frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t) + A(t)\,\frac{dA^{-1}(t)}{dt} = 0.$$

Бурадан

$$\frac{dA^{-1}(t)}{dt} = -A^{-1}(t)\,\frac{dA(t)}{dt}\,A^{-1}(t) \qquad (4)$$

дүстуру алыныр.

Тутаг ки, ејни тәртибли $\{A^{(m)}\}$ квадрат матрисләр ардычыллығы вә A матриси верилмишдир. Бурада $A^{(m)} = \left(a_{ij}^{(m)}\right)$, $A = (a_{ij})$. *Әкәр* $\lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}$ *оларса, дејирләр ки,* $\{A^{(m)}\}$ *матрисләр ардычыллығы A матрисинә јығылыр.*

Тутаг ки, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ әдәди сыралары ујғун олараг b_{ij} әдәдләринә јығылырлар. Онда дејирләр ки, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A^{(m)}$ матрисләр сырасы $B = (b_{ij})$ матрисинә јығылыр.

Мә'лумдур ки, ихтијари a әдәди үчүн

$$1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{a^m t^m}{m!} + \cdots \qquad (5)$$

гүввәт сырасы јығыландыр вә чәми e^{at}-јә бәрабәрдир.

Көстәрәк ки, истәнилән A квадрат матриси үчүн

$$E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m t^m}{m!} + \cdots \qquad (6)$$

матрисләр сырасы да јығыландыр. бурада E—ваһид матрисдир.

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A, \ldots, A^m = A^{m-1} A.$$

Доғрудан да, A^m матрисинин елементләрини $a_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots$ илә ишарә етсәк, норманын тә'рифинә әсасән $|a_{ij}^{(m)}| \leqslant \|A^m\| \leqslant \|A\|^m$. Одур ки, (5) сырасында $a = \|A\|$ көтүрүб мүгајисә теоремини тәтбиг етсәк, аларыг ки, (6) матрис сырасыны тә'јин един

$$\delta_{ij} + a_{ij}^{(1)} t + \frac{a_{ij}^{(2)} t^2}{2!} + \cdots + \frac{a_{ij}^{(m)} t^m}{m!} + \cdots; \; i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

гүввәт сыралары јығылыр. Бурадан алыныр ки, (6) матрис сырасы јығылыр. Бу сыранын чәмини e^{At} илә ишарә едәк. *Бу гајда илә тә'јин олунан e^A матрисинә A матрисинин експоненти* дејилир.

Хүсуси һалда, A матриси баш диагонал елементләри $a_1, a_2, \ldots, a_n$ олан диагонал матрис олдугда, e^{At} матриси баш диагонал елементләри $e^{a_1 t}, e^{a_2 t}, \ldots, e^{a_n t}$ олан диагонал матрис олур.

Јухарыда тә'јин етдијимиз A^m матрисинә A матрисинин m-чи дәрәчәси (гүввәти) дејилир. Мүәјјән дәрәчәси сыфыр (сыфыр матрис) олан *матрисә нилпотент матрис дејилир*

Көстәрәк ки,

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} \qquad (7)$$

бәрабәрлијинин өдәнмәси үчүн A вә B матрисләринин коммутатив матрисләр олмасы зәрури вә кафидир.

Доғрудан да ихтијари A вә B матрисләри үчүн тә'рифә көрә

$$e^{(A+B)t} = E + (A+B)t + \frac{(A+B)^2 t^2}{2!} + \frac{(A+B)^3 t^3}{3!} + \cdots =$$

$$= E + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}(A^3 + A^2 B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2 A + B^3)t^3 + \ldots$$

$$e^{At} e^{Bt} = \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\left(E + Bt + \frac{B^2 t^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{B^3 t^3}{3!} + \cdots\right) = E + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2)t^2 +$$

$$+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2+3AB^2+B^3)t^3+\cdots$$

олдуғундан

$$e^{(A+B)t}-e^{At}e^{Bt}=(BA-AB)\frac{t^2}{2!}+[A(BA-AB)+$$

$$+(BA-AB)B+(BA^2-A^2B+B^2A-AB^2)]\frac{t^3}{3!}+\cdots \qquad (8)$$

бәрабәрлијини аларыг.

Бурадан ајдындыр ки, әкәр истәнилән t үчүн (7) өдәнилирсә, $AB = BA$.

Тутаг ки, $AB = BA$. Онда истәнилән m вә k үчүн $A^m B^k = B^k A^m$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (8) бәрабәрлијиндә сағ тәрәф сыфыр олар, јә'ни (7) бәрабәрлијинин доғрулуғу алынар.

(7) бәрабәрлијиндән истифадә едәрәк

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & & & \cdot & \cdots & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda E+Z$$

матриси үчүн $e^{J(\lambda)t}$ матрисини һесаблајаг.

Ваһид матрис истәнилән матрислә коммутатив олдуғундан, (7) бәрабәрлијинә әсасән $e^{J(\lambda)t}=e^{\lambda Et}\,e^{Zt}=e^{\lambda t}\,e^{Zt}$. Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$Z^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},\ldots,Z^{n-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},Z^n=0,$$

јә'ни Z нилпотент матрисдир. Онда

$$e^{Zt}=E+Zt+\frac{Z^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{Z^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$e^{J(\lambda)t}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Верилмиш A вә B матрисләри үчүн $B=P^{-1}AP$ мүнасибәтини өдәјән ғејри-мәхсуси P матриси варса, A, B матрисләринә охшар матрисләр дејилир.

Тутаг ки, A матриси верилмишдир. Ајдындыр ки, мүхтәлиф P матрисләри сечмәклә A илә охшар олан мүхтәлиф матрисләр алмаг олар.

Матрисләр нәзәријјәсиндән мә'лумдур ки, һәр бир n-тәртибли A квадрат матриси үчүн елә P матриси вар ки,

$$J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$$

олур, бурада

$$J_{m_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}, \quad i=1,2,\ldots,l$$

шәклиндә $m_i \geqslant 1$ тәртибли квадрат матрисдир; $m_1+m_2+\cdots+m_l=n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ исә A матрисинин характеристик әдәдләридир вә үмумијјәтлә, мүхтәлиф олмаја биләрләр.

Бу гајда илә гурулан *J матрисинә A матрисинин каноник Жордан формасы, $J_{m_i}(\lambda_i)$-јә исә Жордан һүҹрәси дејилир*. Хүсуси һалда, $m_{i_0}=1$ исә, $J_{m_{i_0}}(\lambda_{i_0})$ јеканә λ_{i_0} елементи олан бирелементли һүҹрәдир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$e^{Jt}=\begin{pmatrix}e^{J_{m_1}(\lambda_1)t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{J_{m_2}(\lambda_2)t} & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{m_l}(\lambda_l)t}\end{pmatrix}$$

вә $e^{J_{m_i}(\lambda_i)t}$, $i=1,2,\ldots,l$ матрисләри (9) дүстурунун көмәјилә гурулур.

г) *Системин вектор-матрис шәкли.* Јухарыда верилән анлајышлардан истифадә едәрәк (1) системини

$$\dot{x}=A(t)x+f(t) \qquad (1')$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада x—компонентләри $x_1, x_2, \ldots, x_n$ олан сүтун вектор, $\dot{x}$ онун төрәмәси, $f(t)$—компонентләри $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ олан сүтун вектор, $A(t) = (a_{ij}(t))$ исә (1) системинин $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ әмсалларындан дүзәлмиш матрисдир.

Фәрз едәчәјик ки, $f(t)$ вектор-функсијасы вә $A(t)$ матрис-функсијасы мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәздирләр. Мә'лумдур ки, бу заман ихтијари $t_0 \in (\alpha, \beta)$ әдәди вә x^0 вектору үчүн (1') системинин

$$x(t_0) = x^0$$

шәртини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунан јеканә һәлли вар (бах: IV фәсил, § 7).

§ 2. ХӘТТИ БИРЧИНС СИСТЕМЛӘР

Тутаг ки, n-тәртибли

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (10)$$

хәтти бирчинс системи верилмишдир. Бурада $A(t)$ верилмиш (α, β) интервалында кәсилмәз олан n-тәртибли квадрат матрис-функсија, x исә n-өлчүлү сүтун вектордур.

Ајдындыр ки, $x(t) \equiv 0$ вектор-функсијасы (10) системинин һәллидир вә һәр һансы $y(t)$ вектор-функсијасы (10) системинин $y(t_0) = 0$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ шәртини өдәјән һәлли исә, һәллин јеканәлијинә әсасән $y(t) \equiv 0$ олур. *Системин $x(t) \equiv 0$ һәллинә тривиал һәлл дејилир.*

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x^1(t)$ вектор-функсијасы (10) системинин һәлли олдугда ихтијари a әдәди үчүн $ax^1(t)$ дә һәллдир вә $x^1(t)$, $x^2(t)$ ики ихтијари һәлл исә, $x^1(t) + x^2(t)$ чәми дә һәллдир.

Демәли, (10) системинин һәлләри чохлуғу хәтти фәза тәшкил едир.

Тутаг ки, (α, β) интервалында тә'јин олунмуш $y^1(t)$, $y^2(t), \ldots, y^k(t)$ вектор-функсијалары верилмишдир.

$$a_1y^1(t) + a_2y^2(t) + \cdots + a_ky^k(t) = 0 \qquad (11)$$

мүнасибәти, ихтијари $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн анчаг $a_1, a_2, \ldots, a_k$ әдәдләри сыфыр олдугда өдәнәрсә, дејирләр ки, һәмин вектор-функсијалар (α, β) интервалында хәтти асылы олмајандырлар. Әкс һалда, јә'ни (11) мүнасибәти ихтијари $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн $a_1, a_2, \ldots, a_k$ әдәдләриндән һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда өдәнәрсә, дејирләр ки, һәмин вектор функсијалар (α, β) интервалында хәтти асылыдырлар.

Көстәрәк ки, (10) системинин n сајда хәтти асылы олмајан һәлли вар. Бунун үчүн R_n фәзасындан n сајда хәтти асылы олмајан

$$p^1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \quad p^2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, p^n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

векторларыны көтүрәк вә (10) системинин $x(t_0) = p^1$ шәртини өдәјән һәллини $\varphi^1(t)$, $x(t_0) = p^2$ шәртини өдәјән һәллини $\varphi^2(t)$ илә вә с. $x(t_0) = p^n$ шәртини өдәјән һәллини исә $\varphi^n(t)$ илә ишарә едәк. Бу һалда илә гурулмуш $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)$ һәлләр системи хәтти асылы олмајандыр. Доғрудан да, бу һәлләр хәтти асылы олсалар, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләри тапмаг олар ки,

$$a_1\varphi^1(t) + a_2\varphi^2(t) + \cdots + a_n\varphi^n(t) = 0, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

мүнасибәти өдәнәр. Бурада $t = t_0$ көтүрсәк,

$$a_1p^1 + a_2p^2 + \cdots + a_np^n = 0$$

мүнасибәтини аларыг. Бу исә $p^1, p^2, \ldots, p^n$ векторларынын хәтти асылы олмамасы шәртинә зиддир. Демәли, $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)$ һәлләри хәтти асылы олмајандыр. Системин ихтијари $x(t)$ һәллини көтүрүб $x(t_0) = c$ ишарә едәк. Мә'лумдур ки, c векторуну $p^1, p^2, \ldots, p^n$ векторлары үзрә јеканә гајда илә

$$c = c_1p^1 + c_2p^2 + \cdots + c_np^n$$

шәклиндә көстәрмәк олар.

Ајдындыр ки,

$$y(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \cdots + c_n\varphi^n(t)$$

вектор-функсијасы (10) системинин

$$y(t_0) = c_1p^1 + c_2p^2 + \cdots + c_np^n = c$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллидир. Һәллин јеканәлијинә әсасән аларыг ки, $y(t) \equiv x(t)$, јә'ни

$$x(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \cdots + c_n\varphi^n(t). \qquad (12)$$

Демәли, (10) системинин n сајда хәтти асылы олмајан һәлли вар вә һәр бир һәлли бу һәлләрин хәтти комбинасијасы шәклиндә көстәрмәк олар. Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг:

Теорем 1. *Тутаг ки, $A(t)$ матрис-функсијасы (α, β) интервалында кәсилмәздир. Онда (10) системинин һәлләри чохлуғу бу интервалда n-өлчүлү хәтти фәза тәшкил едир.*

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, хәтти асылы олмајан $p^1, p^2, \ldots, p^n$ векторларыны мүхтәлиф шәкилдә сечмәклә (10) системинин мүхтәлиф хәтти асылы олмајан һәлләр системини гурмаг олар.

Хәтти бирчинс (10) *системинин хәтти асылы олмајан* $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^n(t)$ *һәлләринә һәмин системин базиси вә ја фундаментал һәлләр системи* дејилир.

$c_1, c_2, \dots, c_n$ әдәдләринә ихтијари сабитләр кими бахсаг, (12) дүстуру (10) системинин үмуми һәллини верир.

Тутаг ки, $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ вектор-функсијалары (10) системинин (α, β) интервалында һәлләридир. Сүтунлары бу һәлләрдән ибарәт олан

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \dots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \dots x_{2n}(t) \\ \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) \dots x_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad (13)$$

матрисини дүзәлдәк; бурада $x_{1i}(t), x_{2i}(t), \dots, x_{ni}(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ илә $x^i(t)$ һәллинин компонентләри ишарә олунмушдур. $X(t)$ *матрисинин детерминантына* $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ *һәлләриндән дүзәлдилмиш Вронски детерминанты дејилир вә* $W(t) = W(x^1, x^2, \dots, x^n)$ *илә ишарә олунур.* Ајдындыр ки, $X(t)$ матриси

$$\dot X = A(t)X \qquad (14)$$

матрис-системинин һәллидир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $X(t)$ матрис-функсијасы (14) матрис-системинин һәлли исә, онун сүтунларындан ибарәт олан вектор-функсијалар (10) системинин һәлләридир.

Сүтунлары (10) системинин һәр һансы $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^n(t)$ фундаментал һәлләриндән ибарәт олан $\Phi(t)$ матрисинә һәмин системин *фундаментал матриси* дејилир. Фундаментал матрисин көмәји илә (10) системинин үмуми һәллини

$$x = \Phi(t)c \qquad (12')$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада c — ихтијари сүтун вектордур.

Теорем 2 (Лиувилл теореми). *Тутаг ки, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир. Онда* $W(t) = \det X(t)$ *функсијасы*

$$\dot z = \operatorname{Sp} A(t)\, z \qquad (15)$$

тәнлијинин һәллидир, бурада $\operatorname{Sp} A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$.

Исбаты. Шәртә көрә $X(t) = (x_{ij}(t))$ матриси (14) матрис-системинин һәлли олдуғундан, (α, β) интервалында

$$\dot x_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_{kj}(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \qquad (16)$$

ејниликләри өдәнир.

Мә'лумдур ки, n-тәртибли детерминантын төрәмәси n сајда детерминантын чәминә бәрабәрдир.

Бу чәмин 1-чи топлананы верилмиш детерминантын 1-чи сәтир елементләрини онларын төрәмәләри илә, 2-чи топлананы верилмиш детерминантын 2-чи сәтир елементләрини онларын төрәмәләри илә вә с. n-чи топлананы исә верилмиш детерминантын n-чи сәтир елементләрини онларын төрәмәләри илә әвәз етмәклә алыныр.

Бу ғајданы вә (16) ејниликләрини нәзәрә алсаг,

$$\dot W(t) = \begin{vmatrix} \dot x_{11}(t) & \dot x_{12}(t) \cdots \dot x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \cdots x_{2n}(t) \\ \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) \cdots x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \cdots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \cdots x_{2n}(t) \\ \dots & \dots \\ \dot x_{n1}(t) & \dot x_{n2}(t) \cdots \dot x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{1k}(t)x_{k1}(t) & \Sigma a_{1k}(t)x_{k2}(t) & \cdots & \Sigma a_{1k}(t)x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \cdots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Sigma a_{nk}(t)x_{k1}(t) & \Sigma a_{nk}(t)x_{k2}(t) \cdots & \Sigma a_{nk}(t)x_{kn}(t) \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантларын биринчисиндә 2-чи сәтри $a_{12}(t)$-јә, 3-чү сәтри $a_{13}(t)$-јә вә с. n-чи сәтри $a_{1n}(t)$-јә вуруб һамысыны биринчи сәтир елементләриндән чыхсаг,

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t)x_{11}(t) & a_{11}(t)x_{12}(t) \cdots & a_{11}(t)x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \cdots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)\, W(t)$$

детерминантыны аларыг. Дикәр детерминантлар үзәриндә дә охшар чевирмәләр апарсаг, нәтичәдә

$$\dot W(t) = \operatorname{Sp}A(t)\, W(t)$$

ејнилијини аларыг. Теорем исбат олунду.

Мә'лумдур ки, (15) тәнлијинин һәлләри $z(t) = z(t_0) \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp}A(\tau)d\tau\right)$ шәклиндәдир. Одур ки, теоремә әсасән

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)\,d\tau\right), \quad t_0,\ t \in (\alpha, \beta) \qquad (17)$$

дүстуру алыныр. Бу дүстура *Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуру* дејилир. Бу дүстурдан ајдындыр ки, мүәјјән $t_0 \in (\alpha,\beta)$ үчүн $W(t_0)\neq 0$ исә, истәнилән $t\in(\alpha,\beta)$ үчүн $W(t)\neq 0$.

Теорем 3. *Тутаг ки, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәр һансы һәллидир. Бу матрисин (10) системинин фундаментал матриси олмасы үчүн $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$ олмасы зәрури вә кафидир.*

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир вә $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$. Бу матрисин (14) матрис-системинин һәлли олмасындан алыныр ки, онун сүтунларындан дүзәлдилмиш $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ вектор-функсијалары (α,β) интервалында (10) системинин һәлләридир вә $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$ олдуғундан, бу вектор-функсијалар хәтти асылы дејилләр. Демәли, $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ вектор-функсијалары (10) системинин фундаментал һәлләри, $X(t)$ исә онун фундаментал матрисидир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, $X(t)$ матриси (10) системинин (α,β) интервалында фундаментал матрисидир вә $x(t)$ вектор-функсијасы һәмин системин $x(t_0)=x^0$ шәртини өдәјән һәллидир; бурада $t_0\in(\alpha,\beta)$ вә x^0 верилмиш сүтун вектордур. 1-ҹи теоремә әсасән, јеганә гајда илә сечилмиш елә $c_1, c_2, \dots, c_n$ әдәдләри вар ки,

$$x(t)=c_1x^1(t)+c_2x^2(t)+\dots+c_nx^n(t).$$

Бурадан алырыг ки, $c_1, c_2, \dots, c_n$ әдәдләри

$$c_1x^1(t_0)+c_2x^2(t_0)+\dots+c_nx^n(t_0)=x^0$$

ҹәбри тәнликләр системинин һәллидир. Бу ҹәбри тәнликләр системинин һәлли јеганә олдуғундан (истәнилән x^0 үчүн), алыныр ки, $W(t_0)=\det X(t_0)\neq 0$. Онда (17) дүстуруна әсасән, $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$. Теорем исбат олунду.

Гејд 1. $X(t)$ матрис-функсијасы (14) матрис-системинин һәлли дејилсә, онун сүтунларындан дүзәлдилмиш вектор-функсијалар хәтти асылы олмадыгда белә $\det X(t)\equiv 0$ ола биләр.

Мисал

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix},\quad -\infty<t<+\infty$$

вектор-функсијаларынын хәтти асылы олмамасына бахмајараг, онларын көмәјилә дүзәлдилмиш $X(t)$ матрисинин детерминанты

$$\det X(t)=\begin{vmatrix}1&t\\t&t^2\end{vmatrix}\equiv 0,\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Бунун сәбәби ондан ибарәтдир ки, гурулан $X(t)$ матриси (14) шәкилли һеч бир кәсилмәз әмсаллы матрис-системин һәлли ола билмәз.

Теорем 4. *Тутаг ки, $X(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ (10) системинин фундаментал матриси, C исә ихтијари гејри-мәхсуси сабит матрисдир. Онда $X(t)C$ матриси дә фундаментал матрисдир вә (10) системинин һәр бир $Y(t)$ фундаментал матриси мүәјјән гејри-мәхсуси C матрисинин көмәјилә $Y(t)=X(t)C$ шәклиндә көстәрилә биләр.*

Исбаты. Әввәлҹә көстәрәк ки, $X(t)C$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир. Доғрудан да, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{d}{dt}(X(t)C)=\dot X(t)C=(A(t)X(t))C=A(t)(X(t)C).$$

Бу көстәрир ки, $X(t)C$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир. Дикәр тәрәфдән,

$$\det(X(t)C)=\det X(t)\det C_\cdot\neq 0$$

олдуғундан, 3-ҹү теоремә әсасән алырыг ки, $X(t)C$ матриси (10) системинин фундаментал матрисидир.

Тутаг ки, $Y(t)$ матриси (10) системинин башга фундаментал матрисидир вә $Z(t)=X(t)Y(t)$ ишарә едәк. $X(t)$ вә $Y(t)$ матрисләри (14) матрис системинин һәлли олдуғундан, (4) дүстуруну да нәзәрә алмагла јаза биләрик

$$\dot Z(t)=\frac{d}{dt}\left(X^{-1}(t)Y(t)\right)=\frac{dX^{-1}(t)}{dt}Y(t)+X^{-1}(t)\frac{dY(t)}{dt}=$$

$$=-X^{-1}(t)\dot X(t)X^{-1}(t)Y(t)+X^{-1}(t)\dot Y(t)=$$

$$=-X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t)Y(t)+X^{-1}(t)A(t)Y(t)=0;$$

бурада 0—сыфыр матрисдир.

Демәли, $Z(t)$ сабит матрисдир вә $\det Z=\det X^{-1}(t)\det Y(t)\neq 0$. Бурадан алырыг ки, $Y(t)=X(t)C$ вә C гејри-мәхсуси матрисдир. Теорем исбат олунду.

Тутаг ки, $X(t)$ матриси (10) системинин һәр һансы фундаментал матрисидир. Демәли, $X(t)$ матрис-функсијасы (14) матрис-системинин һәллидир. Онда $\dot X(t)=A(t)X(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$, $A(t)=\dot X(t)X^{-1}(t)$. Дикәр тәрәфдән, һәр бир $Y(t)$ фундаментал матриси, теоремә әсасән, $Y(t)=X(t)C$ шәклиндә көстәрилә билдијиндән, $\dot Y(t)Y^{-1}(t)=\dot X(t)CC^{-1}X^{-1}(t)=\dot X(t)X^{-1}(t)$ олар.

Беләликлә, верилмиш системин сонсуз сајда фундаментал матрисләри олмасына бахмајараг, һәр һансы фундаментал матрисә көрә систем (јә'ни $A(t)$ матриси) јеканә гајда илә гурулур.

Мисаллар.

1. Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}t\\ 1+t^2\end{pmatrix}$$

вектор-функсијалары

$$\begin{cases}\dot x_1=-tx_1+x_2,\\ \dot x_2=(1-t^2)x_1+tx_2\end{cases}$$

системинин хәтти асылы олмајан һәлләридир. $x^1(t)$, $x^2(t)$ системин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир вә

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}$$

матриси, һәмин системин фундаментал матриси олур.

2. Фундаментал матриси

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\sin t & -e^t\cos t\\ \cos t & e^t\sin t\end{pmatrix}$$

олан диференсиал тәнликләр системини гураг.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\dot\Phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -e^t\cos t+e^t\sin t\\ -\sin t & e^t\sin t+e^t\cos t\end{pmatrix},$$

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t\end{pmatrix}.$$

Она көрә

$$A(t)=\dot\Phi(t)\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix}\cos^2 t & 1-\sin t\cos t\\ -1-\sin t\cos t & \sin^2 t\end{pmatrix}.$$

Демәли, бир фундаментал матриси $\Phi(t)$ олан систем ашағыдакы шәкилдә олар

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1\cos^2 t+(1-\sin t\cos t)x_2,\\ \dot x_2=-(1+\sin t\cos t)x_1+x_2\sin^2 t.\end{cases}$$

§ 8. ХӘТТИ БИРЧИНС ОЛМАЈАН СИСТЕМЛӘР САБИТЛӘРИН ВАРИАСИЈАСЫ УСУЛУ

Тутаг ки,

$$\dot x=A(t)x+f(t) \qquad (1')$$

системи верилмишдир вә $x=x^1(t)$ онун һәр һансы һәллидир. $x=x^1(t)+z$ әвәзләмәси апарсаг, аларыг ки, z вектор-функсијасы

$$\dot z=A(t)z$$

хәтти бирчинс системинин һәллидир. Бу көстәрир ки, хәтти бирчинс олмајан системин бир хүсуси һәлли мә'лум оларса, онун үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләси, ујғун бирчинс системин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләсинә кәтирилир.

Көстәрәк ки, хәтти бирчинс (10) системинин мүәјјән бир $\Phi(t)$ фундаментал матрисинин көмәји илә (1′) системинин үмуми һәллини гурмаг олар. Бунун үчүн *сабитләрин вариасијасы* адланан үсулдан истифадә едәк.

Мә'лумдур ки, (10) системинин үмуми һәлли

$$x=\Phi(t)c \qquad (12')$$

дүстуру илә верилир. Бурада c ихтијари сабит сүтун вектордур. Бу векторә t дәјишәнинин һәләлик намә'лум олан вектор-функсијасы кими бахыб ону елә сечәк ки,

$$x=\Phi(t)c(t) \qquad (18)$$

вектор-функсијасы (1′) системинин һәлли олсун. Бу әвәзләмәни (1′) тәнлијиндә јазараг, $\Phi(t)$ матрис-функсијасынын (14) матрис-системинин һәлли олдуғуну нәзәрә алсаг, $c(t)$-јә нәзәрән

$$\Phi(t)\dot c(t)=f(t)$$

системини аларыг.

Шәртә көрә, $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан, $\Phi^{-1}(t)$ вар. Одур ки, сонунчу системи

$$\dot c(t)=\Phi^{-1}(t)f(t)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Алынан тәнлији t_0-дан t-јә гәдәр интеграллаcаг,

$$c(t)=c+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\quad t\in(\alpha,\beta).$$

Бурада $t_0\in(\alpha,\beta)$ ихтијари нөгтәдир, c исә ихтијари сабит сүтун вектордур. Бу ифадәни (18)-дә јеринә јазсаг,

$$x=\Phi(t)c+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \qquad (19)$$

Аjдындыр ки, (19) дүстурунда биринчи топланан (10) бирчинс системинин үмуми һәллидир. Асанлыгла јохламаг олар ки, һәмин дүстурдакы икинчи топланан (1′) системинин $x(t_0)=0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллидир. Бундан башга, (1′) системинин $x(t_0)=x_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$x=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \qquad (20).$$

Бу дүстурда $F(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ ишарә етсәк, ону

$$x=F(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (21)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу гајда илә гурулмуш $F(t,\tau)$ *матрисинә Коши матриси* дејилир.

Мисал. Сабитләрин варијасијасы үсулу илә

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-tx_1+x_2+\dfrac{1}{1+t^2},\\ \dot{x}_2=(1-t^2)x_1+tx_2+\ln t\end{cases}$$

системини һәлл едәк. Бу системә ујғун олан

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-tx_1+x_2,\\ \dot{x}_2=(1-t^2)x_1+tx_2\end{cases}$$

бирчинс системинин фундаментал матриси (бах: § 2, 1-чи мисал)

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}$$

шәклиндәдир вә

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1+t^2 & -t\\ -t & 1\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+t^2}\\ \ln t\end{pmatrix}.$$

Она көрә дә (19) дүстуруна әсасән, верилмиш системин үмуми һәлли

$$x=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}+\int_{0}^{t}\begin{pmatrix}1+\tau^2 & -\tau\\ -\tau & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\tau^2}\\ \ln\tau\end{pmatrix}d\tau\right\}$$

олар. Бу һәлл координатларла

$$x_1=c_1+(c_2+1)t-0{,}75t^2+0{,}5t^2\ln t-0{,}5\,t\ln(1+t^2),$$
$$x_2=c_2+(c_1-1)t+(c_2+1)t^2-0{,}75t^3+t(1+0{,}5t^2)\ln t-$$
$$-0{,}5(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

шәклиндә јазылыр.

§ 4. ГОШМА СИСТЕМ

Тутаг ки,

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (10)$$

системи верилмишдир. Бу системлә јанашы

$$\dot{y}=-A^*(t)y \qquad (22)$$

системинә бахаг; бурада $A^*(t)$ илә $A(t)$ матрисинин транспонирә олунмуш матриси ишарә едилмишдир. ($A^*(t)$-јә һәм дә $A(t)$-нин гошмасы дејилир.)

Бу гајда илә гурулан (10) вә (22) системләри гошма системләр адланыр.

Теорем 5. *Тутаг ки, $\Phi(t)$-матриси (10) системинин һәр һансы фундаментал матрисидир. Онда $\Phi^{*-1}(t)$ матриси (22) системинин фундаментал матриси олур.*

Исбаты. $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан, $\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t)$ ејнилији өдәнир. Бурадан $\dot{\Phi}^*(t)=\Phi^*(t)A^*(t)$. Онда (4) дүстуруна әсасән алырыг ки,

$$\frac{d}{dt}\Phi^{*-1}(t)=-\Phi^{*-1}(t)\frac{d\Phi^*(t)}{dt}\Phi^{*-1}(t)=$$
$$=-\Phi^{*-1}(t)\Phi^*(t)A^*(t)\Phi^{*-1}=-A^*(t)\Phi^{*-1}(t).$$

Демәли, гошма системләрдән биринин фундаментал матриси мә'лум олдугда дикәринин дә фундаментал матрисини тапмаг олар.

Теорем 6. *Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (10) системинин, $\Psi(t)$ матриси исә (22) системинин фундаментал матрисидир. Онда*

$$\Psi^*(t)\,\Phi(t)=C$$

олур. Бурада C гејри-мәхсуси сабит матрисдир.

Исбаты. $\Psi(t)$ матриси (22) системинин фундаментал матриси олдуғундан, $\dot{\Psi}(t)=-A^*(t)\Psi(t)$ ејнилији өдәнир. Бурадан $\dot{\Psi}^*(t)=-\Psi^*(t)A(t)$. Онда $\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t)$ ејнилијини дә нәзәрә алсаг,

$$\frac{d}{dt}(\Psi^*(t)\Phi(t))=\dot{\Psi}^*(t)\Phi(t)+\Psi^*(t)\dot{\Phi}(t)=0.$$

Демәли, $\Psi^*(t)\Phi(t)=C$ вә $\det C=\det\Psi^*(t)\det\Phi(t)\neq 0$ олур ки, бу да теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Әкәр $A(t)=-A^*(t)$ оларса, (10) системинә *өзү-өзүнә гошма систем* дејилир.

Ахырынчы теоремдән ајдындыр ки, өзү-өзүнә гошма систем үчүн $\Phi(t)$ матриси илә бирликдә $\Phi^{*-1}(t)$ матриси дә фун-

даментал матрис олур. Онда 4-чү теоремә әсасән алырыг ки, өзү-өзүнә гошма систем үчүн

$$\Phi^*(t)\,\Phi(t) = C.$$

Бурада C гејри-мәхсуси сабит матрисдир.

Тутаг ки, $\Psi(t)$ матриси (22) системинин фундаментал матрисидир. Онда 6-чы теоремә әсасән ајдындыр ки, $\Psi^{*-1}(t)$ матриси (10) системинин фундаментал матриси олар. Одур ки, (20) дүстуруну

$$x = \Psi^{*-1}(t)\,\Psi^*(t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi^{*-1}(t)\,\Psi^*(\tau) f(\tau)\,d\tau \qquad (23)$$

шәклиндә јазмаг олар.

§ 5. САБИТ ӘМСАЛЛЫ БИРЧИНС СИСТЕМ

Хәтти бирчинс (10) системиндә $A(t)$ матриси сабит оларса, белә системә *сабит әмсаллы систем* дејилир вә

$$\dot{x} = Ax \qquad (24)$$

шәклиндә јазылыр.

Теорем 7. *Сабит әмсаллы (24) системи үчүн*

$$\Phi(t) = e^{At} \qquad (25)$$

матриси фундаментал матрис олур.

Исбаты. Матрисин експонентинин тә'рифинә әсасән

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \qquad (26)$$

матрис сырасы мүнтәзәм јығылыр вә ону һәдбәһәд диференсиалламаг олар. Одур ки,

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + \frac{A^2}{1!}t + \frac{A^3}{2!}t^2 + \cdots =$$

$$= A\left(E + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = Ae^{At}.$$

Демәли, $\Phi(t) = e^{At}$ матрис-функсијасы

$$\dot{X} = AX \qquad (27)$$

сабит әмсаллы матрис-системинин $X(0) = E$ шәртини өдәјән һәллидир. Онда (17) дүстурундан ($t_0 = 0$ көтүрмәклә) алырыг ки,

$$\det e^{At} = e^{\int_0^t \mathrm{Sp}\,A\,d\tau} = e^{t\,\mathrm{Sp}\,A} > 0.$$

Бу көстәрир ки, $\Phi(t) = e^{At}$ матриси (27) системинин гејри-мәхсуси матрис һәллидир. Бурадан 3-чү теоремә әсасән алырыг ки, бу матрис (24) системинин фундаментал матрисидир. Теорем исбат олунду.

Теоремә әсасән алырыг ки, (24) системинин үмуми һәлли

$$x = e^{At}c \qquad (28)$$

шәклиндә олар, бурада c ихтијари сабит сүтун векторлур.

Истәнилән t вә s үчүн (7) дүстурува әсасән

$$e^{A(t+s)} = e^{At}\,e^{As} \text{ вә ја } \Phi(t+s) = \Phi(t)\,\Phi(s)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Јухарыда исбат олунмуш 7-чи теоремә вә (20) дүстуруна әсасән алырыг ки, бирчинс олмајан сабит әмсаллы

$$\dot{x} = Ax + f(t) \qquad (29)$$

системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән һәлли

$$x = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau \qquad (30)$$

вә ја

$$x = \Phi(t - t_0)\,x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau) f(\tau)\,d\tau \qquad (31)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Ајдындыр ки, сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин һәлләринин t дәјишәниндән асылылығыны билмәк үчүн, $\Phi(t) = e^{At}$ матрисинин гурулушуну билмәк лазымдыр. Бу исә өз нөвбәсиндә бир чох мәсәләләрин һәлли заманы мүһүм рол ојнајыр.

Тутаг ки, J матриси A матрисинин каноник Жордан формасыдыр, јә'ни елә гејри-мәхсуси P матриси вар ки, $A = PJP^{-1}$ олур. Бурадан

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

бәрабәрлијини аларыг. Јухарыда e^{Jt} матриси һесабланмышдыр. Һәмин матриси ахырынчы бәрабәрликдә јазыб e^{At} матрисини һесабламаг олар.

Беләликлә, A матрисинин J каноник Жордан формасы мә'лум оларса, $\Phi(t) = e^{At}$ фундаментал матрисинин елементләринин t дәјишәниндән асылылығыны билмәк олар. Гејд едәк ки, A матрисинин J каноник Жордан формасы мә'лум олдугда (24) системи әвәзләмә васитәсилә даһа асан һәлл олунан системә кәтирилир.

Доғрудан да, тутаг ки, $A = PJP^{-1}$ вә (24) системиндә

$$x = Py$$

әвәзләмәси апараг. Онда y-ә нәзәрән $P\dot{y} = APy$ системи вә ја һәр тәрәфини P^{-1}-ә солдан вуруб $J = P^{-1}AP$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\dot{y} = Jy \tag{32}$$

системи алыныр. Бу системи координатларла јазаг:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 y_2 + y_3, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{m_1} = \lambda_1 y_{m_1}, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_n = \lambda_l y_n. \end{cases} \tag{32'}$$

Бурада биринчи m_1 тәнлик J матрисинин $J_{m_1}(\lambda_1)$ Жордан һүчрәсинә, сонракы m_2 тәнлик $J_{m_2}(\lambda_2)$ Жордан һүчрәсинә вә с. ујғун алынмышдыр.

Алынмыш системин һәр һүчрәјә ујғун олан һиссәсини ашағыдан јухарыја ардычыл интегралламагла онун үмуми һәллини гурмаг олар.

Мисаллар.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = 3x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$

системинин фундаментал матрисини вә үмуми һәллини гурмалы.

Һәлли. Системин әмсалларындан дүзәлмиш матрис

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

вә

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^5 = \dots = 0$$

олдуғундан,

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2}{2}t^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 & -t - \frac{1}{2}t^2 \\ t + \frac{1}{2}t^2 & 1 - t + \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 3t + t^2 & -t + t^2 & 1 - t - t^2 \end{pmatrix}.$$

Онда, системин үмуми һәлли координатларла ашағыдакы шәкилдә олар:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + (2c_1 - c_3)t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3)t^2, \\ x_2 = c_2 + (c_1 - c_3)t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3)t^2, \\ x_3 = c_3 + (3c_1 - c_2 - c_3)t + (c_1 + c_2 - c_3)t^2. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

системинин фундаментал матрисини гурмалы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

олдуғундан (јә'ни A диагонал матрислә нилпотент матрисин чәми шәклиндәдир),

$$e^{At} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Демәли,

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

матриси бахылан системин фундаментал матрисидир.

§ 6. САБИТ ӘМСАЛЛЫ БИРЧИНС СИСТЕМИН ҮМУМИ ҺӘЛЛИНИН ГУРУЛМАСЫ

Јухарыда A матрисинин J каноник Жордан формасы мә'лум олдугда сабит әмсалы (24) системинин үмуми һәллинин тапылмасы даһа асан һәлл олунан (32) системинә гәтирилди. Лакин A матрисинин Жордан формасыны тапмаг әмәлијјаты мүрәккәб олдуғундан, бу параграфда (24) системинин һәлли башга үсулла тапылыр. Бу мәгсәдлә (24) системинин тривиал олмајан һәлләрини

$$x = e^{\lambda t}c \tag{33}$$

шәклиндә ахтарырыг, бурада λ һәләлик намә'лум олан, үмумијјәтлә, комплекс әдәд, c исә n өлчүлү намә'лум вә сыфыр

380—11

олмаҹан сабит сүтун вектордур. (24) системиндә $x = e^{\lambda t}c$ јазыб $e^{\lambda t}$-јә ихтисар етдикдән сонра c векторуна нәзәрән

$$(\lambda E - A)c = 0 \qquad (34)$$

ҹәбри тәнликләр системини вә ја компонентләрлә

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})c_1 - a_{12}c_2 - \cdots - a_{1n}c_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}c_1 - a_{n2}c_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})c_n = 0 \end{cases} \qquad (34')$$

системини аларыг.

Беләликлә, (33) вектор-функсијасынын (24) системинин тривиал олмаҹан һәлли олмасы үчүн c сүтун вектору (34) хәтти-бирҹинс ҹәбри тәнликләр системинин тривиал олмаҹан һәлли олмалыдыр.

Ҹәбрдән мә'лумдур ки, (34) системинин тривиал олмаҹан һәллинин варлығы үчүн, λ әдәди A матрисинин

$$\det(\lambda E - A) = 0 \qquad (35)$$

характеристик тәнлијинин көкү олмалыдыр. Бу тәнлијин сол тәрәфиндәки $f(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ ифадәси λ дәјишәнинә нәзәрән n-дәрәҹәли чохһәдлидир вә *она A матрисинин характеристик чохһәдлиси, көкләринә A матрисинин характеристик әдәдләри, (34) системинин характеристик әдәдләрә ујғун тривиал олмаҹан һәлләринә исә A матрисинин мәхсуси векторлары дејилир.*

Ајдындыр ки, A матрисинин елементләри һәгиги әдәдләр олдуғундан, $f(\lambda)$ чохһәдлиси n дәрәҹәли һәгиги әмсаллы чохһәдлидир. Ҹәбрин әсас теореминә көрә $f(\lambda)$ чохһәдлисинин комплекс әдәдләр мејданында n көкү (көкләрин тәкрарланма дәрәҹәси дә нәзәрә алынмагла) вардыр.

Ашағыдакы һаллара бахаг:

а) *Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мухтәлифдир.* Характеристик әдәдләри $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ илә ишарә едәк. Көстәрәк ки, бу һалда $\lambda_j E - A$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ матрисинин рангы $(n-1)$-ә бәрабәрдир. Доғрудан да, $f(\lambda_j) = 0$ вә

$$f'(\lambda_j) = \frac{d}{d\lambda}\det(\lambda E - A)|_{\lambda=\lambda_j} = M_{11} + M_{22} + \cdots + M_{nn} \neq 0$$

олдуғундан аларыг ки, $n-1$ тәртибли M_{kk} детерминантларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир, бурада M_{kk} илә $\lambda_j - a_{kk}$ елементинин ҹәбри тамамлајычысы ишарә едилмишдир. Демәли, $\lambda_j E - A$ матрисинин рангы $(n-1)$-ә бәрабәрдир вә буна көрә дә, (34) системинин, λ_j характеристик әдәдинә ујғун, сабит вуруг дәгиглијилә јеканә тривиал олмаҹан һәлли вар. Бу һәлли c^j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ илә, компонентләрини исә $c_1^j, c_2^j, \ldots, c_n^j$ илә ишарә едәк.

Беләликлә, (24) системинин n сајда

$$e^{\lambda_1 t}c^1, e^{\lambda_2 t}c^2, \ldots, e^{\lambda_n t}c^n \qquad (36)$$

һәлләрини гурмуш олуруг. Көстәрәк ки, бу һәлләр (24) системинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир.

Тутаг ки, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ әдәдләри үчүн

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t}c^1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}c^2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}c^n = 0, \ t \in (-\infty, +\infty) \qquad (37)$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликдән ардычыл оларағ $n-1$ дәфә төрәмә алмагла

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\alpha_1 c^1 + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\alpha_2 c^2 + \cdots + \lambda_n e^{\lambda_n t}\alpha_n c^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t}\alpha_1 c^1 + \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t}\alpha_2 c^2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t}\alpha_n c^n = 0 \end{cases} \qquad (38)$$

ејниликләрини аларыг.

Ајдындыр ки, (37), (38) ејниликләринин һәр бири n сајда бәрабәрликдән ибарәтдир. Онларын һәр биринин k-ҹы бәрабәрлијини көтүрәк:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}\alpha_1 c_k^1 + e^{\lambda_2 t}\alpha_2 c_k^2 + \cdots + e^{\lambda_n t}\alpha_n c_k^n = 0, \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\alpha_1 c_k^1 + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\alpha_2 c_k^2 + \cdots + \lambda_n e^{\lambda_n t}\alpha_n c_k^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t}\alpha_1 c_k^1 + \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t}\alpha_2 c_k^2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t}\alpha_n c_k^n = 0. \end{cases} \qquad (39)$$

Гејд олунмуш һәр бир $t \in (-\infty, +\infty)$ үчүн бу бәрабәрликләрә $\alpha_1 c_k^1, \alpha_2 c_k^2, \ldots, \alpha_n c_k^n$ мәҹһулларына нәзәрән ҹәбри тәнликләр системи кими бахаг. Системин баш детерминанты

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}.$$

Сағ тәрәфдә алынмыш детерминант Вандермонд детерминантыдыр вә мә'лумдур ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ әдәдләри мухтәлиф олдугда сыфырдан фәрглидир. Дикәр тәрәфдән $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t} \neq 0$ олдуғундан аларыг ки, системин детерминанты сыфырдан фәрглидир. Бурадан алыныр ки, (39) системинин истәнилән $k = 1, 2, \ldots, n$ үчүн јеканә тривиал $\alpha_1 c_k^1 = 0, \alpha_2 c_k^2 = 0, \ldots, \alpha_n c_k^n = 0$ һәлли вар. Лакин $c^1, c^2, \ldots c^n$ векторларынын һәр биринин һеч олмаса бир компоненти сыфырдан фәргли олдуғундан, аларыг ки, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ олмалыр. Бу көстәрир ки, (36) һәлләри хәтти асылы дејилләр.

б) *Характеристик тәнлијин көкләри мухтәлифдир, лакин онлар ичәрисиндә комплекс әдәд оланы вар.* Бу һалы арашдырмаг үчүн әввәлчә белә бир лемма исбат едәк.

Лемма. *Тутаг ки, $u(t)$, $v(t)$ һәгиги вектор-функсијалары үчүн, $x = u(t) + iv(t)$ комплекс вектор-функсијасы (24) системинин һәллидир. Онда $u(t)$ вә $v(t)$ вектор-функсијаларынын һәр бири һәмин системин һәллидир.*

Исбаты. Шәртә көрә

$$\dot{u}(t) + i\dot{v}(t) = Au(t) + iAv(t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликдән, ики комплекс әдәдин бәрабәрлијинә әсасән

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad \dot{v}(t) = Av(t)$$

ејниликләрини алырыг. Лемма исбат олунду.

Тутаг ки, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ характеристик әдәддир. Онда $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ әдәди дә характеристик әдәддир. Әкәр $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ характеристик әдәдинә ујғун олан мәхсуси вектору $c^1 = p + iq$ илә ишарә етсәк, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ характеристик әдәдинә ујғун олан мәхсуси вектору $c^2 = p - iq$ шәклиндә көтүрмәк олар; бурада p вә q һәгиги сүтун векторлардыр. Бу мәхсуси векторлара ујғун олан һәлләр

$$x^1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(p + iq), \quad x^2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}(p - iq)$$

олар. Бурадан Ејлер дүстуруна әсасән

$$x^1(t) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t),$$

$$x^2(t) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t) - ie^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t).$$

Леммаја әсасән бурадан аларыг ки, (24) системинин $x^1(t)$, $x^2(t)$ гошма комплекс һәлләринә ујғун, ики

$$\tilde{x}^1(t) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t), \quad \tilde{x}^2(t) = e^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t)$$

һәгиги һәлләри вардыр.

Башга гошма комплекс характеристик әдәдләрә ујғун олан һаллары да белә арашдырмаг олар.

Характеристик әдәдләр мухтәлиф олдуғундан, бу һалда да $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристик әдәдләринә ујғун гурулан һәгиги һәлләрин фундаментал систем тәшкил етмәси а) һалында олдуғу гајда илә көстәрилир.

в) *Характеристик әдәдләрдән тәкрарлананы олан һал.* Тутаг ки, λ_1 характеристик әдәди m дәфә тәкрарланыр. Онда,

$$f(\lambda_1) = f'(\lambda_1) = \cdots = f^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, \ f^{(m)}(\lambda_1) \neq 0$$

олдуғундан, а) һалында олдуғу гајда илә көстәрмәк олар ки, бу һалда $\lambda_1 E - A$ матрисинин $n - m$ тәртибли минорларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир, јә'ни һәмин матрисин рангы $r \geqslant n - m$. Демәли, (34) системинин λ_1 характеристик әдәдинә ујғун $n - r$ сајда хәтти асылы олмајан $c^1, c^2, \ldots, c^{n-r}$ һәлләри вар. Онда (24) системинин λ_1 әдәдинә ујғун,

$$x^1 = e^{\lambda_1 t}c^1, \ x^2 = e^{\lambda_1 t}c^2, \ldots, x^{n-r} = e^{\lambda_1 t}c^{n-r}$$

хәтти асылы олмајан һәлләри алыныр.

Хүсуси һалда, $r = n - m$ олдугда, јә'ни $\lambda_1 E - A$ матрисинин рангы минимум олдугда алырыг ки, (24) системинин λ_1 характеристик әдәдинә ујғун олан хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы онун тәкрарланма дәрәчәсинә бәрабәрдир. Башга тәкрарланан характеристик әдәдләр варса вә онлар үчүн дә $\lambda_i E - A$ матрисләринин рангы минимум исә, јухарыдакы гајда илә белә характеристик әдәдләрин тәкрарланма дәрәчәләри гәдәр хәтти асылы олмајан һәлләр гура биләрик.

Садә характеристик әдәдләрә ујғун олан һәлләри дә көтүрмәклә, гурулмуш бүтүн һәлләрин фундаментал систем тәшкил етдијини көстәрмәк олар.

$\lambda_1 E - A$ матрисинин рангы $r > n - m$ оларса, λ_1 характеристик әдәдинә ујғун гурулмуш хәтти асылы олмајан һәлләрин сајы m-дән аз олур. Бу һалда λ_1 характеристик әдәдинә ујғун олан һәлләр

$$x = e^{\lambda_1 t}(c^1 + c^2 t + \cdots + c^m t^{m-1}) \tag{40}$$

шәклиндә ахтарылыр вә $c^1, c^2, \ldots, c^m$ векторларыны тапмаг үчүн, (40) ифадәсини (24) системиндә јазыб, $e^{\lambda_1 t}$-јә ихтисар етдикдән сонра, алынмыш чохһәдлиләрин әмсалларыны бәрабәрләшдирмәк лазымдыр. Бу заман $c^1, c^2, \ldots, c^m$ векторларына нәзәрән

$$(\lambda_1 E - A)c^m = 0,$$
$$(\lambda_1 E - A)c^{m-1} = (1 - m)c^m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda_1 E - A)c^1 = -c^2$$

системләрини аларыг. Бу системләри јухарыдан ашағыја һәлл едиб, системин (40) шәклиндә һәллини тапырыг.

Гејд едәк ки, һәр һансы характеристик әдәд тәкрарланан комплекс әдәд исә, әввәлчә онун тәкрарланма дәрәчәси гәдәр хәтти асылы олмајан комплекс һәлләри гуруб, сонра јухарыдакы гајда илә һәмин һәлләрдән ујғун һәгиги һәлләри ајырмаг лазымдыр.

Мисаллар.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$

системини һәлл едәк. Бу систем үчүн

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 1\\ 1 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-8\lambda^2+22\lambda-20$$

чохһәдлисинин көкләри $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3+i$, $\lambda_3=3-i$.

Ајдындыр ки, $\lambda_1=2$ характеристик әдәдинә ујғун $(\lambda_1 E-A)c=0$ системи

$$\begin{cases} c_2=0,\\ c_1+c_2-c_3=0,\\ -c_1+2c_2+c_3=0\end{cases}$$

шәклиндәдир вә $c_1=1$, $c_2=0$, $c_3=1$ онун һәллидир. Характеристик чохһәдлинин $\lambda_2=3+i$ көкүнә ујғун олан c хүсуси векторуну, компонентләри a_1+ib_1, a_2+ib_2, a_3+ib_3 олан сүтун вектор кими ахтарсаг

$$\begin{cases} (1+i)(a_1+ib_1)-a_2-ib_2=0,\\ -a_1-ib_1+ia_2-b_2+a_3+ib_3=0,\\ a_1+ib_1-2a_2-2ib_2+ia_3-b_3=0\end{cases}$$

системи алынар. Бу системин $a_1=0$, $b_1=1$, $a_2=-1$, $b_2=1$, $a_3=1$, $b_3=2$ һәллини көтүрәк.

Онда бахылан диференсиал тәнликләр системинин $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3+i$ характеристик әдәдләринә ујғун олан һәлләри

$$x^1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad x^2(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}-\sin t+i\cos t\\ -\cos t-\sin t+i(\cos t-\sin t)\\ \cos t-2\sin t+i(2\cos t+\sin t)\end{pmatrix}$$

Ајдындыр ки, $\lambda_3=3-i$ характеристик әдәдинә ујғун олан $x^3(t)$ һәллини $x^2(t)$ һәллинин гошмасы кими көтүрмәк олар вә леммаја әсасән алырыг ки, бахылан системин

$$x^1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \tilde{x}^2(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t-\sin t\\ \cos t-2\sin t\end{pmatrix},$$

$$\tilde{x}^3(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\\ 2\cos t+\sin t\end{pmatrix}$$

шәклиндә хәтти асылы олмајан һәгиги һәлләри вар. Она көрә бахылан системин үмуми һәлли

$$x=c_1x^1(t)+c_2\tilde{x}^2(t)+c_3\tilde{x}^3(t).$$

Бурада c_1, c_2, c_3 ихтијари һәгиги сабитләрдир.

2. $$\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1-x_2-x_3,\\ \dot{x}_2=3x_1-2x_2-3x_3,\\ \dot{x}_3=-x_1+x_2+2x_3\end{cases}$$

системи үчүн $f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$ характеристик чохһәдлисинин көкләри $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$ олур. $\lambda_1=0$ характеристик әдәдинә ујғун олан $(\lambda_1E-A)c=0$ системи

$$\begin{cases}2c_1-c_2-c_3=0,\\ 3c_1-2c_2-3c_3=0,\\ -c_1+c_2+2c_3=0\end{cases}$$

шәклиндәдир вә $c_1=1$, $c_2=3$, $c_3=-1$ онун һәллидир. Ајдындыр ки, $\lambda_2=\lambda_3=1$ характеристик әдәди ики дәфә тәкрарланыр.

$$\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

матрисинин рангы $r=1$-дир. Һәм дә $n-m=1$ олдуғундан алырыг ки, λ_2E-A матрисинин рангы минимумдур.

$(\lambda_2E-A)c=0$ системини ачыг шәкилдә јазаг:

$$\begin{cases}c_1-c_2-c_3=0,\\ 3c_1-3c_2-3c_3=0,\\ c_1-c_2-c_3=0.\end{cases}$$

Бу системин хәтти асылы олмајан ики $c_1=1$, $c_2=0$, $c_3=1$ вә $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=0$ һәлләри вар.

Бахылан системин характеристик әдәдләрә ујғун һәлләри

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t,\quad x^3(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^t$$

шәклиндәдирләр вә онун үмуми һәлли

$$x=c_1x^1(t)+c_2x^2(t)+c_3x^3(t)$$

олар; бурада c_1, c_2, c_3 ихтијари сабитләрдир.

3. Характеристик әдәдләри тәкрарланан вә $\lambda E-A$ матрисинин рангы минимум олмајан һала мисал олараг

$$\begin{cases}\dot{x}_1=4x_1-x_2,\\ \dot{x}_2=3x_1+x_2-x_3,\\ \dot{x}_3=x_1+x_3\end{cases}$$

системини көстәрмәк олар. Бу системин характеристик әдәдләри $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ вә

$$2E-A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрисинин рангы $r = 2$-дир. Демәли, $r > n - m = 0$. Она көрә дә системин һәллини

$$x = e^{2t}\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}t^2\right\}$$

шәклиндә ахтараг. Бу заман

$$\begin{cases}2c_1 - c_2 = 0,\\ 3c_1 - c_2 - c_3 = 0,\\ c_1 - c_3 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}2b_1 - b_2 = 2c_1,\\ 3b_1 - b_2 - b_3 = 2c_2,\\ b_1 - b_3 = 2c_3,\end{cases} \quad \begin{cases}2a_1 - a_2 = b_1,\\ 3a_1 - a_2 - a_3 = b_2,\\ a_1 - a_3 = b_3\end{cases}$$

системләрини аларыг. Бу системләрин ујғун оларег c_1, $c_2 = 2c_1$, $c_3 = c_1$, b_1, $b_2 = 2b_1 - 2c_1$, $b_3 = b_1 - 2c_1$ вә a_1, $a_2 = 2a_1 - b_1$, $a_3 = a_1 - b_1 + 2c_1$ һәлләринә бахаг; бурада a_1, b_1, c_1 ихтијари сабитләрдир. Онда бахылан системин үмуми һәлли

$$x_1 = (a_1 + b_1 t + c_1 t^2)\,e^{2t},$$
$$x_2 = [2a_1 - b_1 + (2b_1 - 2c_1)t + 2c_1 t^2]\,e^{2t},$$
$$x_3 = [a_1 - b_1 + 2c_1 + (b_1 - 2c_1)t + c_1 t^2]\,e^{2t}$$

олар.

4. **Мәсәлә.** Ваһид мигдарда олан A маддәси кимјәви реаксија нәтиҹәсиндә B вә C маддәләринә парчаланыр. Парчаланмадан алынан һәр маддәнин әмәлә кәлмә сүр'әти верилмиш маддәнин бахылан андакы мигдары илә мүтәнасибдир. Реаксија башланандан бир саат сонра B маддәсиндән $\frac{1}{8}$ гәдәр, C маддәсиндән исә $\frac{3}{8}$ гәдәр алындығыны биләрәк онларын замандан асылы дәјишмәсини тапмалы.

Һәлли. B маддәсинин t анындакы мигдарыны $x(t)$ илә, C маддәсинин мигдарыны исә $y(t)$ илә ишарә едәк. Онда бу маддәләрин әмәлә кәлмә сүр'әти $\dot{x}(t)$ вә $\dot{y}(t)$ олар. t анында A маддәсиндән $1 - (x + y)$ гәдәр галдығындан, мәсәләнин шәртинә көрә

$$\begin{cases}\dot{x} = \kappa_1[1 - (x + y)],\\ \dot{y} = \kappa_2[1 - (x + y)]\end{cases}$$

хәтти бирҹинс олмајан тәнликләр системини аларыг. Бурада κ_1, κ_2 мүтәнасиблик әмсалларыдыр. $x = 0$, $y = 1$ бу системин бир һәлли, $x = c_1 + c_2 e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}$, $y = -c_1 + c_2\frac{\kappa_2}{\kappa_1}e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}$ исә ујғун бирҹинс системин үмуми һәлли олдуғундан,

$$x = c_1 + c_2 e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}, \quad y = 1 - c_1 + c_2\frac{\kappa_2}{\kappa_1}e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}$$

бахылан системин үмуми һәлли олур.

Реаксијанын әввәлиндә (јә'ни $t = 0$ олдугда) $x = 0$, $y = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $c_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}$, $c_2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}$ олар. Демәли,

$$x = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}[1 - e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}], \quad y = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}[1 - e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}].$$

Шәртә көрә бир саатдан сонра $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{3}{8}$. Буну нәзәрә алсаг, $\kappa_2 = 3\kappa_1$ вә $e^{-4\kappa_1} = 2^{-1}$ олар.

Беләликлә, B вә C маддәләринин әмәлә кәлмә ганuну

$$x = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right), \quad y = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right).$$

§ 7. КВАДРАТУРА ИЛӘ ҺӘЛЛ ОЛУНАН ДӘЈИШӘН ӘМСАЛЛЫ СИСТЕМЛӘР ҺАГГЫНДА

Сабит әмсаллы системләрдән фәргли олараг тәртиби $n \geq 2$ олан дәјишән әмсаллы системләри һәлл етмәк һәмишә мүмкүн олмур.

Бу параграфда квадратура илә һәлл олунан бә'зи дәјишән әмсаллы системләрә бахылыр.

а) Тутаг ки,

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{10}$$

системи верилмишдир вә $A(t)$ матриси өзүнүн интегралы илә коммутативдир, јә'ни

$$A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\; A(t), \quad t_0,\ t \in (\alpha, \beta). \tag{41}$$

Көстәрәк ки, бу һалда

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} \tag{*}$$

матриси (10) системинин фундаментал матрисидир.

Доғрудан да, експонентин тә'рифинә көрә

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} = E + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\right)^3 + \cdots$$

олдуғундан

$$\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} = A(t) + \frac{1}{2!}\left(A(t)\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\; A(t)\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left\{A(t)\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^2+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\left(A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\ A(t)\right)\right\}+\cdots.$$

Бурадан (41) шәртинә әсасән

$$\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=A(t)\left\{E+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^2+\cdots\right\}=$$

$$=A(t)e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}.$$

Демәли, (*) матриси (10) системинә ујғун олан (14) матрис-системинин һәллидир. Дикәр тәрәфдән, (17) дүстуруна әсасән

$$\det e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=\exp\int_{t_0}^{t}Sp\,A(\tau)d\tau>0$$

олдуғундан алырыг ки, (*) матриси (10) системинин фундаментал матрисидир.

Гејд едәк ки, (41) шәрти, $A(t)$ матриси диагонал матрис вә сабит матрис олдуғда өдәнир.

Ајдындыр ки, $A(t)$ матриси елементләри $a_{11}(t)$, $a_{22}(t),\ldots$ $\ldots, a_{nn}(t)$ олан диагонал матрис исә, $e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}$ матриси, елементләри $\exp\int_{t_0}^{t}a_{11}(\tau)d\tau$, $\exp\int_{t_0}^{t}a_{22}(\tau)d\tau,\ldots,\exp\int_{t_0}^{t}a_{nn}(\tau)d\tau$ олан диагонал матрисдир.

б) Тутаг ки, (10) системиндә $A(t)$ матриси

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t), & \ldots, & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

шәклиндә үчбучаг матрисдир. Бу һалда (10) системини компонентләрлә јазсаг,

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}(t)x_1,\\ \dot{x}_2=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dot{x}_n=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n\end{cases}$$

системини аларыг. Бу системи биринчи тәнлијиндән башлајараг ардычыл интегралламагла онун үмуми һәллини тапа биләрик.

$A(t)$ матриси баш диагоналдан ашағыда сыфырлар дуран үчбучаг матрис оларса, бу әмәлијјаты системин сонунчу тәнлијиндән башлајараг апармаг лазымдыр.

§ 8. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) Үмуми анлајышлар. Тутаг ки,

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0 \tag{42}$$

тәнлији верилмишдир; бурада $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ әмсаллары мүәјјән (α,β) интервалында кәсилмәз функсијалардыр. Бу тәнлијә n тәртибли хәтти бирчинс тәнлик, $L(y)=y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y$ ифадәсинә исә хәтти дифференсиал оператор дејирик.

IV фәсилдә үмуми шәкилдә верилмиш n тәртибли тәнлијин n сајда биртәртибли тәнликләр системинә кәтирилмәси үсулу верилмишдир. Һәмин үсулун көмәјилә (42) тәнлијини ($y=x_1$, $\dot{y}=x_2,\ldots,y^{(n-1)}=x_n$ гәбул етмәклә)

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\\ \dot{x}_n=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n\end{cases} \tag{43}$$

шәклиндә хәтти бирчинс тәнликләр системинә кәтирмәк олар. Ајдындыр ки, (43) системи әввәлки параграфларда арашдырдығымыз (10) хәтти системинин хүсуси һалыдыр. (43) системини

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t)\end{pmatrix} \tag{44}$$

вектор-матрис ишарәләринин көмәјилә

$$\dot{x}=A(t)x \tag{43'}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Алынан (43′) системи (10) системинин хүсуси шәкли олдуғундан, јухарыда (10) системи үчүн исбат олунан фактлар; һәм дә (42) тәнлији үчүн доғрудур.

IV фәсилдәки мүһакимәләрин көмәјилә алырыг ки, компонентләри $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ олан $x(t)$ сүтун вектор-функсијасы (43) системинин һәлли исә, $y = x_1(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин һәллидир вә тәрсинә, $y = y(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин һәлли исә, компонентләри $y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ олан $x(t)$ сүтун вектор-функсијасы (43) системинин һәллидир.

Бурадан ајдындыр ки, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијалары (42) тәнлијинин һәлләри исә, (43) системинин онлара ујғун олан һәлләри васитәсилә дүзәлдилмиш Вронски детерминанты

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \qquad (45)$$

шәклиндәдир.

(45) детерминантына (42) тәнлијинин һәлләриндән дүзәлдилмиш Вронски детерминанты дејилир.

Ајдындыр ки, (43′) системиндәки $A(t)$ матрисинин изи $Sp\,A(t) = -a_1(t)$. Она ҝөрә дә бу систем үчүн (јә'ни (42) тәнлији үчүн) Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуру

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\,d\tau\right), \; t_0, t \in (\alpha, \beta) \qquad (46)$$

шәклинә дүшүр. Бурадан алынир ки, $a_1(t)$ функсијасы (α, β) интервалында кәсилмәздирсә вә (45) детерминанты мүәјјән $t = t_0$ нөгтәсиндә сыфырдан фәргли исә, һәмин детерминант истәнилән $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн сыфырдан фәрглидир.

(42) тәнлијинин (α, β) интервалында *хәтти асылы олмајан* $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *һәлләринә онун фундаментал һәлләр системи* дејилир.

Теорем 8. *Тутаг ки,* $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *функсијалары* (α, β) *интервалында (42) тәнлијинин һәлләридир. Бу һәлләрин фундаментал һәлләр системи олмасы үчүн, онлардан дүзәлдилмиш Вронски детерминантынын һәмин интервалда сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафидир.*

З ә р у р и л и ј и н и с б а т ы. Тутаг ки, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ һәлләри хәтти асылы олмајандыр, лакин онлардан дүзәлдилмиш Вронски детерминанты һәр һансы t_0 нөгтәсиндә ($t_0 \in (\alpha, \beta)$) сыфра чеврилир, јә'ни $W(t_0) = 0$. Онда

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) = 0, \\ c_1 \dot{y}_1(t_0) + c_2 \dot{y}_2(t_0) + \cdots + c_n \dot{y}_n(t_0) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

системинин $c_1, c_2, \ldots, c_n$ мәҹһулларына нәзәрән сыфырдан фәргли һәлләри вар ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ мәҹһулларынын әмсалларындан дүзәлмиш детерминант $W(t_0) = 0$ олдуғундан). Һәмин һәлләрдән бирини $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ илә ишарә едиб

$$\tilde{y}(t) = c_1^0 y_1(t) + c_2^0 y_2(t) + \cdots + c_n^0 y_n(t)$$

функсијасыны дүзәлдәк. Асанлыгла ҝөстәрмәк олар ки, (ҝөстәрмәли!) $\tilde{y}(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин

$$\tilde{y}(t_0) = 0, \; \dot{\tilde{y}}(t_0) = 0, \; \ldots, \; \tilde{y}^{(n-1)}(t_0) = 0$$

башланғыҹ шәртләрини өдәјән һәллидир.

Диҝәр тәрәфдән $y(t) \equiv 0$ функсијасы да (42) тәнлијинин һәмин башланғыҹ шәртләри өдәјән һәлли олдуғундан, Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлијинә әсасән алырыг ки, $\tilde{y}(t) \equiv 0$, јә'ни

$$c_1^0 y_1(t) + c_2^0 y_2(t) + \cdots + c_n^0 y_n(t) = 0, \; t \in (\alpha, \beta).$$

$c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ әдәдләринин һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, бурадан алырыг ки, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијалары (α, β) интервалында хәтти асылыдырлар. Бу исә теоремин шәртинә зиддир. Демәли, $W(t_0) \neq 0$. Бурадан (46) дүстуруна әсасән алырыг ки, $W(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \beta)$.

К а ф и л и ј и н и с б а т ы. Тутаг ки, (42) тәнлијинин $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш $W(t)$ детерминанты (α, β) интервалында сыфырдан фәрглидир, лакин бу һәлләр хәтти асылыдырлар, јә'ни һамысы бирдән сыфыр олмајан $l_1, l_2, \ldots, l_n$ әдәдләри вар ки,

$$l_1 y_1(t) + l_2 y_2(t) + \cdots + l_n y_n(t) = 0, \; t \in (\alpha, \beta) \qquad (47_1)$$

ејнилији өдәнир.

Бу ејнилији ардыҹыл олараг $n-1$ дәфә дифференсиаллamaгла

$$\begin{cases} l_1 y_1(t) + l_2 y_2(t) + \cdots + l_n y_n(t) = 0, \\ l_1 \dot{y}_1(t) + l_2 \dot{y}_2(t) + \cdots + l_n \dot{y}_n(t) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ l_1 y_1^{(n-1)}(t) + l_2 y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + l_n y_n^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases} \qquad (47_2)$$

ејниликләрини аларыг.

Фәрзијјәјә ҝөрә $l_1, l_2, \ldots, l_n$ әдәдләринин һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, (47_1), (47_2)-дән алырыг ки, $W(t)$ детерминантынын сүтунлары арасында хәтти асылылыг вардыр. Она ҝөрә $W(t) = 0$ олмалыдыр. Бу исә $W(t) \neq 0$ шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Теорем 9. *Тутаг ки,* $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *функсијалары (42) тәнлијинин фундаментал һәлләр системидир. Онда бу тәнлијин үмуми һәлли*

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) \qquad (48)$$

дүстуру илә верилир; бурада $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләрдир.

Исбаты. Көстәрәк ки, ихтијари $y_0, y_0^{\prime}, \ldots, y_0^{(n-1)}$ әдәдләри үчүн (42) тәнлијинин

$$y(t_0) = y_0, \; \dot{y}(t_0) = y_0^{\prime}, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (49)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини (48) аиләсиндән $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини сечмәклә алмаг олар.

Ајдындыр ки, (48) һәллинин (49) башланғыч шәртләрини өдәмәси үчүн $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләри

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) = y_0, \\ c_1 \dot{y}_1(t_0) + c_2 \dot{y}_2(t_0) + \cdots + c_n \dot{y}_n(t_0) = y_0^{\prime}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

чәбри тәнликләр системинин һәлли кими тапылмалыдыр. 8-чи теоремә әсасән, мәчһулларын әмсалындан дүзәлмиш детерминант $W(t_0) \neq 0$ олдуғундан, бу системин јеканә $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0$ һәлли вардыр. Онда

$$y(t) = c_1^0 y_1(t) + c_2^0 y_2(t) + \cdots + c_n^0 y_n(t)$$

функсијасы (42) тәнлијинин (49) башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли олар. Теорем исбат олунду.

(42) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини гурмаг үчүн һәр һансы гејри-мәхсуси $A = (a_{ij})$ матриси көтүрүб, тәнлијин

$$y(t_0) = a_{1i}, \; \dot{y}(t_0) = a_{2i}, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(t_0) = a_{ni} \; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

шәртләрини өдәјән һәллини $y_i(t)$ илә ишарә едәк. Бу һалда илә гурулан $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш Вронски детерминантынын t_0 нөгтәсиндәки гијмәти $W(t_0) = \det A \neq 0$ олдуғундан, һәмин һәлләр фундаментал систем тәшкил едир.

Бурадан ајдындыр ки, $A = (a_{ij})$ матрисини мүхтәлиф гајдада сечмәклә мүхтәлиф фундаментал һәлләр системи гурмаг олар.

Әкәр (42) тәнлијинин ики $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ вә $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ фундаментал һәлләри системи мә'лумдурса, 4-чү вә 9-чу теоремләрә әсасән, елә гејри-мәхсуси $B = (b_{ij})$ матриси вардыр ки,

$$z_i(t) = b_{i1} y_1(t) + b_{i2} y_2(t) + \cdots + b_{in} y_n(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тутаг ки, (α, β) интервалында n тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри олан $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијалары верилмишдир вә онлардан дүзәлдилмиш $W(t)$ Вронски детерминанты сыфырдан фәргли̇дир. Онда, әмсаллары јеканә гајдада илә тә'јин олунан (42) шәкилли елә тәнлик вардыр ки, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијалары онун фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Бу тәнлик

$$\frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) & y \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) & \dot{y} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \ldots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (50)$$

шәклиндә гурулур.

Доғрудан да, (50) тәнлијиндә $y = y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ көтүрсәк, детерминантын ики сүтуну ејни олдуғундан, о, ејнилик кими сыфра чевриләр. Јә'ни $y = y_k(t)$ һәллдир.

Гурулан (50) тәнлијинин јеканә олмасы исә үмуми һалда систем үчүн верилән исбатдан алыныр.

б) *Тәртибин азалдылмасы.* Ајдындыр ки, (42) тәнлији ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс тәнликдир. Одур ки, IV фәсилдә верилән үмуми үсула әсасән (IV фәсил, § 4) (42) тәнлијиндә

$$y = \exp\left(\int z(t)\,dt\right)$$

әвәзләмәси апармагла, јени ахтарылан $z(t)$ функсијасына нәзәрән $n-1$ тәртибли тәнлик алмаг олар. Лакин алынан тәнлик гејри-хәтти тәнлик олар.

Тутаг ки, $y = y_1(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин бир хүсуси һәллидир. Тәнликдә $y = y_1(t)z$ әвәзләмәси апараг. Онда ахтарылан z функсијасына нәзәрән

$$y_1(t) z^{(n)} + \left(n \dot{y}_1(t) + a_1(t) y_1(t)\right) z^{(n-1)} + \cdots + L[y_1(t)]\, z = 0$$

тәнлији алынар. Бурадан, $L[y_1(t)] = 0$ олдуғундан, ($y_1(t) \neq 0$ олан интервалларда)

$$z^{(n)} + b_1(t) z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(t) \dot{z} = 0.$$

Бурада $\dot{z} = u$ әвәзләмәси апараraг, u-ја нәзәрән $n-1$ тәртибли хәтти бирчинс

$$u^{(n-1)} + b_1(t) u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}(t) u = 0 \qquad (51)$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнликдәки $b_1(t), \ldots, b_{n-1}(t)$ әмсаллары $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ әмсаллары вә $y_1(t)$ һәлли васитәсилә ифадә олунур.

Беләликлә, (42) тәнлијинин $y = y_1(t)$ хүсуси һәлли мә'лум олдугда, һәмин тәнликдә

$$y = y_1(t)\int u(t)\,dt$$

əvəzləməsi aparmagla, onun tərtibini bir vahid azaldy (51) xətti tənliјini almag olar.

Əvəzləmədən aјdyndyr ki, (42) tənliјinin xətti asylы olmaјan iki $y_1(t)$, $y_2(t)$ xүsusi həlləri mə'lum olarsa, $u_1(t) = \left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)'$ funksiјasy (51) tənliјinin xүsusi həlli olar və deməli, јuxarydaky gaјda ilə onun da tərtibini bir vahid azaltmag olar. Јəni (42) tənliјinin tərtibini iki vahid azaltmag olar.

Bu gaјda ilə alyryg ki, (42) tənliјinin κ saјda xətti asylы olmaјan xүsusi həlləri mə'lum olarsa, onun tərtibini κ vahid azaltmag olar. Onda $n-\kappa$ tərtibli xətti tənlik alynar.

Xүsusi halda, (42) tənliјi

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0 \qquad (52)$$

şəkilli iki tərtibli xətti tənlik isə, јuxarydaky gaјdaјa əsasən, bu tənliјin bir $y = y_1(t)$ xүsusi həlli mə'lum oldugda onu kvadratura ilə həll etmək olar.

Doғrudan da, bu halda јuxaryda aparylan əvəzləmə nəticəsində bir tərtibli xətti tənlik alynyr. Lakin Ostrogradski-Liuvill-Јakobi dүsturundan istifadə edərək (52) tənliјinin үmumi həllini aşaғydaky gaјda ilə tapmag olar.

Ostrogradski-Liuvill-Јakobi dүsturuna əsasən

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ \dot{y}_1 & \dot{y} \end{vmatrix} = c_1 \exp\left(-\int a_1(t)\,dt\right).$$

Buradan

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{c_1}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int a_1(t)\,dt\right)$$

və inteqrallasag, alaryg

$$y = y_1(t)\left\{c_1\int\frac{1}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int a_1(t)\,dt\right)dt + c_2\right\}.$$

Misallar.

1. $(2t-1)\dddot{y} - 4t\ddot{y} - (2t-3)\dot{y} + (4t+2)y = 0$ tənliјinin $y_1 = e^{-t}$, $y_2 = e^{2t}$ xүsusi həlləri verilmişdir. Tərtibi azaltma үsulu ilə onu həll edək. Bunun үçүn tənlikdə

$$y = e^{-t}\int u\,dt$$

əvəzləməsi aparag. Buradan $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$ törəmələrini də tapyb tənlikdə јazsag, u-јa nəzərən

$$(2t-1)\ddot{u} - (10t-3)\dot{u} + 12tu = 0$$

tənliјini alaryg. Baxylan tənlik үçүn $y_2 = e^{2t}$ funksiјasy da xүsusi həll oldugundan, əvəzləməјə əsasən alyryg ki, $u_1 = 3e^{3t}$ funksiјasy sonuncu tənliјin xүsusi həlli olur. Odur ki, axyrynсы tənlikdə

$$u = e^{3t}\int z\,dt$$

əvəzləməsi aparsag, z-ə nəzərən

$$(2t-1)\dot{z} + (2t-3)z = 0$$

tənliјini alaryg. Alynmyş tənlik dəјişənlərinə aјrylan tənlikdir və onun həlli

$$z = c_1(2t-1)e^{-t}.$$

Onda $u = e^{3t}\int z\,dt$ əvəzləməsinə əsasən

$$u = c_1(2t+1)e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

olar və bunu $y = e^{-t}\int u\,dt$ əvəzləməsində nəzərə alsag, baxylan tənliјin үmumi həllini

$$y = c_1 t e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$$

şəklində taparyg.

2. Ostrogradski—Liuvill dүsturunun köməјilə $y = \cos t$ xүsusi həllinə görə

$$\ddot{y} - 2\dot{y}\,\mathrm{ctg}\,t - y = 0$$

tənliјinin үmumi həllini tapag.

Dүstura əsasən

$$y = \cos t\left\{c_1\int\frac{e^{2\int \mathrm{ctg}\,t\,dt}}{\cos^2 t}\,dt + c_2\right\} =$$
$$= \cos t\left\{c_1\int\frac{e^{2\ln|\sin t|}}{\cos^2 t}\,dt + c_2\right\} =$$
$$= \cos t\left\{c_1\int \mathrm{tg}^2 t\,dt + c_2\right\}.$$

Buradan baxylan tənliјin

$$y = c_1(\sin t - t\cos t) + c_2\cos t$$

үmumi həllini alyryg.

в) *Goşma tənlik.* Јүksək tərtibli xətti birçins (42) tənliјi (43′) sisteminə ekvivalent oldugundan, sistem үçүn verilmiş goşma sistem anlaјyşy bu tənliјə də aid edilə bilər.

Tə'rifə əsasən (43′) sistemi ilə goşma olan sistem

$$\dot{z} = -A^*(t)z$$

олур; бурада

$$-A^*(t)=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&a_n(t)\\-1&0&\dots&0&a_{n-1}(t)\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&\dots&-1&a_1(t)\end{pmatrix}.$$

Бу систем координатларла

$$\begin{cases} \dot z_1 = a_n(t) z_n,\\ \dot z_2 = -z_1 + a_{n-1}(t) z_n,\\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot z_{n-1} = -z_{n-2}+a_2(t) z_n,\\ \dot z_n = -z_{n-1}+a_1(t) z_n\end{cases} \qquad (53)$$

шәклиндә јазылар.

Тутаг ки, $a_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$ әмсалларынын (α, β) интервалында $n-k$ тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри вар. Онда $z_n = z$ гәбул едәрәк, (53) системинин ахырынчы тәнлијиндән башлајараг ардычыл диференсиалламагла алырыг ки, һәмин систем

$$M(z)\equiv z^{(n)}-(a_1(t)z)^{(n-1)}+\dots+(-1)^n a_n(t) z=0 \qquad (54)$$

шәклиндә тәнлијә еквивалентдир.

(54) тәнлијинә (42) тәнлији илә гошма тәнлик, $M(z)$ операторуна исә $L(y)$ оператору илә гошма оператор дејилир. $n = 2m$ олдугда $L(y) = M(y)$ оларса, $L(y)$ операторуна өзү-өзүнә гошма оператор, $L(y) = 0$ тәнлијинә исә өзү-өзүнә гошма тәнлик дејилир.

Мисаллар. 1. $L(y)=(p(t)y')'+q(t)y$ оператору өзү-өзүнә гошма оператордур.

2. $L(y)=y^{IV}+a_1(t)\dddot y+a_2(t)\ddot y+a_3(t)\dot y+a_4(t)y$ операторунун өзү-өзүнә гошма олмасы үчүн $a_1(t)=0$, $a_3(t)=\dot a_2(t)$ шәртләринин өдәнмәси зәрури вә кафидир. Бу шәртләр өдәндикдә алырыг ки,

$$L(y)\equiv y^{IV}+(a_2(t)y')^{\cdot}+a_4(t)y=0$$

тәнлији өзү-өзүнә гошмадыр.

г) *Хәтти бирчинс олмајан тәнлик. Сабитләрин вариасијасы үсулу.* Тутаг ки, n-тәртибли хәтти бирчинс олмајан

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_n(t)y=f_0(t) \qquad (55)$$

тәнлији верилмишдир, бурада $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ әмсаллары вә $f_0(t)$ функсијасы мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәз функсијалардыр.

Ајдындыр ки, (55) тәнлијинә ујғун олан систем

$$\dot x = A(t)x+f(t) \qquad (56)$$

шәклиндә олар, бурада x вектору вә $A(t)$ матриси (44) дүстурлары илә тә'јин олунурлар, $f(t)$ исә компонентләри 0, 0, ..., $f_0(t)$ олан сүтун вектордур.

Бурадан 3-чү параграфдакы мүһакимәләрә әсасән ајдындыр ки, (55) тәнлијинин бир хүсуси һәлли мә'лум олдугда, онун үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләси ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләсинә кәтирилир.

Бир хүсуси һәлл мә'лум олмадыгда (55) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн сабитләрин вариасијасы үсулуну тәтбиг едәк. Бу үсулу (56) системинә тәтбиг етмәклә (55) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг олар. Лакин һәмин үсулу билаваситә (55) тәнлијинә тәтбиг етмәк даһа әлверишлидир.

Теорем 10. *Тутаг ки, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ функсијалары $L(y) = 0$ тәнлијинин (α, β) интервалында фундаментал һәлләр системидир. Онда $L(y)=f_0(t)$ тәнлијинин үмуми һәлли*

$$y=\sum_{k=1}^n c_k y_k(t)+\sum_{k=1}^n y_k(t)\int_{t_0}^t \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)}f_0(\tau)\,d\tau \qquad (57)$$

дүстуру илә верилир; бурада $c_1, c_2, \dots, c_n$ ихтијари сабитләр, $t_0\in(\alpha, \beta)$ ихтијари нөгтә, $W_k(t)$ исә $W(t)$ Вронски детерминантынын k-чы сүтунуну 0, 0, ..., 1 илә әвәз етмәклә алынан детерминантдыр.

Исбаты. 9-чу теоремә әсасән, $L(y) = 0$ тәнлијинин үмуми һәлли (48) дүстуру илә верилир. Бу дүстурда $c_1, c_2, \dots, c_n$ сабитләрини һамар $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ функсијалары илә әвәз едәрәк онлары елә сечәк ки,

$$y(t)=c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)+\dots+c_n(t)y_n(t) \qquad (58)$$

ифадәси (55) тәнлијинин һәлли олсун. Бунун үчүн n сајда шәрт вермәк лазымдыр. Бу шәртләрдән бири (58) ифадәсинин (55) тәнлијини өдәмәсиндән алыныр. Галан $n-1$ сајда шәрти исә ихтијари гајда илә вермәк олар. Бу шәртләри елә вермәјә чалышаг ки, (58) илә тә'јин олунан $y(t)$ функсијасынын төрәмәләри мүмкүн гәдәр садә олсун. Бу мәгсәдлә (58) функсијасындан төрәмә алаг:

$$\dot y(t)=\sum_{k=1}^n c_k(t)\dot y_k(t)+\sum_{k=1}^n \dot c_k(t)y_k(t),$$

бурада $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ функсијаларыны елә сечәк ки

$$\dot c_1(t)y_1(t)+\dot c_2(t)y_2(t)+\dots+\dot c_n(t)y_n(t)=0 \qquad (59_1)$$

олсун. Онда

$$\dot y(t)=\sum_{k=1}^n c_k(t)\dot y_k(t) \qquad (60_1)$$

олар вә бурадан јенә төрәмә алсаг,

$$\ddot y(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,\ddot y_k(t)+\sum_{k=1}^{n}\dot c_k(t)\,\dot y_k(t).$$

Бурада $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ функсијаларыны елә сечәк ки

$$\dot c_1(t)\dot y_1(t)+\dot c_2(t)\dot y_2(t)+\cdots+\dot c_n(t)\dot y_n(t)=0, \qquad (59_2)$$

олсун. Онда

$$\ddot y(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,\ddot y_k(t). \qquad (60_2)$$

Бу гајданы $n-1$ дәфә тәкрар етдикдән сонра

$$\dot c_1(t)y_1^{(n-2)}(t)+\dot c_2(t)\,y_2^{(n-2)}(t)+\cdots+\dot c_n(t)\,y_n^{(n-2)}(t)=0, \qquad (59_{n-1})$$

$$y^{(n-1)}(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,y_k^{(n-1)}(t). \qquad (60_{n-1})$$

Ахырынчы бәрабәрликдән төрәмә алсаг,

$$y^{(n)}(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k(t)\,y_k^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}\dot c_k(t)\,y_k^{(n-1)}(t). \qquad (60_n)$$

Инди (58), (60_1), $(60_2), \ldots, (60_n)$ ифадәләрини (55) тәнлијиндә јазаг вә $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијаларынын $L(y)=0$ тәнлијинин һәлләри олдуғуну нәзәрә алаг. Онда $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ функсијаларына нәзәрән

$$\dot c_1(t)\,y_1^{(n-1)}(t)+\dot c_2(t)\,y_2^{(n-1)}(t)+\cdots+\dot c_n(t)\,y_n^{(n-1)}(t)=f_0(t) \qquad (59_n)$$

тәнлијини дә алынар.

Беләликлә, $\dot c_1(t), \dot c_2(t), \ldots, \dot c_n(t)$ төрәмәләринә нәзәрән n сајда (59_1), $(59_2), \ldots, (59_n)$ хәтти бирчинс олмајан тәнликләр системини алырыг. Системдә $\dot c_1(t), \dot c_2(t), \ldots, \dot c_n(t)$ мәчһулларынын әмсалларындан дүзәлмиш детерминант, $L(y)=0$ тәнлијинин $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ фундаментал һәлләр системиндән дүзәлдилмиш Вронски детерминанты олдуғундан, сыфырдан фәрглидир. Одур ки, һәмин системдән јеканә гајда илә

$$\dot c_k(t)=\frac{W_k(t)}{W(t)}f_0(t), \quad k=1, 2, \ldots, n$$

тә'јин едирик. Бурадан да алырыг ки,

$$c_k(t)=c_k+\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(\tau)}{W(\tau)}f_0(\tau)\,d\tau, \quad k=1, 2, \ldots, n. \qquad (61)$$

Бу ифадәләри (58) дүстурунда јеринә јазсаг, (57) дүстуруну алырыг. Теорем исбат олунду.

Ајдындыр ки, (57) дүстурунда 1-чи топланан $L(y)=0$ бирчинс тәнлијинин үмуми һәллидир. Билаваситә јохламаг олар ки, 2-чи топланан $L(y)=f_0(t)$ тәнлијинин $y(t_0)=0$, $\dot y(t_0)=0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0)=0$ шәртләрини өдәјән хүсуси һәллидир. Бурадан бир даһа алынып ки, бирчинс олмајан $L(y)=f_0(t)$ тәнлијинин үмуми һәлли, ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәлли илә өзүнүн бир хүсуси һәллинин чәминә бәрабәрдир.

Мисал. $\ddot y-2y\,\mathrm{ctg}\,t-y=\sin^2 t$ тәнлијини сабитләрин вариасијасы үсулу илә һәлл едәк. Билаваситә јохламаг олар ки, $y_1=\sin t-t\cos t$, $y_2=\cos t$ функсијалары ујғун бирчинс тәнлијин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Одур ки, бирчинс олмајан тәнлијин һәллини

$$y=c_1(t)(\sin t-t\cos t)+c_2(t)\cos t$$

шәклиндә ахтараг. Бурадан төрәмә алсаг,

$$\dot y=c_1(t)\,t\sin t-c_2(t)\sin t+\dot c_1(t)(\sin t-t\cos t)+\dot c_2(t)\cos t.$$

$c_1(t)$, $c_2(t)$ функсијаларыны елә сечәк ки,

$$\dot c_1(t)(\sin t-t\cos t)+\dot c_2(t)\cos t=0$$

олсун. Онда

$$\dot y=c_1(t)\,t\sin t-c_2(t)\sin t$$

олар вә бурадан

$$\ddot y=c_1(t)(\sin t+t\cos t)-c_2(t)\cos t+\dot c_1(t)\,t\sin t-\dot c_2(t)\sin t.$$

Бу гијмәтләри тәнликдә јазараг, $y_1=\sin t-t\cos t$, $y_2=\cos t$ функсијаларынын бирчинс тәнлијин һәлләри олдуғуну нәзәрә алсаг, $\dot c_1(t)$, $\dot c_2(t)$ төрәмәләринә нәзәрән

$$\dot c_1(t)\,t\sin t-\dot c_2(t)\sin t=\sin^2 t$$

тәнлијини дә аларыг. Демәли, $\dot c_1(t)$, $\dot c_2(t)$ төрәмәләри

$$\begin{cases}\dot c_1(t)(\sin t-t\cos t)+\dot c_2(t)\cos t=0,\\ \dot c_1(t)\,t\sin t-\dot c_2(t)\sin t=\sin^2 t\end{cases}$$

системиндән тә'јин олунур. Бурадан

$$\dot c_1(t)=\cos t, \quad \dot c_2(t)=t\cos t-\sin t.$$

Бу тәнликләри интегралламагла алынан

$$c_1(t)=c_1+\sin t, \quad c_2(t)=c_2+2\cos t+t\sin t$$

ифадәләрини јухарыда јеринә јазсаг, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$y=c_1(\sin t-t\cos t)+c_2\cos t+\cos^2 t+1$$

олар.

§ 9. ЈУКСӘК ТӘРТИБЛИ САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) Сабит әмсаллы хәтти бирчинс тәнлијин һәлли. Тутаг ки, n-тәртибли сабит әмсаллы

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0 \qquad (62)$$

хәтти бирчинс тәнлији верилмишдир; бурада $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верилмиш әдәдләрдир.

Гејд едәк ки, (62) тәнлијинә еквивалент олан сабит әмсаллы бирчинс тәнликләр системинә кечәрәк, үмуми нәзәријјәјә әсасән, онун фундаментал һәлләр системини гурмаг олар. Лакин сабит әмсаллы (62) шәкилли тәнликләр үчүн буна еһтијач јохдур вә онун фундаментал һәлләр системини билаваситә гурмаг олар. (62) тәнлијинин һәлли олан $y=y(t)$ функсијасынын өзү илә төрәмәләри ејни шәкилли (охшар) олмалыдырлар ки, тәнликдә јазыб груплашдырдыгдан сонра сол тәрәф сыфра чеврилсин. Анализ курсундан мә'лумдур ки, $e^{\lambda t}$ функсијасы belә функсијадыр; бурада λ сабит әдәддир. Одур ки, (62) тәнлијинин һәллини $y=e^{\lambda t}$ шәклиндә ахтараг. Бу функсијанын $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ төрәмәләрини дә һесаблајыб $L(y)$ ифадәсиндә јазсаг,

$$L\left(e^{\lambda t}\right)=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n\right)e^{\lambda t} \qquad (63)$$

мүнасибәтини аларыг.

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (64)$$

ишарә едәк. Онда

$$L\left(e^{\lambda t}\right)=f(\lambda)\,e^{\lambda t}. \qquad (65)$$

$f(\lambda)$ чоxһәдлисинә (62) тәнлијинин ***характеристик чоxһәдлиси***, онун көкләринә исә һәмин тәнлијин ***характеристик әдәдләри*** дејилир.

(65) дүстурундан ајдындыр ки, $y=e^{\lambda t}$ функсијасынын (62) тәнлијинин һәлли олмасы үчүн λ әдәдинин

$$f(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0 \qquad (66)$$

тәнлијинин көкү олмасы зәрури вә кафидир.

(66) тәнлијинә (62) тәнлијинин ***характеристик тәнлији*** дејилир.

Характеристик тәнлијин көкләриндән асылы олараг (62) тәнлијинин һәлләринин гурулушуну өјрәнәк.

I. *Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлиф олан һал.* Тутаг ки, (66) тәнлијинин n сајда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ көкләри вар, бу көкләр һәгиги вә мүхтәлифдир. Бу һалда

$$y_1=e^{\lambda_1 t},\ y_2=e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ y_n(t)=e^{\lambda_n t}$$

һәлләри (62) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир вә онун үмуми һәлли

$$y=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t} \qquad (67)$$

дүстуру илә верилир; бурада $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләрдир.

II. *Характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин онлардан комплекс оланлары вар.* Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ һәгиги характеристик әдәдләр, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+k}$ комплекс характеристик әдәдләрдир вә $\bar\lambda_{r+1}, \ldots, \bar\lambda_{r+k}$ исә онларын гошмаларыдыр. Ајдындыр ки, $r+2k=n$ вә биринчи $r+k$ характеристик әдәдләри $\lambda_l=\alpha_l+i\beta_l$, $l=1, 2, \ldots, r+k$ шәклиндә көтүрмәк олар, belә ки, $l=1, 2, \ldots, r$ олдугда $\beta_l=0$, $l=r+1, \ldots, r+k$ олдугда исә $\beta_l\neq 0$. Онда $\bar\lambda_l=\alpha_l-i\beta_l$, $l=r+1, \ldots, r+k$.

Һәгиги характеристик әдәдләрә ујғун олан һәлләр

$$e^{\alpha_1 t},\ e^{\alpha_2 t},\ \ldots,\ e^{\alpha_r t}.$$

λ_{r+l}, $\bar\lambda_{r+l}$ $(l=1, 2, \ldots, k)$ характеристик әдәдләринә ујғун олан һәлләр исә

$$y_{r+l}=e^{(\alpha_{r+l}+i\beta_{r+l})t},\quad \bar y_{r+l}=e^{(\alpha_{r+l}-i\beta_{r+l})t}$$

олар. Ејлер дүстуруна әсасән

$$y_{r+l}=e^{\alpha_{r+l}t}\cos\beta_{r+l}t+ie^{\alpha_{r+l}t}\sin\beta_{r+l}t,$$

$$\bar y_{r+l}=e^{\alpha_{r+l}t}\cos\beta_{r+l}t-ie^{\alpha_{r+l}t}\sin\beta_{r+l}t.$$

Бурадан аларыг (бах: § 6, лемма) ки, $y_{r+l}(t)$, $\bar y_{r+l}(t)$ гошма комплекс һәлләринә (62) тәнлијинин ики

$$e^{\alpha_{r+l}t}\cos\beta_{r+l}t,\quad e^{\alpha_{r+l}t}\sin\beta_{r+l}t$$

һәгиги һәлләри ујғундур. Онда (62) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y=\sum_{l=1}^{r}e^{\alpha_l t}b_l+\sum_{l=1}^{k}e^{\alpha_{r+l}t}\left(b_{r+l}\cos\beta_{r+l}t+c_{r+l}\sin\beta_{r+l}t\right)$$

шәклиндә олар, бурада $b_1, b_2, \ldots, b_{r+k}, c_{r+1}, \ldots, c_{r+k}$ ихтијари сабитләрдир. Бу дүстуру да һәгиги характеристик әдәдләрә, хәјали һиссәсинин әмсалы сыфыр олан комплекс әдәд кими бахараг,

$$y=\sum_{l=1}^{r+k}e^{\alpha_l t}\left(b_l\cos\beta_l t+c_l\sin\beta_l t\right) \qquad (68)$$

шәклиндә јазмаг олар.

III. *Характеристик әдәдләр һәгиги олмагла, онлар ичәрисиндә тәкрарлананы олан һал.* Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ әдәдләри характеристик тәнлијин үјғун олараг $m_1, m_2, \ldots, m_r$ дәфә тәкрарланан көкләридир (садә характеристик әдәдин тәкрарланма дәрәҹәси вәһиддир) вә

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

Көстәрәк ки, λ_l $(l = 1, 2, \ldots, r)$ характеристик тәнлијин m_l дәфә тәкрарланан көкү исә (62) тәнлијинин она үјғун

$$e^{\lambda_l t}, \; te^{\lambda_l t}, \ldots, t^{m_l - 1} e^{\lambda_l t}, \; l = 1, 2, \ldots, r \tag{69}$$

һәлләри вар.

Доғрудан да, (65) дүстуруна вә Лејбниц гајдасына әсасән аларыг ки,

$$L(t^k e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\left[f(\lambda) e^{\lambda t}\right] =$$
$$= \left\{f^{(k)}(\lambda) + k f^{(k-1)}(\lambda)\, t + \frac{k(k-1)}{2!} f^{(k-2)}(\lambda) t^2 + \cdots + f(\lambda) t^k\right\} e^{\lambda t}. \tag{70}$$

λ_l характеристик әдәди m_l дәфә тәкрарландығындан

$$f(\lambda_l) = 0, \; f'(\lambda_l) = 0, \ldots, f^{(m_l - 1)}(\lambda_l) = 0, \; f^{(m_l)}(\lambda_l) \neq 0.$$

Онда (70) дүстурундан ајдындыр ки, $L(e^{\lambda_l t}) = 0$, $L(te^{\lambda_l t}) = 0, \ldots$ $\ldots, L(t^{m_l - 1} e^{\lambda_l t}) = 0$, јә'ни (69) функсијалары (62) тәнлијинин һәлләридир.

Бу һалда (62) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \sum_{l=1}^{r} P_l(t) e^{\lambda_l t} \tag{71}$$

шәклиндә олур; бурада $P_l(t)$ — дәрәҹәси $(m_l - 1)$-дән чох олмајан ихтијари һәгиги әмсаллы чохһәдлидир.

IV. *Үмуми һал.* Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ үјғун олараг, $m_1, m_2, \ldots, m_p$ дәфә тәкрарланан һәгиги характеристик әдәдләр, $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}$ үјғун олараг, $m_{p+1}, \ldots, m_{p+q}$ дәфә тәкрарланан комплекс характеристик әдәдләр, $\overline{\lambda}_{p+1}, \ldots, \overline{\lambda}_{p+q}$ исә онлара гошма олан характеристик әдәдләрдир. Ајдындыр ки,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p + 2(m_{p+1} + \cdots + m_{p+q}) = n.$$

Онда $\lambda_r = \alpha_r + i\beta_r$, $\beta_r = 0$, $r = 1, 2, \ldots, p$ һәгиги характеристик әдәдләринә үјғун олан һәлләр

$$e^{\alpha_r t}, \; te^{\alpha_r t}, \ldots, t^{m_r - 1} e^{\alpha_r t}, \; r = 1, 2, \ldots, p \tag{72}$$

шәклиндә, $\lambda_r = \alpha_r + i\beta_r$, $\overline{\lambda}_r = \alpha_r - i\beta_r$, $r = p + 1, \ldots, p + q$ гошма комплекс характеристик әдәдләринә үјғун олан һәгиги һәлләр исә

$$e^{\alpha_r t}\cos\beta_r t, \; te^{\alpha_r t}\cos\beta_r t, \ldots, t^{m_r - 1} e^{\alpha_r t}\cos\beta_r t,$$
$$e^{\alpha_r t}\sin\beta_r t, \; te^{\alpha_r t}\sin\beta_r t, \ldots, t^{m_r - 1} e^{\alpha_r t}\sin\beta_r t, \tag{73}$$
$$r = p + 1, \ldots, p + q$$

шәклиндәдир. Ајдындыр ки, (72), (73) шәклиндә тә'јин олунан һәлләрин сајы n-ә бәрабәрдир.

Көстәрәк ки, бу һалда (62) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \sum_{r=1}^{p+q} e^{\alpha_r t}\left(P_r(t)\cos\beta_r t + Q_r(t)\sin\beta_r t\right) \tag{74}$$

олур; бурада $P_r(t)$, $Q_r(t)$ — дәрәҹәләри $(m_r - 1)$-дән чох олмајан ихтијари һәгиги әмсаллы чохһәдлиләрдир. Буну исбат етмәк үчүн (72), (73) һәлләр системинин хәтти асылы олмадығыны көстәрмәк лазымдыр.

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, һамысы бирдән сыфыр олмајан елә $A_0^r, A_1^r, \ldots, A_{m_r-1}^r$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$, $B_0^r, B_1^r, \ldots, B_{m_r-1}^r$, $C_0^r, C_1^r, \ldots, C_{m_r-1}^r$ $(r = p + 1, \ldots, p+q)$ әдәдләри вар ки, $t \in (-\infty, +\infty)$ үчүн

$$\sum_{r=1}^{p}\left(A_0^r + A_1^r t + \cdots + A_{m_r-1}^r t^{m_r - 1}\right) e^{\alpha_r t} +$$
$$+ \sum_{r=p+1}^{p+q}\left[\left(B_0^r + B_1^r t + \cdots + B_{m_r-1}^r t^{m_r-1}\right)\cos\beta_r t +\right.$$
$$\left. + \left(C_0^r + C_1^r t + \cdots + C_{m_r-1}^r t^{m_r - 1}\right)\sin\beta_r t\right] e^{\alpha_r t} = 0$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликдә

$$P_r^0(t) = A_0^r + A_1^r t + \cdots + A_{m_r-1}^r t^{m_r - 1},$$
$$P_r^1(t) = B_0^r + B_1^r t + \cdots + B_{m_r-1}^r t^{m_r - 1},$$
$$P_r^2(t) = C_0^r + C_1^r t + \cdots + C_{m_r-1}^r t^{m_r - 1}$$

ишарәләри гәбул едәрәк, ону

$$\sum_{r=1}^{p} P_r^0(t) e^{\alpha_r t} + \sum_{r=p+1}^{p+q}\left[P_r^1(t)\cos\beta_r t + P_r^2(t)\sin\beta_r t\right] e^{\alpha_r t} = 0$$

шәклиндә јазаг.

Ејлер дүстуруна әсасән

$$\cos\beta_r t = \frac{e^{i\beta_r t} + e^{-i\beta_r t}}{2}, \quad \sin\beta_r t = \frac{e^{i\beta_r t} - e^{-i\beta_r t}}{2i}$$

олдуғундан, садә чевирмәләрдән сонра сонунчу ејнилији

$$\sum_{r=1}^{p} P_r^0(t)e^{\lambda_r t} + \sum_{r=p+1}^{p+q} \left(Q_r^1(t)e^{\lambda_r t} + Q_r^2(t)e^{\bar{\lambda}_r t}\right) = 0 \qquad (75)$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада

$$Q_r^1(t) = \frac{1}{2}\left[P_r^1(t) - iP_r^2(t)\right], \quad Q_r^2(t) = \frac{1}{2}\left[P_r^1(t) + iP_r^2(t)\right].$$

Үмумилиjи позмадан, (75) еjнилиjиндә $Q_{p+q}^2(t)$ чоxһәдлисинин әмсалларындан һеч олмаса бирисинин сыфырдан фәргли олдуғуну гәбул етмәк олар. Онда (75) еjнилиjинин $e^{\lambda_1 t}$-jә бөләрәк алынмыш

$$P_1^0(t) + \sum_{r=2}^{p} P_r^0(t)e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} + \sum_{r=p+1}^{p+q}\left(Q_r^1(t)e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} + Q_r^2(t)e^{(\bar{\lambda}_r - \lambda_1)t}\right) = 0$$

еjнилиjини m_1 дәфә диференсиалласаг,

$$\sum_{r=2}^{p} \bar{P}_r^0(t)e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} + \sum_{r=p+1}^{p+q}\left(\bar{Q}_r^1(t)\, e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} + \bar{Q}_r^2(t)\, e^{\overline{(\lambda_r - \lambda_1)}t}\right) = 0 \quad (76)$$

еjнилиjи алынар; бурада $\bar{P}_r^0(t)$, $\bar{Q}_r^1(t)$, $\bar{Q}_r^2(t)$ — дәрәчәләри уjғун олараг $P_r^0(t)$, $Q_r^1(t)$, $Q_r^2(t)$ чоxһәдлиләринин дәрәчәләринә бәрабәр олан чоxһәдлиләрдир вә $\bar{Q}_{p+q}^2(t)$ чоxһәдлисинин һеч олмаса бир әмсалы сыфырдан фәрглидир.

Бу гаjданы давам етдирмәклә нәтичәдә

$$R_{p+q}(t)\, e^{(\bar{\lambda}_{p+q} - \bar{\lambda}_{p+q-1})t} = 0 \qquad (77)$$

еjнилиjини аларыг, белә ки, $R_{p+q}(t)$, — дәрәчәси $Q_{p+q}^2(t)$ чоxһәдлисинин дәрәчәсинә бәрабәр олан чоxһәдлидир вә әмсалларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Лакин $e^{(\bar{\lambda}_{p+q} - \bar{\lambda}_{p+q-1})t} \neq 0$ олдуғундан, бу (77) еjнилиjинә зиддир.

Беләликлә, (72), (73) һәлләр системи хәтти асылы деjил.

б) *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс олмаjан тәнлиjин бир хүсуси һәллинин гурулмасы.* Тутаг ки,

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f_0(t) \qquad (78)$$

тәнлиjи верилмишдир; бурада $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сабит әдәдләр, $f_0(t)$ исә мүәjјән интервалда кәсилмәз функсиjадыр. Белә тәнлиjә сабит әмсаллы *бирчинс олмаjан тәнлик* деjилир.

Сабит әмсаллы хәтти бирчинс тәнлиjин фундаментал һәлләр системини һәмишә гурмаг мүмкүн олдуғундан, белә нәтиҹәjә кәлирик ки, сабит әмсаллы хәтти бирчинс олмаjан тәнлиjин үмуми һәллини сабитләрин вариасиjасы үсулу илә һәмишә тапмаг мүмкүндүр. Лакин бә'зи хүсуси һалларда буна еһтиjач галмыр вә хәтти бирчинс олмаjан тәнлиjин бир хүсуси һәллини $f_0(t)$ функсиjасынын шәклинә әсасән тапмаг олур.

Әввәлчә геjд едәк ки, әкәр $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_k(t)$ функсиjалары уjғун олараг

$$L(y) = f_1(t), \; L(y) = f_2(t), \; \ldots, \; L(y) = f_k(t)$$

тәнликләринин хүсуси һәлләри исә $y = y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_k(t)$ функсиjасы

$$L(y) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t)$$

тәнлиjинин хүсуси һәллидир.

Тутаг ки, (78) тәнлиjиндә

$$f_0(t) = P_m(t)\, e^{\alpha t}$$

шәклиндәдир. Бурада

$$P_m(t) = p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \cdots + p_m, \; p_0 \neq 0,$$

α исә һәгиги әдәддир. Хүсуси һалда $\alpha = 0$ оларса, $f_0(t)$ функсиjасы m-дәрәчәли чоxһәдлидир.

Тутаг ки, α әдәди характеристик тәнлиjин $r \geqslant 0$ дәфә тәкрарланан көкүдүр, jә'ни

$$f(\alpha) = 0, \; f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \; f^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

($r = 0$ о демәкдир ки, α характеристик тәнлиjин көкү деjил).

Бу заман (78) тәнлиjинин хүсуси һәллини

$$y = t^r Q_m(t)\, e^{\alpha t} \qquad (79)$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр, бурада

$$Q_m(t) = q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \cdots + q_m$$

әмсаллары намә'лум олан m-дәрәчәли чоxһәдлидир.

Демәли, (78) тәнлиjинин бир хүсуси һәллини (79) шәклиндә тапмаг үчүн $Q_m(t)$ чоxһәдлисинин әмсалларыны тә'jин етмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә (79) ифадәсини (78) тәнлиjиндә jазараг, $e^{\alpha t}$-jә ихтисар етдикдән сонра t-нин еjни дәрәчәләринин әмсалларыны бәрабәрләшдирәк. Бу заман $q_0, q_1, \ldots, q_m$ әмсалларына нәзәрән

$$C_{r+m}^r f^{(r)}(\alpha)\, q_0 = p_0,$$
$$C_{r+m}^{r+1} f^{(r+1)}(\alpha)\, q_0 + C_{r+m-1}^r f^{(r)}(\alpha)\, q_1 = p_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(r+m)}(\alpha)\, q_0 + f^{(r+m-1)}(\alpha)\, q_1 + \cdots + f^{(r)}(\alpha)\, q_m = p_m$$

рекурент дүстурлары алынар. Бурада $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$. Шәртә көрә $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$ олдуғундан, бу системдән $q_0, q_1, \ldots, q_m$ әмсаллары ардычыл олараг јеканә гаjда илә тә'јин олунур.

Тутаг ки, (78) тәнлиjинин сағ тәрәфи

$$f_0(t) = \left(P_m^1(t)\cos\beta t + P_l^2(t)\sin\beta t\right) e^{\alpha t} \qquad (80)$$

шәклиндәдир. Бурада $P_m^1(t)$ вә $P_l^2(t)$, ујғун олараг, дәрәчәләри m вә l олан чохһәдлиләрдир. Бу һалы бахдығымыз һала кәтирмәк олар. Бунун үчүн

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}, \quad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$$

дүстурларындан истифадә едәрәк

$$f_0(t) = \overline{P}_k^1(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t} + \overline{P}_k^2(t)\, e^{(\alpha-i\beta)t}, \quad k = \max(m, l) \qquad (81)$$

шәклиндә јазаг; бурада $\overline{P}_k^1(t)$, $\overline{P}_k^2(t)$ илә k-дәрәчәли комплекс әмсаллы чохһәдлиләр ишарә едилмишдир.

Јухарыдакы гејдә әсасән алырыг ки, сағ тәрәфи (81) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг үчүн сағ тәрәфләри

$$\overline{P}_k^1(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad \overline{P}_k^2(t)\, e^{(\alpha-i\beta)t}$$

олан тәнликләрин хүсуси һәлләрини тапмаг кифајәтдир. Сағ тәрәфи белә олан тәнлијин хүсуси һәлләри јухарыда верилән гајда илә тапылыр. Һәмин хүсуси һәлләри тапыб топламагла, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг олар. Беләликлә, $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин r дәфә тәкрарланан көкү исә, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәлли

$$y = t^r\,[Q_k^1(t)\cos\beta t + Q_k^2\sin\beta t]\,e^{\alpha t} \qquad (82)$$

шәклиндәдир, бурада $Q_k^1(t)$, $Q_k^2(t)$—дәрәчәләри k-дан бөјүк олмајан чохһәдлиләрдир.

Демәли, (78) тәнлијинин сағ тәрәфи (80) шәклиндә исә вә $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин $r \geq 0$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онун хүсуси һәллини (82) шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бир хүсуси һәлли бу гајда илә тапмаг үсулуна *гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу* дејилир.

Мисаллар.

1. Чәкиси 1,96 *кГ* олан P јүкү бир учу бәркидилмиш јајдан асылмышдыр. Јүкә периодик олараг $f(t) = 0{,}676\sin t$ *кГ* харичи гүввәси тә'сир едир. Мә'лумдур ки, 1 *кГ* гүввәнин тә'сири алтында јај 20 *см* узаныр вә мүгавимәт гүввәси јүкүн сүр'әтинә мүтәнасиб олуб, сүр'әт 1 $\frac{см}{сан}$ олдугда 0,02 *кГ*-а бәрабәрдир.

Башланғыч анда јүкүн сүр'әтинин сыфыр олдуғуну вә јајын таразлыг вәзијјәтиндән 5 *см* узаглашдығыны биләрәк онун һәрәкәт ганунуну тапмалы.

Һәлли. Ox охуну шагули олараг ашағы јөнәлдәк. Тутаг ки, јајын тәбии узунлуғу l-дир вә әлавә гүввә тә'сир етмәдикдә асылы вәзијјәтдә λ_c гәдәр узаныр. Таразлыг вәзијјәтиндә ја-

јын уч нөгтәсини O илә ишарә едәк. Бахылан анда јајын узанмасыны λ илә ишарә едәк (шәкил 14). Шәклә әсасән $x = \lambda - \lambda_c$ олур.

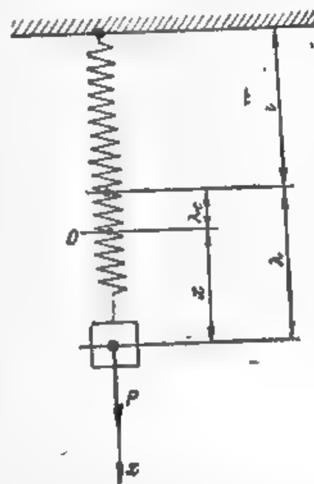
Һук ганунуна көрә јајын кәрилмә гүввәси онун узанмасы илә мүтәнасиб, јә'ни $c\lambda$ олур; бурада c әдәди јајын сәртлијини көстәрир. Демәли, јаја P ағырлыг гүввәси, $-c\lambda$ кәрилмә гүввәси, $-k\dot{x}$ мүгавимәт гүввәси вә $0{,}676\sin t$ харичи гүввәси тә'сир едир. Онда Нјутонун 2-чи ганунуна көрә јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = P - c\lambda + 0{,}676\sin t.$$

Јајын кәрилмә гүввәси јүклә таразлашдығындан, $P = c\lambda_c$ олмалыдыр. Одур ки, $P - c\lambda = -c(\lambda - \lambda_c) = -cx$ олур. Демәли, јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0{,}676\sin t$$

шәклиндә олар.



Шәкил 14.

Мәсәләнин шәртләринә көрә m, k вә c әдәдләрини тә'јин едәк. $P = mg$ олдуғундан $m = \dfrac{1{,}96\ кГ}{9{,}8\ \frac{м}{сан^2}} = 0{,}002\ \dfrac{кГ\ сан^2}{см}$, $k \cdot 1\ \frac{см}{сан} = 0{,}02\ кГ$ олдуғундан, $k = 0{,}02\ кГ \cdot \frac{сан}{см}$ олар. $c \cdot 20\ см = 1\ кГ$ олдуғундан, $c = 0{,}05\ \frac{кГ}{см}$. Мәсәләнин дикәр шәртләринә көрә $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 0$ башланғыч шәртләрини алырыг.

Беләликлә, мәсәлә

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 338\sin t$$

тәнлијинин

$$x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = 0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәлли

$$x = e^{-5t}(c_1 + c_2 t)$$

шәклиндәдир. Бурада $P_m^1(t)$ вә $P_l^2(t)$, уjғун олараг, дәрәчәләри m вә l олан чоxһәдлиләрдир. Бу һалы бахдығымыз һала кәтирмәк олар. Бунун үчүн

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}, \quad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}$$

дүстурларындан истифадә едәрәк

$$f_0(t) = \bar{P}_k(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t} + \bar{P}_k^2(t)\, e^{(\alpha-i\beta)t}, \quad k = \max(m, l) \qquad (81)$$

шәклиндә jазаг; бурада $\bar{P}_k^1(t)$, $\bar{P}_k^2(t)$ илә k-дәрәчәли комплекс әмсаллы чоxһәдлиләр ишарә едилмишдир.

Jухарыдакы гејдә әсасән алырыг ки, сағ тәрәфи (81) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг үчүн сағ тәрәфләри

$$\bar{P}_k^1(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad \bar{P}_k^2(t)\, e^{(\alpha-i\beta)t}$$

олан тәнликләрин хүсуси һәлләрини тапмаг кифајәтдир. Сағ тәрәфи белә олан тәнлијин хүсуси һәлләри јухарыда верилән гајда илә тапылыр. Һәмин хүсуси һәлләри тапыб топламагла, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг олар. Беләликлә, $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин r дәфә тәкрарланан көкү исә, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәлли

$$y = t^r\,[Q_k^1(t)\cos\beta t + Q_k^2\sin\beta t]\,e^{\alpha t} \qquad (82)$$

шәклиндәдир, бурада $Q_k^1(t)$, $Q_k^2(t)$—дәрәчәләри k-дан бөјүк олмајан чоxһәдлиләрдир.

Демәли, (78) тәнлијинин сағ тәрәфи (80) шәклиндә исә вә $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин $r \geq 0$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онун хүсуси һәллини (82) шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бир хүсуси һәлли бу гајда илә тапмаг үсулуна *гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу* дејилир.

Мисаллар.

1. Чәкиси 1,96 *кГ* олан P јүкү бир уҹу бәркидилмиш јајдан асылмышдыр. Јүкә периодик олараг $f(t) = 0{,}676\sin t$ *кГ* харичи гүввәси тә'сир едир. Мә'лумдур ки, 1 *кГ* гүввәнин тә'сири алтында јај 20 *см* узаныр вә мүгавимәт гүввәси јүкүн сүр'әтинә мүтәнасиб олуб, сүр'әт $1\ \frac{см}{сан}$ олдугда 0,02 *кГ*-а бәрабәрдир.

Башланғыч анда јүкүн сүр'әтинин сыфыр олдуғуну вә јајын таразлыг вәзијјәтиндән 5 *см* узаглашдығыны биләрәк онун һәрәкәт ганунуну тапмалы.

Һәлли. Ox оxуну шагули олараг ашағы јөнәлдәк. Тутаг ки, јајын тәбии узунлуғу l-дир вә әлавә гүввә тә'сир етмәдикдә асылы вәзијјәтдә λ_c гәдәр узаныр. Таразлыг вәзијјәтиндә јајын уҹ нөгтәсини O илә ишарә едәк. Бахылан анда јајын узанмасыны λ илә ишарә едәк (шәкил 14). Шәклә әсасән $x = \lambda - \lambda_c$ олур.

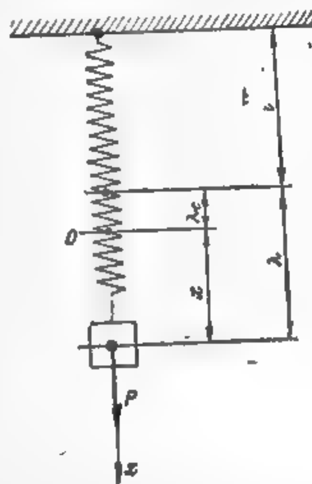
Һук ганунуна көрә јајын кәрилмә гүввәси онун узанмасы илә мүтәнасиб, јә'ни $c\lambda$ олур; бурада c әдәди јајын сәртлијини көстәрир. Демәли, јаја P ағырлыг гүввәси, $-c\lambda$ кәрилмә гүввәси, $-k\dot{x}$ мүгавимәт гүввәси вә $0{,}676\sin t$ харичи гүввәси тә'сир едир. Онда Нјутонун 2-ҹи ганунуна көрә јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = P - c\lambda + 0{,}676\sin t.$$

Јајын кәрилмә гүввәси јүклә таразлашдығындан, $P = c\lambda_c$ олмалыдыр. Одур ки, $P - c\lambda = -c(\lambda - \lambda_c) = -cx$ олур. Демәли, јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0{,}676\sin t$$

шәклиндә олар.



Шәкил 14.

Мәсәләнин шәртләринә көрә m, k вә c әдәдләрини тә'јин едәк. $P = mg$ олдуғундан $m = \frac{1{,}96\ кГ}{9{,}8\ \frac{м}{сан^2}} = 0{,}002\ \frac{кГ\ сан^2}{см}$, $k \cdot 1\ \frac{см}{сан} = 0{,}02\ кГ$ олдуғундан, $k = 0{,}02\ кГ \cdot \frac{сан}{см}$ олар. $c \cdot 20\ см = 1\ кГ$ олдуғундан, $c = 0{,}05\ \frac{кГ}{см}$. Мәсәләнин дикәр шәртләринә көрә $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 0$ башланғыч шәртләрини алырыг.

Беләликлә, мәсәлә

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 338\sin t$$

тәнлијинин

$$x(0) = 5, \quad \dot{x}(0) = 0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ујғун бирҹинс тәнлијин үмуми һәлли

$$x = e^{-5t}(c_1 + c_2 t)$$

шәклиндәдир. Бирчинс олмајан тәнлијин хүсуси һәллини $x_1 = a\sin t + b\cos t$ шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәни тәнликдә јазыб $\sin t$ вә $\cos t$-нин әмсалларыны тутушдурсаг, $a = 12$, $b = -5$ олар. Одур ки, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$x = e^{-5t}(c_1 + c_2 t) + 12\sin t - 5\cos t$$

олар. Бурада $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 0$ башланғыч шәртләринә әсасән аларыг ки, јүкүн һәрәкәт гануну

$$x = e^{-5t}(10 + 38t) + 12\sin t - 5\cos t$$

шәклиндәдир.

2. $$\ddot{y} - 10\dot{y} + 21y = t^2 e^{2t}$$

тәнлијинин үмуми һәллини гураг. Бунун үчүн әввәлчә хәтти бирчинс

$$\ddot{y} - 10\dot{y} + 21y = 0$$

тәнлијини һәлл едәк. Ајдындыр ки,

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$. Она көрә дә бирчинс тәнлијин үмуми һәлли

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{7t}.$$

Дикәр тәрәфдән, $\alpha = 2$ әдәди характеристик тәнлијин көкү олмадығындан, бирчинс олмајан тәнлијин хүсуси һәллини

$$y = (q_0 t^2 + q_1 t + q_2)e^{2t}$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәни тәнликдә јазыб e^{2t}-јә бөлдүкдән сонра t-нин ејни дәрәчәләринин әмсалларыны тутушдурсаг,

$$5q_0 = 1, \ -12q_0 + 5q_1 = 0, \ 2q_0 - 6q_1 + 5q_2 = 0$$

тәнликләрини аларыг. Бурадан $q_0 = 0{,}2$, $q_1 = 0{,}48$, $q_2 = 0{,}496$. Демәли, бахылан тәнлијин бир хүсуси һәлли

$$y = (0{,}2t^2 + 0{,}48t + 0{,}496)e^{2t},$$

үмуми һәлли исә

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{7t} + (0{,}2t^2 + 0{,}48t + 0{,}496)e^{2t}.$$

3. $\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = e^t \sin 2t$ тәнлијини һәлл етмәк үчүн әввәлчә ујғун бирчинс

$$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = 0$$

тәнлијини һәлл едәк.

Ујғун

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

характеристик тәнлијинин көкләри $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$. Демәли, бирчинс тәнлијин үмуми һәлли

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}.$$

Бирчинс олмајан тәнлијин сағ тәрәфи $f_0(t) = e^t \sin 2t$ олдуғундан вә $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ характеристик әдәд олмадығындан, хүсуси һәлли

$$y = (A\cos 2t + B\sin 2t)e^t$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәни вә онун төрәмәләрини тәнликдә јазараг e^t-јә ихтисар етдикдән сонра $\cos 2t$ вә $\sin 2t$ функсијаларынын әмсалларыны бәрабәрләшдирсәк, аларыг ки, $A = 0{,}1$; $B = 0{,}05$.

Беләликлә, бирчинс олмајан тәнлијин бир хүсуси һәлли

$$y = (0{,}1\cos 2t + 0{,}05\sin 2t)e^t,$$

үмуми һәлли исә

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} + (0{,}1\cos 2t + 0{,}05\sin 2t)e^t.$$

4. $y^{IV} + 2\ddot{y} + y = \cos t$ тәнлијини һәлл едәк. Бу тәнлијә ујғун бирчинс тәнлик

$$y^{IV} + 2\ddot{y} + y = 0$$

вә онун характеристик тәнлији

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Бурадан аларыг ки, $\lambda_{1,2} = -i$, $\lambda_{3,4} = i$ характеристик әдәдләри ики дәфә тәкрарланан гошма комплекс әдәдләрдир. Одур ки, бирчинс тәнлијин онлара ујғун олан хәтти асылы олмајан һәгиги һәлләри

$$\cos t, \quad t\cos t, \quad \sin t, \quad t\sin t$$

олар вә демәли, бирчинс тәнлијин үмуми һәлли

$$y = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t.$$

Бирчинс олмајан тәнликдә $f_0(t) = \cos t$ олдуғундан $\alpha = 0$, $\beta = 1$ вә $\alpha + i\beta = i$ характеристик тәнлијин $r = 2$ дәфә тәкрарланан көкү олур. Она көрә онун хүсуси һәллини

$$y = t^2(A\cos t + B\sin t)$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәнин өзүнү вә төрәмәләрини тәнликдә јазыб, $\cos t$ вә $\sin t$ функсијаларынын әмсалларыны бәрабәрләшдирсәк, аларыг ки, $A = -0{,}125$, $B = 0$. Демәли, тәнлијин хүсуси һәлли

$$y = -0{,}125t^2\cos t,$$

үмуми һәлли исә

$$y = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t - 0{,}125t^2\cos t.$$

в) *Ејлер тәнлији.* Бә'зи дәјишән әмсаллы хәтти тәнликләри дәјишәни әвәз етмәклә сабит әмсаллы хәтти тәнлијә кәтирмәк олур. Белә тәнликләрә мисал олараг,

$$(\alpha t+\beta)^n x^{(n)}+a_1(\alpha t+\beta)^{n-1}x^{(n-1)}+\dots+a_n x=f(t)$$

шәклиндә олан тәнликләри көстәрмәк олар, бурада α, β, a_1, $a_2, \dots, a_n$ сабит әдәдләрдир вә $\alpha\neq0$. Бу тәнлијә *Ејлер тәнлији* дејилир. Ејлер тәнлији

$$\alpha t+\beta=e^{\tau}$$

әвәзләмәси илә сабит әмсаллы тәнлијә кәтирилир. Бу заман

$$\dot x=\frac{dx}{dt}=\alpha e^{-\tau}\frac{dx}{d\tau},\quad \ddot x=\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha^2e^{-2\tau}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right),\ \dots,$$

$$x^{(k)}=\frac{d^kx}{dt^k}=\alpha^ke^{-k\tau}\left(\frac{d^kx}{d\tau^k}-\frac{k(k-1)}{2}\frac{d^{k-1}x}{d\tau^{k-1}}+\dots+(-1)^{k-1}\times\right.$$

$$\left.\times(k-1)!\frac{dx}{d\tau}\right)\quad(k=1,2,\dots,n).$$

Бу гијмәтләри тәнликдә јазсаг, сабит әмсаллы

$$\alpha^n\frac{d^nx}{d\tau^n}+\alpha^{n-1}\left(a_1-\alpha\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{d^{n-1}x}{d\tau^{n-1}}+\dots+a_nx=f\left(\frac{e^{\tau}-\beta}{\alpha}\right)$$

тәнлији алынар.

Мисал.

$$t^2\ddot x-4t\dot x+6x=0$$

Ејлер тәнлијини һәлл етмәк үчүн $t=e^{\tau}$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}-5\frac{dx}{d\tau}+6x=0$$

тәнлији алынар. Бу тәнлијин үмуми һәлли

$$x=c_1e^{3\tau}+c_2e^{2\tau}$$

шәклиндәдир вә демәли, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$x=c_1t^2+c_2t^3.$$

§ 10. ПЕРИОДИК ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ СИСТЕМЛӘР

Нәзәри вә техники мәсәләләрин бир чохунун һәлли периодик әмсаллы диференсиал тәнликләрә кәтирилир. Буна көрә периодик әмсаллы тәнликләр, диференсиал тәнликләр нәзәријјәсиндә хүсуси јер тутур. Бу параграфда периодик әмсаллы хәтти системләрин һәлләринин бә'зи хассәләри өјрәнилир.

Тутаг ки,

$$\dot x=A(t)x \tag{10}$$

системиндә $A(t)$ матрис-функсијасы һәгиги охда кәсилмәздир вә мүәјјән $T\,(T\neq0)$ әдәди үчүн

$$A(t+T)=A(t) \tag{83}$$

шәрти өдәнир. Онда (10) системинә периодик әмсаллы систем дејилир.

Үмумијјәтлә, периодик әмсаллы хәтти бирчинс системин тривиал олмајан периодик һәлли олмаја да биләр. Буну көстәрмәк үчүн садә

$$\dot x=a(t)x \tag{84}$$

тәнлијинә бахаг; бурада $a(t)$ һәгиги охда тә'јин олунмуш $T\,(T\neq0)$ периодлу кәсилмәз функсијадыр. Бу тәнлијин үмуми һәлли

$$x(t)=c\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right) \tag{85}$$

шәклиндәдир; бурада c ихтијари сабитдир. Көстәрәк ки (85) дүстуру илә тә'јин олунан функсијалар ($c\neq0$) анҹаг $\int_0^T a(s)ds=0$ олдугда T периодлу функсијалар олур. Доғрудан да, (85) дүстуруна әсасән

$$x(t+T)=c\exp\left(\int_0^{t+T}a(\tau)d\tau\right)=$$

$$=c\exp\left(\int_0^T a(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_T^{t+T}a(\tau)d\tau\right).$$

Дикәр тәрәфдән, $a(t)$ функсијасы T периодлу функсија олдуғундан, $\tau=T+s$ әвәзләмәси апармагла аларыг ки,

$$\int_T^{t+T}a(\tau)d\tau=\int_0^t a(s)ds.$$

Демәли,

$$x(t+T)=c\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)\exp\left(\int_0^T a(s)ds\right)=$$

$$=x(t)\exp\left(\int_0^T a(s)ds\right).$$

Бурадан көрүнүр ки, $x(t+T)=x(t)$ олмасы үчүн $\exp\left(\int_0^T a(s)ds\right)=1$, јә'ни $\int_0^T a(s)ds=0$ олмалыдыр.

14—44

Ајдындыр ки, $\int_0^T a(s)ds \neq 0$ олдугда (84) тәнлијинин T периодлу һәлли јохдур.

(84) тәнлији илә јанашы

$$y = \left[a(t) - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds \right] y$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнликдә

$$\int_0^T \left\{ a(t) - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds \right\} dt = 0$$

олдуғундан, онун һәлләри периодик функсијалардыр вә

$$y = c\exp\left\{ \int_0^t \left[a(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds \right] d\tau \right\} =$$

$$= c\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau \right) \exp\left(-\frac{t}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau \right)$$

шәклиндәдир.

(85) дүстуруна әсасән

$$y(t) = x(t)\exp\left(-\frac{t}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau \right)$$

шәклинә јаза биләрик. Бурадан

$$x(t) = y(t)e^{tR},\ R = \frac{1}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau \qquad (86)$$

мүнасибәти алыныр вә ајдындыр ки, e^{Rt} функсијасы

$$\dot{z} = Rz$$

тәнлијинин $z(0) = 1$ башланғыч шәртини өдәјән һәллидир. Беләликлә, $a(t)$ функсијасы T периодлу олдугда, (84) тәнлијинин һәр бир һәлли һәмин периодлу $y(t)$ функсијасы илә мүәјјән сабит әмсаллы тәнлијин һәллинин һасилинә бәрабәрдир.

Бу тәклиф үмуми шәкилдә верилмиш периодик әмсаллы хәтти бирҹинс системләрә хас олан ән мүһүм хассәләрдән бириdir. Бу хассәни үмуми һалда көстәрмәк үчүн әввәлҹә ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 10. *$A(t)$ матрис-функсијасы T периодлу кәсилмәз матрис-функсија вә $\Phi(t)$ матрис-функсијасы (10) системин фундаментал матриси исә, $\Phi(t+T)$ дә һәмин системин фундаментал матрисидир. Әлавә олараг $\Phi(0) = E$ оларса,*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T). \qquad (87)$$

Исбаты. $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан,

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Онда (83) шәртинә әсасән алырыг ки,

$$\dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\ \Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T)$$

еjнилији өдәнир, јә'ни $\Phi(t+T)$ матриси (10) системинә ујғун олан матрис-системин һәллидир.

Дикәр тәрәфдән, $\det\Phi(t+T) \neq 0$ олдуғундан, $\Phi(t+T)$ фундаментал матрисдир (теорем 3). Онда 4-ҹү теоремә әсасән елә гејри-мәхсуси C матриси вар ки,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \qquad (88)$$

вә ајдындыр ки, $\Phi(0) = E$ оларса, $C = \Phi(T)$. Теорем исбат олунду.

$$\dot{X} = A(t)\ X \qquad (14)$$

матрис-системинин $X(0) = E$ шәртини өдәјән $\Phi(t)$ һәллинә (10) системинин матрисанты, $\Phi(T)$-јә онун *монодромија* матриси, $\Phi(T)$ матрисинин характеристик әдәдләринә исә *мултипликаторлары* дејилир.

Мултипликаторларын күллиси (10) системинин *спектри* адланыр.

Теорем 11 (Флоке—Лјапунов). *Периодик әмсаллы (10) системинин һәр бир $\Phi(t)$ фундаментал матрисинә ујғун, үмумијјәтлә комплекс, елә T периодлу гејри-мәхсуси $P(t)$ матрис-функсијасы вә сабит R матриси вар ки,*

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR}. \qquad (89)$$

Исбаты. Матрисләр нәзәријјәсиндән мә'лумдур ки, һәр бир гејри-мәхсуси B матриси үчүн онунла коммутатив олан вә

$$e^K = B$$

шәртини өдәјән, үмумијјәтлә, комплекс олан K матриси вар. Белә K матрисинә *B матрисинин логарифми* дејилир вә белә ишарә олунур:

$$K = \ln B.$$

Бу тә'рифдән истифадә едәрәк (88) мүнасибәтиндә $B = C$ вә $K = TR$ гәбул етсәк, ону

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)e^{TR} \qquad (88')$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу мүнасибәтә әсасән,

$$P(t) = \Phi(t)e^{-tR} \qquad (90)$$

матриси T периодлу матрис олур. Доғрудан да,

$$P(t+T)=\Phi(t+T)e^{-(t+T)R}=\Phi(t)Ce^{-(t+T)R}=$$
$$=\Phi(t)e^{TR}e^{-(t+T)R}=\Phi(t)e^{-tR}=P(t).$$

Демәли, $P(t)$ матриси T периодлу матрисдир. Дикәр тәрәфдән, e^{-tR} матрис функсиjасы

$$\dot{Z}=-RZ$$

матрис-системинин $Z(0)=E$ шәртини өдәjән һәлли олдуғундан тәрси вар. Она көрә $P(t)$ матрисинин дә тәрси вар.

(90) мүнасибәтиндән (89) мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр. Теорем исбат олунду.

Теоремдәки $P(t)$ вә R матрисләри, үмумиjјәтлә, комплекс матрисләр олдуғундан, һәгиги әмсаллы системләр үчүн (89) дүстуру әвәзинә

$$\Phi(t)=P_1(t)e^{tR_1} \tag{91}$$

дүстуруну алмаг олар, бурада $P_1(t)$ матриси $2T$ периодлу геjри-мәхсуси һәгиги матрис, R_1 исә мүәjјән һәгиги сабит матрисдир. Доғрудан да, матрисләр нәзәриjјәсиндән мә'лумдур ки, һәгиги B матриси үчүн

$$e^{K_1}=B^2$$

шәртини өдәjән һәгиги K_1 матриси вар. Онда $B=C$ гәбул етсәк, (88) мүнасибәтинә әсасән

$$\Phi(t+2T)=\Phi(t+T)\ C=\Phi(t)\ C^2=\Phi(t)e^{K_1}$$

олар. $K_1=2TR_1$ гәбул едәрәк $P_1(t)=\Phi(t)e^{-tR_1}$ матрисинә бахаг. Бу матрис $2T$ периодлу һәгиги матрис олур.

Беләликлә, һәгиги әмсаллы системләр үчүн, Флоке-Лјапунов теореми ашағыдакы кими ифадә олунур:

$A(t)$ матриси T периодлу һәгиги матрис исә, (10) системинин һәр бир фундаментал матриси $2T$ периодлу геjри-мәхсуси $P_1(t)$ һәгиги матриси илә, мүәjјән һәгиги сабит R_1 матриси үчүн e^{tR_1} матрисинин һасили шәклиндә көстәрилә биләр.

Теоремин исбатындан аjдындыр ки, R матриси $R=\frac{1}{T}\ln\Phi(T)$ дүстуру илә тә'јин олунур.

R матрисинин характеристик әдәдләринә (10) системинин *характеристик көстәричиләри* деjилир.

Системин характеристик көстәричиләри фундаментал матрисин сечилишиндән асылы деjил. Доғрудан да, $\Phi_1(t)$ системин башга фундаментал матриси оларса, 4-чү теоремә әсасән $\Phi_1(t)=\Phi(t)C$ олдуғундан, (88′) дүстуруна әсасән $\Phi_1(t+T)=\Phi(t)e^{TR}C$ олур. Бурадан $\Phi_1(t+T)=\Phi_1(t)C^{-1}e^{TR}C=\Phi_1(t)e^{TR_1}$, бурада $R_1=C^{-1}RC$. R вә R_1 матрисләри охшар олдуғундан характеристик әдәдләри еjнидир. Одур ки, $\Phi(t)$ олараг һәмишә матрисант көтүрәчәjик.

Тутаг ки, μ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ әдәди R матрисинин характеристик әдәди, c^j исә бу характеристик әдәдә уjғун мәхсуси вектордур. Онда $(R-\mu_j E)^k c^j=0$, $k=1, 2, \ldots$ олдуғундан, $e^{tR}c^j=e^{t\{\mu_j E+(R-\mu_j E)\}}c^j=e^{t\mu_j E}e^{t(R-\mu_j E)}c^j=e^{\mu_j t}c^j$ вә (10) системинин $x(0)=c^j$ шәртини өдәjән һәллини (89) дүстуруна әсасән

$$\varphi^j(t)=\Phi(t)c^j=P(t)e^{tR}c^j=e^{\mu_j t}P(t)c^j$$

шәклиндә јазмаг олар. Садәлик үчүн

$$\psi^j(t)=P(t)c^j$$

ишарә едәк. Онда

$$\varphi^j(t)=e^{\mu_j t}\psi^j(t). \tag{92}$$

вә $P(t)$ матриси T периодлу матрис олдуғундан алырыг ки, $\psi^j(t)$ вектор-функсиjасы T периодлу вектор-функсиjадыр.

Асанлыгла јохламаг олар ки, истәнилән t үчүн

$$\varphi^j(t+T)=\rho_j\varphi^j(t),\ \rho_j=e^{\mu_j T} \tag{93}$$

шәрти өдәнир. Бу шәрти өдәjән вә тривиал олмаjан һәллә (10) системинин *нормал һәлли* деjилир. (93) шәртиндән $t=0$ олдугда алынан $\varphi^j(T)=\rho_j\varphi^j(0)$ шәртинә вә $\varphi^j(t)=\Phi(t)c^j$ дүстуруна әсасән

$$[\Phi(T)-\rho_j E]c^j=0 \tag{94}$$

мүнасибәти алынар.

Бурадан аjдындыр ки, ρ_j әдәди $\Phi(T)$ матрисинин характеристик әдәди, c^j исә она уjғун мәхсуси вектордур.

$$\det[\rho E-\Phi(T)]=\rho^n+a_1\rho^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\rho+a_n=0 \tag{95}$$

тәнлиjинә (10) системинин *характеристик тәнлиjи*, һәмин тәнлиjин көкләринә исә системин *характеристик әдәдләри вә ја мултипликаторлары* деjилир.

Беләликлә, (10) системинин һәр бир μ_j характеристик көстәричисинә $\rho_j=e^{\mu_j T}$ мултипликатору вә $\varphi^j(t)$ нормал һәлли уjғундур.

Тутаг ки, $x(t)$ вектор-функсиjасы (10) системинин һәр һансы нормал һәллидир, jә'ни елә ρ әдәди вар ки,

$$x(t+T)=\rho x(t). \tag{96}$$

Бурадан, $x(T)=\rho x(0)$ вә $x(t)=\Phi(t)x(0)$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$[\Phi(T)-\rho E]x(0)=0$$

олар. $x(0)\neq 0$ олдуғундан, бу мүнасибәт көстәрир ки, ρ әдәди $\Phi(T)$ матрисинин характеристик әдәди, $x(0)$ исә она уjғун мәхсуси вектордур.

$\alpha = \frac{1}{T} \ln \rho \, (\ln \rho = \ln |\rho| + i \arg \rho)$ гәбул едиб $\psi(t) = e^{-\alpha t} x(t)$

вектор-функсиіасына бахаг. Онда $\rho = e^{\alpha T}$ вә (96) шәртинә әсасән

$$\psi(t+T) = e^{-\alpha(t+T)} x(t+T) = e^{-\alpha t} e^{-\alpha T} \rho x(t) = e^{-\alpha t} x(t) = \psi(t)$$

олар, ј'ни $\psi(t)$ вектор-функсиіасы T периодлудур. Бурадан алырыг ки,

$$x(t) = e^{\alpha t} \psi(t).$$

Демәли, (10) системинин һәр бир нормал һәллини (92) шәклиндә көстәрмәк олар.

Ајдындыр ки, ρ әдәди $\Phi(T)$ монодромија матрисинин характеристик әдәди олдуғундан, $\mu = \frac{1}{T} \ln \rho$ әдәди $\frac{1}{T} \ln \Phi(T)$ илә тә'јин олунан R матрисинин характеристик әдәди олур. Ј'ни һәр бир ρ мултипликаторуна (10) системинин $\mu = \frac{1}{T} \ln \rho$ характеристик көстәричиси ујғундур. Бурадан ајдындыр ки, характеристик көстәричиләр $\frac{2\pi i m}{T}$ (m там әдәддир) топланасына гәдәр дагигликлә биргијмәтли тә'јин олунурлар.

Флоке Љапунов теореминдән истифадә едәрәк $x = P(t) y$ әвәзләмәси васитәсилә (10) системини сабит әмсаллы

$$\dot{y} = Ry \tag{97}$$

системинә кәтирмәк олар.

Доғрудан да, (89) дүстуруна әсасән $P(t) = \Phi(t) e^{-tR}$ вә $\Phi(t)$-нин фундаментал матрис олдуғуну нәзәрә алыб $x = \Phi(t) e^{-tR} y$ әвәзләмәсини (10) системиндә јазсаг,

$$\Phi(t) e^{-tR} \dot{y} = \Phi(t) R e^{-tR} y$$

системини аларыг. $Re^{-tR} = e^{-tR} R$ олдуғундан, бу системин һәр тәрәфини солдан $P^{-1}(t)$-јә вурсаг, (97) системи алынар.

Һәтта бирчинс олмајан

$$\dot{x} = A(t) x + f(t) \tag{1'}$$

системинә бахаг.

Теорем 12. *Фәрз едәк ки, $A(t)$ матриси T периодлу кәсилмәз матрис-функсија, $f(t)$ исә T периодлу кәсилмәз вектор-функсијадыр вә (10) системинин T периодлу һәлли јохдур. Онда (1′) системинин јеканә T периодлу һәлли вар.*

Исбаты. Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (10) системинин матрисантыдыр. Онда һәмин системин үмуми һәлли

$$x = \Phi(t) c$$

шәклиндә олар. Шәртә көрә (10) системинин T периодлу һәлли олмадығындан, ихтијари $c \neq 0$ сүтун вектору үчүн

$$\Phi(t+T) c \neq \Phi(t) c$$

олмалыдыр. Бурадан, (87) дүстуруна әсасән алырыг ки,

$$\Phi(t) \, [\Phi(T) - E] \, c \neq 0.$$

Шәртә көрә c ихтијари сабит вектор, $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан, бурадан алыныр ки, $\Phi(T) - E$ матриси дә гејри-махсуси матрисдир.

Бирчинс олмајан (1′) системинин үмуми һәллини $\Phi(t)$ матрисанты васитәсилә ((19) дүстуруна әсасән)

$$x(t) = \Phi(t) \, x(0) + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) \, f(s) ds \tag{19'}$$

шәклиндә јазмаг олар, бурада $x(0)$ ихтијари вектордур. Онда системин T периодлу һәлли дә (әкәр варса) бу һәлләр ичәрисиндә олмалыдыр.

(19′) дүстуруна әсасән

$$x(t+T) = \Phi(t+T) x(0) + \Phi(t+T) \int_0^{t+T} \Phi^{-1}(s) f(s) ds =$$

$$= \Phi(t+T) x(0) + \Phi(t+T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds +$$

$$+ \Phi(t+T) \int_T^{t+T} \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

Бурадан, икинчи интегралда $s = T + \tau$ әвәзләмәси апарараг $f(t)$-нин T периодлу вектор-функсија олдуғуну вә (87) дүстуруну нәзәрә алсаг,

$$x(t+T) = \Phi(t) \left[\Phi(T) x(0) + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds \right] +$$

$$+ \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds = \Phi(t) x(T) + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds$$

олар. Бурадан вә (19′) дүстурундан ајдындыр ки,

$$x(T) = x(0) \tag{98}$$

шәртинин өдәнмәси, $x(t)$ һәллинин (1′) системинин T периодлу һәлли олмасы үчүн зәрури вә кафидир.

(19′) дүстурундан

$$x(T) = \Phi(T) x(0) + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds$$

олдуғундан, (98) шәртинә әсасән, $x(0)$ векторуна нәзәрән

$$(\Phi(T) - E) x(0) = -\Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds \tag{99}$$

чәбри тәнликләр системи алынар. $\Phi(T)-E$ гејри-мәхсуси матрис олдуғундан, бу системин јеканә һәлли вар.

Беләликлә, (99) системиндән тә'јин олунан $x(0)$ векторуна уј ғун олан (19′) һәлли T периодлу һәлл олур. Һәллин периодиклији шәртинә әсасән

$$x(t)=x(t+T)=\Phi(t+T)x(0)+\Phi(t+T)\int\limits_0^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds=$$

$$=\Phi(t+T)\left[x(0)+\int\limits_0^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right]=\Phi(t+T)\,\Phi^{-1}(t)\left[\Phi(t)x(0)+\Phi(t)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\Phi(t)\int\limits_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right]=$$

$$=\Phi(t+T)\,\Phi^{-1}(t)\left[x(t)+\Phi(t)\int\limits_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right].$$

Демәли, $x(t)$-јә нәзәрән

$$x(t)=\Phi(t+T)\Phi^{-1}(t)x(t)+\Phi(t+T)\int\limits_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds \quad (100)$$

тәнлији алынар.

$$G(t,s)=\Phi(t+T)\,\Phi^{-1}(t+s)$$

ишарә едәк. Онда (100) тәнлијини

$$(E-G(t,0))x(t)=\int\limits_t^{t+T}G(t,s-t)\,f(s)ds \qquad (101)$$

шәклиндә јазмаг олар. (87) дүстуруна әсасән

$$G(t,0)=\Phi(t)\Phi(T)\Phi^{-1}(t)$$

олдуғундан, $G(t,0)$ вә $\Phi(T)$ матрисләри охшардырлар, јә'ни $E-G(t,0)$ матрисинин тәрси вар. Онда (101) дүстурундан, $s=t+T-\tau$ әвәзләмәси апарараг, $f(t)$ вектор-функсијасынын периодиклијини дә нәзәрә алсаг,

$$x(t)=(E-G(t,0))^{-1}\int\limits_0^{T}G(t,T-\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Бу периодик һәллин јеканәлији онун гурулма гајдасындан ајдындыр. Теорем исбат олунду.

Чалышмалар

1. Фундаментал һәлләр системи

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}t^2e^{-t}\\ (1+t^2)e^{-t}\end{pmatrix}$$

олан хәтти тәнликләр системини гурун.

Чаваб: $\begin{cases}\dot{x}_1=(1-2t+2t^2)x_1+(2t-2t^2)x_2,\\ \dot{x}_2=(2-2t+2t^2)x_1+(-1+2t-2t^2)x_2.\end{cases}$

2. Ардычыл интегралламагла

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1\sin t,\\ \dot{x}_2=x_1e^{\cos t}+\dfrac{2t}{1+t^2}x_2\end{cases}$$

системинин үмуми һәллини тапмалы.

Чаваб: $x_1=c_1e^{-\cos t}$, $x_2=c_1(1+t^2)\operatorname{arctg}t+c_2(1+t^2)$.

3. Ујғун бирчинс системин фундаментал матрисинин

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+t^2} & -t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}$$

олдуғуну биләрәк,

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dfrac{t^2-t}{(1+t^2)^2}x_1-\dfrac{3t^2+1}{(1+t^2)^2}x_2+2;\\ \dot{x}_2=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x_1+\dfrac{t^2+3t}{(1+t^2)^2}x_2\end{cases}$$

системини сабитләрин вариасијасы үсулу илә һәлл етмәли.

Чаваб:

$$x_1=\frac{c_1}{1+t^2}-c_2t+\frac{2t}{1+t^2}+t\ln(1+t^2),$$
$$x_2=c_1t+c_2(1+t^2)+2t^2-(1+t^2)\ln(1+t^2).$$

4. $\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1+4x_2,\\ \dot{x}_2=-(x_1+2x_2)\end{cases}$

системини, e^{At} матрисини һесабламагла һәлл един.

Чаваб: $x_1=c_1+2(c_1+2c_2)t$, $x_2=c_2-(c_1+2c_2)t$.

5. Ашағыдакы сабит әмсаллы системләри һәлл един:

а) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+x_2,\\ \dot{x}_2=-2x_1+4x_2.\end{cases}$ *Чаваб:* $x_1=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$, $x_2=c_1e^{2t}+2c_2e^{3t}$.

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = 8x_1 - 8x_2 - x_3. \\ (\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + c_3e^{-t}$, $x_2 = c_1e^{2t} + c_3e^{-t}$, $x_3 = 2c_2e^{3t} + 3c_3e^{-t}$.

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_3 = 5x_1 - \dot{x}_2 - 5x_3, \\ (\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t}$, $x_2 = c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t}$, $x_3 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 2c_3e^{-3t}$.

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 1{,}5x_2 - 1{,}5x_3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3, \\ \dot{x}_3 = 3x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3, \\ (\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = (c_2 \sin 3t + c_3 \cos 3t)e^{2t}$, $x_2 = c_1e^{-t} + (-c_3 \cos 3t + c_2 \sin 3t)e^{2t}$, $x_3 = -c_1e^{-t} + (-c_3 \cos 3t + c_2 \sin 3t)e^{2t}$.

д) $\begin{cases} \dot{x} = 8x_1 - 10x_2 - 8x_3, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 5x_2 - 5x_3, \\ (\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = 3c_1e^{2t} + c_2(\cos t - \sin t)e^{-t} + c_3(\cos t + \sin t)e^{-t}$, $x_2 = c_1e^{2t} + c_2 e^{-t}\cos t + c_3 e^{-t}\sin t$, $x_3 = c_1e^{2t} - c_2 e^{-t}\sin t + c_3 e^{-t}\cos t$.

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1, \\ (\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = (c_1 + c_2)e^t + 2c_3e^{2t}$, $x_2 = (c_1 + 2c_2)e^t + c_3e^{2t}$, $x_3 = (c_1 + c_2)e^t + c_3e^{2t}$.

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3, \\ (\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = (c_1 + tc_2)e^t + c_3e^{2t}$, $x_2 = (c_1 - c_2 + tc_2)e^t$, $x_3 = (c_1 + c_2 + tc_2)e^t + c_3e^{2t}$.

6. Хәтти асылы олмаjан һәлләр системинә көрә хәтти тәнлиjи гурун:

а) $1, \sin t, t\sin t$. *Чаваб:* $(1+\cos^2 t)\dddot{y} + \sin 2t\, y + (2+\sin^2 t)y = 0$.

б) $\sin t, \cos t, e^{2t}$. *Чаваб:* $\dddot{y} - 2\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0$.

в) e^{3t}, te^{3t}, e^{-t}. *Чаваб:* $\dddot{y} - 5\ddot{y} + 3\dot{y} + 9y = 0$.

г) t, e^{-t}, e^t. *Чаваб:* $t\dddot{y} - \ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$.

7. Остроградски—Лиувилл дүстурундан истифадә едәрәк, верилмиш хүсуси һәллинә көрә тәнлиjи һәлл един:

а) $(1+t^2)^2\ddot{y} - t(1+t^2)y + (t^2-1)y = 0$, $y_1 = \sqrt{1+t^2}$

Чаваб: $y = \sqrt{1+t^2}\,[c_1 \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + c_2]$.

б) $(1+t)\ddot{y} - \dot{y} - ty = 0, y_1 = e^t$ *Чаваб:* $y = c_1(3+2t)e^{-t} + c_2e^t$.

8. Сабитләрин вариасиjасы үсулу илә ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $(1+t)\ddot{y} + t\dot{y} - y = (1+t)^2e^{-t}$.

Уjғун бирчинс тәнлиjин бир хүсуси һәллинин $y_1 = t$ олдуғу верилир.

Чаваб: $y = c_1t + c_2e^{-t} - (t + 0{,}5t^2)e^{-t}$.

б) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = e^{2t}\operatorname{ctg} t$,

Чаваб: $y = \left(c_1 \cos t + c_2 \sin t + \sin t \cdot \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)e^{2t}$.

9. Намә'лум әмсаллар үсулу илә ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $\dddot{y} - 3\dot{y} + 4y = 2e^t$. *Чаваб:* $y = c_1e^{-t} + (c_2 + c_3t)e^{2t} + e^t$.

б) $\dddot{y} - 3\dot{y} + 4y = (6 - 18t)e^{2t}$. *Чаваб:* $y = c_1e^{-t} + (c_2 + c_3t)e^{2t} + t^2(2-t)e^{2t}$

в) $\dddot{y} - 5\ddot{y} + 9\dot{y} - 5y = 8\sin t$. *Чаваб:* $y = c_1e^t + (c_2\cos t + c_3\sin t)e^{2t} - \cos t$.

г) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 10y = 6e^t\cos 3t$. *Чаваб:* $y = (c_1\cos 3t + c_2\sin 3t)e^t + e^t t\sin 3t$.

10. Ашағыдакы Еjлер тәнликләрини һәлл един.

а) $(5t-1)^2\ddot{x} - 10(5t-1)\dot{x} + 50x = 0$. *Чаваб:* $x = c_1(5t-1) + c_2(5t-1)^2$.

б) $t^2\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 6t^2 + 2$. *Чаваб:* $x = c_1t + c_2t^2 + t^4 + 1$.

11. Көстәрин ки, $b^2 - 4c > 0$ олдуғда

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \sin t$$

тәнлиjинин jеканә периодик һәлли вар вә бу һәлли тапын.

Чаваб:

$$x = \frac{c-1}{(c-1)^2 + b^2}\sin t - \frac{b}{(c-1)^2 + b^2}\cos t.$$

ҺӘЛЛИН ПАРАМЕТРЛӘРДӘН ВӘ БАШЛАНҒЫЧ ГИЈМӘТЛӘРДӘН АСЫЛЫЛЫҒЫ

Адәтән, практики мәсәләләрин һәллини диференсиал тәнлијә кәтирәркән, бахылан мәсәләнин хүсусијјәти илә бағлы олан әдәди параметрләри нәзәрә алмаг лазым кәлир. Она көрә дә диференсиал тәнлијин һәлли, һәмин параметрләрдән асылы олур вә бир чох һалларда параметрләри сечмәклә әлверишли олан һәлл тапылыр. Дикәр тәрәфдән, ајдындыр ки, башланғыч шәртләри дәјишдикдә тәнлијин һәлли дәјишир, јә'ни һәлл һәм дә башланғыч гијмәтләрдән асылы олур.

Бу фәсилдә әввәлчә сағ тәрәфи параметрләрдән асылы олан нормал системин һәллинин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлији вә диференсиалланмасы һаггында теоремләр исбат олунур. Сонра исә бу теоремләрин көмәји илә һәллин башланғыч гијмәтләрдән асылылығы, нормал системин үмуми интегралынын варлығы вә һәллин һәм сәрбәст дәјишәнә, һәм дә параметрә нәзәрән аналитиклији арашдырылыр. Бунлардан әлавә, сингулјар һәјәчанланмыш системләр һаггында гыса мә'лумат верилир.

§ 1 ҺӘЛЛИН ПАРАМЕТРЛӘРӘ НӘЗӘРӘН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Тутаг ки, сағ тәрәфи $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ әдәди параметрләриндән асылы олан

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \qquad (1)$$

нормал диференсиал тәнликләр системи верилмишдир, бурада $f(t, x, \mu)$—компонентләри $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олан вектор-функсијадыр. Бу систем компонентләрлә

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1')$$

шәклиндә јазылыр. Фәрз едәчәјик ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары $t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l$ дәјишәнләри фәзасынын G областында тә'јин олунмушдур.

Ајдындыр ки, һәр бир $(t^0, x^0, \mu^0) \in G$ нөгтәси үчүн елә сонлу $a > 0$, $b > 0$, $\rho > 0$ әдәдләри тапмаг олар ки, гапалы, маһдуд

$$R = \{ |t - t_0| \leqslant a, \quad \|x - x^0\| \leqslant b, \quad \|\mu - \mu^0\| \leqslant \rho \}$$

области G областында јерләшсин, бурада

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|\mu\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{l} \mu_k^2}.$$

Системин

$$x(t_0) = x^0 \qquad (2)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллини $x = \varphi(t, \mu)$ илә ишарә едәк, бурада $\varphi(t, \mu)$—компонентләри $\varphi_1(t, \mu), \ldots, \varphi_n(t, \mu)$ олан вектор-функсијадыр.

Теорем 1 (Локал теорем). *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор функсијасынын $f_i(t, x, \mu)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри R-дә кәсилмәздирләр вә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирләр. Онда $\|\mu - \mu^0\| \leqslant \rho$ шәртини өдәјән һәр бир μ параметри үчүн (1) системинин (2) башланғыч шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - h, t_0 + h]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә $x = \varphi(t, \mu)$ һәлли вар. Бу һәлл гапалы*

$$\Pi = \{ |t - t_0| \leqslant h, \quad \|\mu - \mu^0\| \leqslant \rho \}$$

областында аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир; бурада

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{R} \|f(t, x, \mu)\|.$$

Исбаты. Теоремин шәртләриндән ајдындыр ки, елә $K > 0$ әдәди вар ки, $(t, x, \mu) \in R$ вә $(t, y, \mu) \in R$ үчүн

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, y, \mu)\| \leqslant K \|x - y\| \qquad (3)$$

шәрти өдәнир.

Теореми исбат етмәк үчүн μ параметринин $\|\mu - \mu^0\| \leqslant \rho$ шәртини өдәјән һәр һансы гијмәтини көтүрүб, (1) системинин (2) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә ардычыл јахынлашма үсулуну тәтбиг едәк.

Сыфырынчы јахынлашма олараг $\varphi^0(t, \mu) = x^0$ габул едәрәк

$$\varphi^m(t, \mu) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi^{m-1}(s, \mu), \mu\right) ds, \quad m = 1, 2, \ldots$$

јахынлашмаларыны гураг. Ајдындыр ки, $\varphi^m(t_0, \mu) = x^0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

IV фәслин 7-чи параграфында верилән гајда илә көстәрмәк олар ки, $\{\varphi^m(t, \mu)\}$ ардычыллығынын елементләри Π-дә кәсилмәздир вә графикләри R-дә јерләшир.

Көстәрәк ки, $\{\varphi^m(t, \mu)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы Π-дә мүнтәзәм јығылыр. Бунун үчүн

$$\varphi^0(t,\mu) + [\varphi^1(t,\mu) - \varphi^0(t,\mu)] + \cdots + [\varphi^m(t,\mu) - \varphi^{m-1}(t,\mu)] + \cdots \qquad (4)$$

вектор-сырасы дүзәлдәк вә онун һәдләрини гијмәтләндирәк.

Тутаг ки, гапалы Π областында $\|\varphi^0(t,\mu)\| \leq L$ вә $\|\varphi^1(t,\mu) - \varphi^0(t,\mu)\| \leq L$. Онда (3) шәртинә әсасән асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\|\varphi^m(t,\mu) - \varphi^{m-1}(t,\mu)\| \leq L\,\frac{(Kh)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

бәрабәрсизликләри өдәнир. Үмуми һәдди $L\,\frac{(Kh)^{m-1}}{(m-1)!}$ олан әдәди сыра јығылдығындан, Вејерштрасс әламәтинә көрә, (4) вектор-сырасы Π-дә мүнтәзәм јығылыр вә демәли, $\{\varphi^m(t,\mu)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы да мүнтәзәм јығылыр. Ардычыллығын елементләри кәсилмәз олдуғундан, $\varphi(t,\mu)$ лимит вектор-функсијасы да Π-дә кәсилмәз олар.

IV фәслин 7-чи параграфындакы мүһакимәләри тәкрар етмәклә көстәрмәк олар ки, $x = \varphi(t,\mu)$ вектор-функсијасы (1) системинин (2) башланғыч шәртини өдәјән јеканә һәллидир. Теорем исбат олунду.

Лемма 1. *Тутаг ки, $g(y,u)$ функсијасы гапалы, мәһдуд $Q\ \{|y| \leq a,\ |u| \leq b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир. Онда ихтијари $(y,u) \in Q$, $(y,v) \in Q$ үчүн*

$$|g(y,u) - g(y,v)| \leq \omega(|u - v|)$$

бәрабәрсизлијини өдәјән мүсбәт, монотон артан вә z сыфра јахынлашдыгда сыфра јахынлашан $\omega(z)$ функсијасы вардыр.

Исбаты. $g(y,u)$ функсијасы гапалы, мәһдуд Q дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғундан, мүнтәзәм кәсилмәздир.

$$\sup_{|\mu-\eta|\leq|u-v|}\ \sup_{|y|\leq a} |g(y,\mu) - g(y,\eta)| = \omega(|u - v|)$$

ишарә едәк. Ајдындыр ки, $\omega(z)$ монотон артан функсијадыр вә $\lim\limits_{z\to+0} \omega(z) = 0$. Дикәр тәрәфдән

$$|g(y,u) - g(y,v)| \leq \sup_{|\mu-\eta|\leq|u-v|}\ \sup_{|y|\leq a} |g(y,\mu) - g(y,\eta)|$$

олдуғундан, лемма исбат олунду.

Теорем 2 (Гејри-локал теорем). *Тутаг ки, $f(t,x,\mu)$ вектор-функсијасынын $f_i(t,x,\mu)$, $i=1, 2, \ldots, n$ компонентләри G областында кәсилмәздирләр вә $x_1, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирләр. Әкәр $x=\varphi(t,\mu^0)$ вектор-функсијасы (1), (2) мәсәләсинин $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунмуш һәлли исә, елә $\rho > 0$ әдәди вар ки, $\|\mu - \mu^0\| \leq \rho$ шәртини өдәјән μ параметрләри*

үчүн $x = \varphi(t,\mu)$ һәлләри дә $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунублар. Бу һәлләр гапалы $Q = \{\alpha \leq t \leq \beta;\ \|\mu - \mu^0\| \leq \rho\}$ областында кәсилмәздирләр.

Исбаты. $x = \varphi(t,\mu^0)$ һәлли $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олундуғундан, $t \in [\alpha, \beta]$ үчүн $(t, \varphi(t,\mu^0), \mu^0) \in G$. Она көрә елә мүсбәт p, q әдәдләри тапмаг олар ки, $\alpha \leq t \leq \beta$, $\|x - \varphi(t,\mu^0)\| \leq p$, $\|\mu - \mu^0\| \leq q$ шәртләрини өдәјән (t, x, μ) нөгтәләри чохлуғу тамамилә G областынын дахилиндә јерләшәр. Белә (t, x, μ) нөгтәләринин чохлуғуну R_1 илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, R_1 мәһдуд вә гапалы областдыр. Шәртә көрә $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы R_1-дә мүнтәзәм кәсилмәз олдуғундан, леммаја әсасән, $(t, x, \mu) \in R_1$, $(t, x, \mu^0) \in R_1$ үчүн

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu^0)\| \leq \omega(\|\mu - \mu^0\|) \qquad (5)$$

бәрабәрсизлији өдәнир, бурада $\omega(z)$ монотон артан вә z сыфра јахынлашдыгда сыфра јахынлашан функсијадыр.

$\|\mu - \mu^0\| \leq q$ шәртини өдәјән μ көтүрәрәк (1), (2) мәсәләсинин она ујғун олан вә мүәјјән $[\alpha_1, \beta_1]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллини $x = \varphi(t,\mu)$ илә ишарә едәк. Тутаг ки, $\alpha \leq \alpha_1 < t_0 < \beta_1 \leq \beta$ вә $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ үчүн $(t, \varphi(t,\mu), \mu) \in R_1$.

Шәртә көрә $x = \varphi(t,\mu)$, $x = \varphi(t,\mu^0)$ вектор-функсијалары (1), (2) мәсәләсинин μ вә μ^0-а ујғун һәлләри олдуғундан, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ үчүн

$$\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s,\mu), \mu) - f(s, \varphi(s,\mu^0), \mu^0)]\, ds.$$

Бу ејниликдән $t \in [t_0, \beta_1]$ үчүн (3) вә (5) шәртләринә әсасән

$$\|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0)\| \leq \int_{t_0}^{t} [K\|\varphi(s,\mu) - \varphi(s,\mu^0)\| + \omega(\|\mu - \mu^0\|)]\, ds, \quad t_0 \leq t \leq \beta_1 \qquad (6)$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бурада

$$u(t) = \|\varphi(t,\mu) - \varphi(t,\mu^0)\|$$

ишарә етсәк, алынан бәрабәрсизлији

$$u(t) \leq \omega(\|\mu - \mu^0\|)(t - t_0) + K\int_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \quad t_0 \leq t \leq \beta_1$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк,

$$u(t) \leq c\,\omega(\|\mu - \mu^0\|), \quad c = \frac{1}{K}\left(e^{K(\beta_1-\alpha_1)} - 1\right)$$

бәрабәрсизлијини, јә'ни $t_0 \leq t \leq \beta_1$ олдугда

$$\| \varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^0) \| \leqslant c\omega(\| \mu - \mu^0 \|) \qquad (7)$$

бәрабәрсизлијини аларыг.

Ујғун гајда илә (7) бәрабәрсизлијинин $[\alpha_1, t_0]$ парчасында да доғрулуғуну көстәрмәк олар.

Тутаг ки, ρ әдәди

$$\rho \leqslant q, \quad c\omega(\rho) < p$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән мүсбәт әдәддир, μ^1 исә μ параметринин

$$\| \mu^1 - \mu^0 \| \leqslant \rho \qquad (8)$$

шәртини өдәјән гејд олунмуш гијмәтидир.

Көстәрәк ки, (1), (2) мәсәләсинин $\mu = \mu^1$ гијмәтинә ујғун олан $x = \varphi(t, \mu^1)$ һәлли $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунуб вә $t \in [\alpha, \beta]$ үчүн $(t, \varphi(t, \mu^1), \mu^1) \in R_1$.

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $x = \varphi(t, \mu^1)$ һәллини, графики R_1-дә јерләшмәклә ән чоху (δ, γ) интервалына давам етдирмәк олар, белә ки, $\alpha \leqslant \delta$, $\gamma \leqslant \beta$ бәрабәрсизликләриндән һеч олмаса бири өдәнир. Көстәрәк ки, $\gamma > \beta$ олмалыдыр. (Ујғун гајда илә $\delta < \alpha$ бәрабәрсизлијинин өдәндијини көстәрмәк олар.)

$$E = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta;\ \| x - \varphi(t, \mu^0) \| \leqslant p;\ \mu = \mu^1\}$$

чохлуғуна бахаг. Ајдындыр ки, E чохлуғу гапалы мәһдуд чохлугдур вә $E \subseteq R_1$.

Тутаг ки, $\gamma \leqslant \beta$. Онда һәллин давамы һаггында теоремә әсасән (II фәсил § 4), t аргументи γ-ја јахынлашдыгда $(t, \varphi(t, \mu^1), \mu^1)$, нөгтәси E чохлуғундан кәнара чыхар. Бу исә t аргументи γ-ја јахынлашаркән

$$\| \varphi(t, \mu^1) - \varphi(t, \mu^0) \| \leqslant p \qquad (9)$$

бәрабәрсизлији позулдугда мүмкүндүр. Бу бәрабәрсизлијин позулмасы о демәкдир ки, елә $\beta' < \beta$ әдәди вар ки, $t_0 < t < \beta'$ олдугда

$$\| \varphi(t, \mu^1) - \varphi(t, \mu^0) \| < p,$$

$t = \beta'$ олдугда исә

$$\| \varphi(\beta', \mu^1) - \varphi(\beta', \mu^0) \| = p. \qquad (10)$$

Дикәр тәрәфдән, $\| \mu^1 - \mu^0 \| \leqslant \rho$, $t_0 \leqslant t \leqslant \gamma \leqslant \beta$ олдугда $\varphi(t, \mu^1) - \varphi(t, \mu^0)$ фәрги үчүн (7) бәрабәрсизлији доғру олдуғундан, (10) бәрабәрлији ρ әдәдинин сечилмәсинә зиддир. Јә'ни $\gamma > \beta$ олмалыдыр вә демәли, $x = \varphi(t, \mu^1)$ һәлли $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунуб.

μ^1 вектору μ параметринин (8) бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари гијмәти олдуғундан, $\| \mu - \mu^0 \| \leqslant \rho$ шәртини өдәјән μ-ләр үчүн $x = \varphi(t, \mu)$ һәлләри $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунублар. Бу һәлләрин гапалы $\Pi_1 = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \| \mu - \mu^0 \| \leqslant \rho\}$ областында аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәз олмасы 1-чи теоремдән алыныр.

Мисал 1. $\dot{x} = \frac{x}{t} + \mu t^2$ тәнлијинин $x(1) = 1$ шәртини өдәјән вә $\mu = 0$, $\mu = 0{,}01$ гијмәтләринә ујғун ол н һәлләринин фәргини $t \in [1, 2]$ үчүн гијмәтләндирәк. Тәнлијин $\mu = 0$-а ујғун һәлли $\varphi(t, 0) = t$, $\mu = 0{,}01$-ә ујғун һәлл исә $\varphi(t, 0{,}01) = \frac{t}{200}(t^2 + 199)$. Онда

$$|\varphi(t, 0{,}01) - \varphi(t, 0)| = t\left(\frac{1}{200}(t^2 + 199) - 1\right) \leqslant 2 \cdot \frac{3}{200} = 0{,}03.$$

§ 2. ҺӘЛЛИН ПАРАМЕТРЛӘРӘ НӘЗӘРӘН ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Һәллин параметрләрә нәзәрән диференсиалланмасы мәсәләсини өјрәнмәк үчүн әввәлчә ашағыдакы лемманы исбат едәк.

Лемма 2 (Адамар). *Тутаг ки, $g(u, v) = g(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ функсијасы $v_1, v_2, \ldots, v_q$ дәјишәнләринә нәзәрән габарыг олан $(p+q)$-өлчүлү Ω областында кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial g}{\partial v_1}, \frac{\partial g}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial v_q}$ хүсуси төрәмәләри вар. Онда Ω областындан көтүрүлмүш ихтијари ики (u, v^1), (u, v^2) нөгтәләри үчүн*

$$g(u, v^2) - g(u, v^1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(u, v^1, v^2)\left(v_j^2 - v_j^1\right) \qquad (11)$$

бәрабәрлији доғрудур. Бурада $h_j(u, v^1, v^2)$, $j = 1, 2, \ldots, q$ функсијалары Ω областына дахил олан (u, v^1), (u, v^2) чүтләри үчүн u, v^1, v^2 аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир.

Исбаты. Ихтијари ики (u, v^1), $(u, v^2) \in \Omega$ нөгтәләри көтүрүб, $\omega(s) = v^1 + s(v^2 - v^1)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ ишарә едәк. Ω областы v-јә нәзәрән габарыг олдуғундан, $(u, \omega(s)) \in \Omega$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Онда

$$g(u, v^2) - g(u, v^1) = g(u, \omega(1)) - g(u, \omega(0)) =$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g(u, \omega(s))\, ds.$$

олар.

$$\frac{\partial}{\partial s} g(u, \omega(s)) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g(u, \omega(s))}{\partial \omega_j} \frac{d\omega_j(s)}{ds} =$$

Ајдындыр ки, (14) системинин (15) башланғыч шәртләрини өдәјән вә Q-дә аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәз олан јеканә $z = \tilde{\psi}(t, \mu, \delta) = (\tilde{\psi}_1(t, \mu, \delta), \tilde{\psi}_2(t, \mu, \delta), \ldots, \tilde{\psi}_n(t, \mu, \delta))$ һәлли вар. Һәллин јеканәлијинә әсасән алырыг ки,

$$\tilde{\psi}_i(t, \mu, \delta) = \psi_i(t, \mu, \delta), \ t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (16)$$

олмалыдыр. Бу ејниликләрин сол тәрәфи $\delta_k = 0$ олдугда да, сағ тәрәфи исә $\delta_k \neq 0$ олдугда тә'јин олунмушдур. Бурадан алырыг ки,

$$\lim_{\delta_k \to 0} \psi_i(t, \mu, \delta) = \lim_{\delta_k \to 0} \tilde{\psi}_i(t, \mu, \delta) = \tilde{\psi}_i(t, \mu, 0), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

сонлу лимити вар. Онда (12) мүнасибәтләринә әсасән

$$\lim_{\delta_k \to 0} \psi_i(t, \mu, \delta) = \frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k} = \tilde{\psi}_i(t, \mu, 0), \ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (17)$$

Бурадан да, $\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ төрәмәләринин варлығы вә аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәзлији алыныр. Дикәр тәрәфдән, $\tilde{\psi}(t, \mu, 0) = (\tilde{\psi}_1(t, \mu, 0), \tilde{\psi}_2(t, \mu, 0), \ldots, \tilde{\psi}_n(t, \mu, 0))$ вектор-функсијасы $\lambda = \mu$ олдугда (јә'ни $\delta_k = 0$ олдугда) (14) системинин һәлли олдуғундан, (17) мүнасибәтинә әсасән алырыг ки,

$$\frac{\partial \varphi(t, \mu)}{\partial \mu_k} = \left(\frac{\partial \varphi_1(t, \mu)}{\partial \mu_k}, \frac{\partial \varphi_2(t, \mu)}{\partial \mu_k}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n(t, \mu)}{\partial \mu_k} \right)$$ вектор-функсијасы һәмин системин һәллидир. Бурадан да, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}\right)$ гарышыг төрәмәләринин варлығы вә кәсилмәзлији алыныр. $x = \varphi(t, \mu)$ вектор-функсијасы (1) системинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial t} = f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu), \ i = 1, 2, \ldots, n$$

ејниликләри өдәнир вә бу ејниликләрин сағ тәрәфләринин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә сол тәрәфләринин дә $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар вә

$$\frac{\partial}{\partial \mu_k}\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial t}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(t, \mu)}{\partial \mu_k} + \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial \mu_k},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, l. \quad (18)$$

Беләликлә, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \mu_k}\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial t}\right)$ төрәмәләринин һәр икиси вар вә кәсилмәздирләр. Онда Шварс теореминә әсасән алырыг ки, бу гарышыг төрәмәләр бәрабәрдир. Теорем исбат олунду.

Теоремдән ајдындыр ки, (18) ејниликләрини

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(t, \mu)}{\partial \mu_k} + \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial \mu_k} \quad (19)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу исә көстәрир ки,

$$z_{ik} = \frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, l \quad (20)$$

функсијалары

$$\dot{z}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j} z_{jk} + \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial \mu_k}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (21)$$
$$k = 1, 2, \ldots, l$$

хәтти системинин

$$z_{ik}(t_0) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, l \quad (22)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли олур.

(21) системинә (1) системинин параметрләрә нәзәрән *вариасијалара системи* дејилир. Ајдындыр ки,

$$f_x(t, \mu) = \left(\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j}\right), \ f_\mu(t, \mu) = \left(\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu))}{\partial \mu_k}\right), Z = (z_{ik})$$

ишарәләринин көмәји илә (21) системини

$$\dot{Z} = f_x(t, \mu) Z + f_\mu(t, \mu) \quad (23)$$

матрис-систем шәклиндә, (22) башланғыч шәртләрини исә

$$Z(t_0) = 0 \quad (24)$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада Z илә $n \times l$-өлчүлү матрис-функсија ишарә едилмишдир.

Нәтичә. *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасынын $f_i(t, x, \mu)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри G областында кәсилмәздир вә $x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ аргументләринә нәзәрән m тәртибә гәдәр (m дә дахил олмагла) кәсилмәз төрәмәләри вар. Онда (1), (2) мәсәләсинин $x = \varphi(t, \mu)$ һәллинин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ параметрләринә нәзәрән m тәртибә гәдәр (m дә дахил олмагла) кәсилмәз төрәмәләри вар.*

Исбаты. Нәтичәнин доғрулуғуну ријази индуксија үсулу илә исбат едәк. $m = 1$ олдугда нәтичәнин доғрулуғу ајдындыр. $m = r$ үчүн онун доғрулуғуну гәбул едәрәк $m = r + 1$ үчүн доғрулуғуну көстәрәк.

Теоремә әсасән, $Z=\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}\right)$ матрис-функсијасы (23) матрис системинин (24) башланғыч шәртини өдәјән һәллидир.

Ајдындыр ки, гојулан шартлара әсасән, $f_x(t,\mu)Z+f_\mu(t,\mu)$ матрис-функсијасынын елементләринин z_{ik}, μ_k, $i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,l$ аргументләринә нәзәрән r тәртиб кәсилмәз төрәмәләри вар. Онда (23), (24) мәсәләсинин $Z=\Phi(t,\mu)$ матрис-һәллинин $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_l$ аргументләринә нәзәрән r тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар. Бу исә о демәкдир ки, (1), (2) мәсәләсинин $x=\varphi(t,\mu)$ һәллинин $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_l$ аргументләринә нәзәрән $r+1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар.

Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлији һаггында 2-чи теоремдән истифадә едәрәк, 3-чү теоремдәки мүһакимәләри тәкрар етмәклә ашағыдакы теореми исбат етмәк олар.

Теорем 4 *(Гејри-локал теорем). Тутаг ки, $f(t,x,\mu)$ вектор-функсијасы 3-чү теоремин шәртләрини өдәјир, $(t_0,x^0,\mu^0)\in G$ вә $x=\varphi(t,\mu^0)$ вектор-функсијасы (1), (2) мәсәләсинин $[\alpha,\beta]$ парчасында тәʼјин олунмуш һәллидир. Онда елә $\rho>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\|\mu-\mu^0\|<\rho$ шәртини өдәјән μ параметрләри үчүн $x=\varphi(t,\mu)$ һәлләри дә $[\alpha,\beta]$ парчасында тәʼјин олунублар, $Q=\{\alpha\le t\le\beta,\ \|\mu-\mu^0\|<\rho\}$ чохлуғунда кәсилмәз $\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}$, $i=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,l$ хүсуси төрәмәләри вә $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\mu)}{\partial t\,\partial\mu_k}$ кәсилмәз гарышыг төрәмәләри вар, белә ки, бу гарышыг төрәмәләр диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.*

Гејд едәк ки, $Z=\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}\right)$ матрис-функсијасы $[\alpha,\beta]$ парчасы да (23) вариасијаларла системинин (24) башланғыч шәртини өдәјән һәлли олур.

Нәтичә. *(1), (2) мәсәләсинин $x=\varphi(t,\mu^0)$ һәлли мәʼлум олдуғда, $x=\varphi(t,\mu)$ һәллинин $\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}$, $i=1,2,\dots,n$; $k=1,$ $2,\dots,l$ төрәмәләринин $\mu=\mu^0$ нөгтәсиндә гијмәтини һесабламаг үчүн*

$$\dot Z=f_x(t,\mu^0)Z+f_\mu(t,\mu^0) \tag{25}$$

матрис системинин

$$Z(t_0)=0 \tag{26}$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг кифајәтдир. Бу мәсәләнин һәлли $Z(t)=(z_{ik}(t))$ оларса, $\left.\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}\right|_{\mu=\mu^0}=z_{ik}(t)$ олур.

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1+2x_2+\mu(x_2-x_1),\\ \dot x_2=4x_1-x_2+\mu^2x_1x_2\end{cases}$$

системинин $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ шәртини өдәјән $x_1=\varphi_1(t,\mu)$, $x_2=\varphi_2(t,\mu)$ һәллинин $\frac{\partial\varphi_1(t,\mu)}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\varphi_2(t,\mu)}{\partial\mu}$ төрәмәләринин $\mu=0$ нөгтәсиндәки гијмәтләрини тапаг. Асанлыгла јохламаг олар ки, $\mu=0$ олдугда алынан

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1+2x_2,\\ \dot x_2=4x_1-x_2\end{cases}$$

системинин $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ шәртини өдәјән һәлли

$$x_1=\frac{1}{3}\left(e^{3t}-e^{-3t}\right),\quad x_2=\frac{1}{3}\left(e^{3t}+2e^{-3t}\right).$$

Бахылан систем үчүн

$$f_x(t,0)=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix},\quad f_\mu(t,0)=\begin{pmatrix}e^{-3t}\\0\end{pmatrix}$$

олдуғундан, (25), (26) мәсәләси

$$\begin{cases}\dot z_1=z_1+2z_2+e^{-3t}, & z_1(0)=0,\\ \dot z_2=4z_1-z_2, & z_2(0)=0\end{cases}$$

шәклиндәдир. Бу мәсәләнин һәлли

$$z_1=\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right)e^{-3t},\quad z_2=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}\left(2t+\frac{1}{3}\right)e^{-3t}$$

олдуғундан, нәтичәјә әсасән

$$\left.\frac{\partial\varphi_1(t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right)e^{-3t},$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2(t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}\left(2t+\frac{1}{3}\right)e^{-3t}.$$

§ 3. ҺӘЛЛИН БАШЛАНҒЫЧ ГИЈМӘТЛӘРДӘН АСЫЛЫЛЫҒЫ. ҮМУМИ ИНТЕГРАЛЫН ВАРЛЫҒЫ

Тутаг ки,

$$\dot x=f(t,x) \tag{27}$$

нормал системи верилмишдир; бурада $f(t,x)$ вектор-функсијасынын $f_i(t,x)$, $i=1,2,\dots,n$ компонентләри t, x_1, $x_2,\dots,x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән D областында кәсилмәздир вә $x_1,x_2,\dots,x_n$ аргументләринә нәзәрән

кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бу системин $x(t_0) = x^0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллинин t_0, x^0 башланғыч гијмәтләриндән асылылығы мәсәләсини өјрәнәк. Одур ки, t_0, x^0 кәмијјәтләринин дәјишән олмасыны гејд етмәк үчүн онлары ујғун олараг τ, ξ илә, (27) системинин

$$x(\tau) = \xi \tag{28}$$

шәртини өдәјән һәллини исә $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ илә ишарә едәк. Һәллин давамы һаггында теорема әсасән (IV фәсил, § 8) һәр бир $(\tau, \xi) \in D$ үчүн елә ән бөјүк (α, β) интервалы вар ки, бу һәлл t-јә нәзәрән һәмин интервалда тә'јин олунуб вә давам етдирилмәјәндир. Ајдындыр ки, һәллин тә'јин олундуғу интервал τ, ξ башланғыч гијмәтләриндән асылыдыр, јә'ни $\alpha = \alpha(\tau, \xi)$, $\beta = \beta(\tau, \xi)$.

Беләликлә, $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ функсијасы $(\tau, \xi) \in D$ вә $\alpha(\tau, \xi) < t < \beta(\tau, \xi)$ шәртләрини өдәјән (t, τ, ξ) нөгтәләри чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Бу чохлуғу Γ илә ишарә едәк.

Системдә

$$t = \tau + s, \quad x = \xi + y \tag{29}$$

әвәзләмәси апараг; бурада s јени сәрбәст дәјишән, y исә јени ахтарылан вектор-функсијадыр. Онда y-ә нәзәрән

$$\frac{dy}{ds} = f(\tau + s, \xi + y) \tag{30}$$

системини аларыг.

Бу системдә $g(s, y, \tau, \xi) = f(\tau + s, \xi + y)$ ишарә етсәк ону

$$\frac{dy}{ds} = g(s, y, \tau, \xi) \tag{31}$$

шәклиндә јаза биләрик. $f(t, x)$ вектор-функсијасы D областында тә'јин олундуғундан, $g(s, y, \tau, \xi)$ вектор-функсијасы $(\tau + s, \xi + y) \in D$ шәртини өдәјән (s, y, τ, ξ) нөгтәләри чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Белә (s, y, τ, ξ) нөгтәләри чохлуғуну D^* илә ишарә едәк. Бу һалда илә тә'јин олунан D^* чохлуғу $s, y_1, \ldots, y_n, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ дәјишәнләри фәзасында област тәшкил едир.

Тә'јин олунма гајдасындан ајдындыр ки, $g(s, y, \tau, \xi)$ вектор-функсијасынын $g_i(s, y, \tau, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри D^* областында кәсилмәздир вә $y_1, y_2, \ldots, y_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Дикәр тәрәфдән, (20) әвәзләмәләриндән ајдындыр ки,

$$y = \varphi(s + \tau, \tau, \xi) - \xi$$

вектор-функсијасы (31) системинин

$$y(0) = 0 \tag{32}$$

башланғыч шәртини өдәјән һәлли олур вә бу һәлл һәр бир $(\tau, \xi) \in D$ үчүн $\alpha(\tau, \xi) - \tau < s < \beta(\tau, \xi) - \tau$ интервалында тә'-

јин олунмушдур. Белә (s, τ, ξ) нөгтәләри чохлуғуну $\tilde{\Gamma}$ илә ишарә едәк.

Ајдындыр ки, (31) тәнлијинин (32) башланғыч шәртини өдәјән вә давам етдирилмәјән һәллини $y = \psi(s, \tau, \xi)$ илә ишарә етсәк, бу һәлл $\tilde{\Gamma}$ областында тә'јин олунмушдур. Һәллин јеканәлијинә әсасән, $\tilde{\Gamma}$ областында

$$\psi(s, \tau, \xi) = \varphi(s + \tau, \tau, \xi) - \xi \tag{33}$$

олар. Дикәр тәрәфдән,

$$t = s + \tau, \quad \tau = \tau, \; \xi = \xi$$

чевирмәси $\tilde{\Gamma}$ областы илә Γ областы арасында гаршылыглы бирги̇јмәтли ујғунлуг јаратдығындан, (33) бәрабәрлијиндән аларыг ки, Γ областында

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \xi + \psi(t - \tau, \tau, \xi) \tag{34}$$

мүнасибәти өдәнир. Бу көстәрир ки, (27) системинин (28) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин τ, ξ башланғыч гијмәтләриндән асылылығы мәсәләси, (29) әвәзләмәләри васитәсилә (31) системинин гејд олунмуш (32) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин τ, ξ параметрләриндән асылылығы мәсәләсинә кәтирилир.

Теорем 5. *Тутаг ки, $f(t, x)$ вектор-функсијасынын $f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри D областында кәсилмәздир вә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Онда (27), (28) мәсәләсинин $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ һәллинин Γ областында аргументләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга, $\frac{\partial^2 \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial t\, \partial \tau}$, $\frac{\partial^2 \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial t\, \partial \xi_k}$ гарышыг төрәмәләри кәсилмәздир вә диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.*

Исбаты. Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлији вә диференсиаллама сы һаггында теоремләри (31), (32) мәсәләсинә тәтбиг едиб (34) мүнасибәтини дә нәзәрә алсаг, ајдындыр ки, $\varphi(t, \tau, \xi)$ һәлли Γ областында кәсилмәздир, кәсилмәз $\frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга, $\frac{\partial^2 \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial t\, \partial \xi_k}$ гарышыг төрәмәләри кәсилмәздир вә диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.

Көстәрәк ки, $\varphi_i(t, \tau, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларынын Γ областында кәсилмәз $\frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \tau}$ хүсуси төрәмәләри вар.

Тутаг ки, $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ вә $x=\varphi(t,\bar\tau,\xi)$ вектор-функсиjалары (27) системинин уjғун олараг $x(\tau)=\xi$ вә $x(\bar\tau)=\xi$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлләридир. Онда

$$\varphi(t,\tau,\xi)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s,\tau,\xi))ds,$$

$$\varphi(t,\bar\tau,\xi)=\xi+\int_{\bar\tau}^t f(s,\varphi(s,\bar\tau,\xi))ds$$

еjниликләри өдәнир

Бу һәлләрин көмәјилә

$$V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=\frac{\varphi_i(t,\bar\tau,\xi)-\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\bar\tau-\tau},\quad \bar\tau\neq\tau \qquad (35)$$

функсиjаларыны дүзәлтсәк, jухарыдакы еjниликләрә әсасән алырыг ки,

$$V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=\frac{1}{\bar\tau-\tau}\int_{\bar\tau}^t[f_i(s,\varphi(s,\bar\tau,\xi))-$$

$$-f_i(s,\varphi(s,\tau,\xi))]ds-\frac{1}{\bar\tau-\tau}\int_\tau^{\bar\tau} f_i(s,\varphi(s,\tau,\xi))ds.$$

Бурадан, $f_i(s,\varphi(s,\bar\tau,\xi))-f_i(s,\varphi(s,\tau,\xi))$ фәргинә Адамар леммасыны тәтбиг етсәк,

$$V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=\int_{\bar\tau}^t\sum_{j=1}^n h_{ij}(s,\varphi(s,\bar\tau,\xi),\varphi(s,\tau,\xi))\times$$

$$\times V_j(s,\tau,\bar\tau,\xi)ds-\frac{1}{\bar\tau-\tau}\int_\tau^{\bar\tau}f_i(s,\varphi(s,\tau,\xi))ds.$$

Садәлик үчүн

$$\bar h_{ij}(t,\tau,\bar\tau,\xi)=h_{ij}(t,\varphi(t,\bar\tau,\xi),\varphi(t,\tau,\xi)),$$

$$h_i(\tau,\bar\tau,\xi)=-\frac{1}{\bar\tau-\tau}\int_\tau^{\bar\tau}f_i(s,\varphi(s,\tau,\xi))ds$$

ишарә едәк. $\bar h_{ij}(t,\tau,\bar\tau,\xi)$ функсиjалары $t,\tau,\bar\tau,\xi$ дәjишәнләринин елә гиjмәтләриндә тәјин олунмушдур ки, бу гиjмәтләр үчүн $(t,\tau,\xi)\in\Gamma$, $(t,\bar\tau,\xi)\in\Gamma$. Белә $(t,\tau,\bar\tau,\xi)$ нөгтәләри чохлуғуну R^* илә ишарә едәк. Адамар леммасына әсасән,

$\bar h_{ij}(t,\tau,\bar\tau,\xi)$ функсиjалары R^* областында кәсилмәздир. Ифадәләриндән аjдындыр ки, $h_i(\tau,\bar\tau,\xi)$ функсиjалары $\tau\neq\bar\tau$ олдугда R^* областында кәсилмәздир. Лопитал гаjдасына әсасән

$$\lim_{\bar\tau\to\tau} h_i(\tau,\bar\tau,\xi)=-f_i(\tau,\varphi(\tau,\tau,\xi))=-f_i(\tau,\xi)$$

олдуғундан

$$\tilde h_i(\tau,\bar\tau,\xi)=\begin{cases} h_i(\tau,\bar\tau,\xi), & \tau\neq\bar\tau \text{ оларса,}\\ -f_i(\tau,\xi), & \tau=\bar\tau \text{ оларса}\end{cases}$$

функсиjалары R^*-да кәсилмәз олар.

Беләликлә, $V(t,\tau,\bar\tau,\xi)=(V_1(t,\tau,\bar\tau,\xi),\dots,V_n(t,\tau,\bar\tau,\xi))$ вектор-функсиjасы, әмсаллары вә сәрбәст һәдләри R^* областында кәсилмәз олан хәтти

$$U_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=\sum_{j=1}^n\int_{\bar\tau}^t\bar h_{ij}(s,\tau,\bar\tau,\xi)U_j(s,\tau,\bar\tau,\xi)ds+\tilde h_i(\tau,\bar\tau,\xi),$$

$$i=1,2,\dots,n \qquad (36)$$

интеграл тәнликләр системинин һәллидир.

Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлиjи һаггында теоремин исбат гаjдасы илә көстәрмәк олар ки, (36) системинин R^* областында jеканә $\tilde V(t,\tau,\bar\tau,\xi)=(\tilde V_1(t,\tau,\bar\tau,\xi),\dots,\tilde V_n(t,\tau,\bar\tau,\xi))$ кәсилмәз һәлли вар. Һәллин jеканәлиjинә әсасән

$$\tilde V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi),\quad i=1,2,\dots,n.$$

Бу еjниликләрдән аjдындыр ки,

$$\lim_{\bar\tau\to\tau}V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=\tilde V_i(t,\tau,\tau,\xi),\quad i=1,2,\dots,n.$$

Бурадан

$$\lim_{\bar\tau\to\tau}V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)=\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}=\tilde V_i(t,\tau,\tau,\xi),\ i=1,2,\dots,n. \qquad (37)$$

Демәли, $\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$ хүсуси төрәмәләри вар вә кәсилмәздир. Дикәр тәрәфдән, $\tilde V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)$ вектор-функсиjасынын (36) интеграл тәнликләр системинин һәлли олмасындан аjдындыр ки, $\frac{\partial\tilde V_i(t,\tau,\bar\tau,\xi)}{\partial t}$ кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Онда (37) еjниликләринә әсасән $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t\,\partial\tau}$, $i=1,2,\dots,n$ кәсилмәз гарышыг төрәмәләри вар.

Теоремин шәртинә вә $\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$, $i=1,2,\dots,n$ төрәмәләринин кәсилмәзлиjинә әсасән

$$\frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{dt} = f_i(t, \varphi(t,\tau,\xi)),\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (38)$$

ејниликләринин сағ тәрәфләринин τ-ја нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләринин варлығындан алыныр ки, $\frac{\partial^2 \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau\, \partial t}$ гарышыг төрәмәләри вар вә кәсилмәздир. Бурадан Шварс теореминә әсасән, $\frac{\partial^2 \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t\, \partial\tau}$ хүсуси төрәмәләри вар вә диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил. Теорем исбат олунду.

Теоремин шәртләри дахилиндә (38) ејниликләриндән τ-ја нәзәрән төрәмә алмаг олар. Онда гарышыг төрәмәләрин бәрабәрлијинә әсасән

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \varphi(t,\tau,\xi))}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}, \qquad (39)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Дикәр тәрәфдән, (37) бәрабәрликләриндә $t = \tau$ көтүрдүкдә

$$\frac{\partial \varphi_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\tau} = \bar{V}_i(\tau,\tau,\tau,\xi) = \bar{h}_i(\tau,\tau,\xi) = -f_i(\tau,\xi)$$

олдуғундан, (39) ејниликләри көстәрир ки, компонентләри $u_1 = \frac{\partial \varphi_1(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$, $u_2 = \frac{\partial \varphi_2(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$, $\ldots$, $u_n = \frac{\partial \varphi_n(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$ олан $u(t,\tau,\xi)$ вектор-функсијасы хәтти бирчинс

$$\dot{u} = f_x(t, \varphi(t,\tau,\xi))\, u \qquad (40)$$

системинин

$$u(\tau) = -f(\tau,\xi) \qquad (41)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллидир.

(40) системинә (27) системинин сәрбәст дәјишәнин башланғыч гијмәтинә нәзәрән *вариасијаларлы системи* дејилир.

Гарышыг төрәмәләр бәрабәр олдуғундан, (38) ејнилијиндән ξ_k-ја нәзәрән төрәмә алсаг,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\tau,\xi))}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k},\ i, k = 1, 2, \ldots, n \qquad (42)$$

Башланғыч шәртинә әсасән $\varphi_i(\tau,\tau,\xi) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олдуғундан

$$\frac{\partial \varphi_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\xi_k} = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \text{ оларса}, \\ 0, & i \neq k \text{ оларса}. \end{cases}$$

Демәли, $\Phi = \left(\frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right)$ матрис-функсијасы хәтти бирчинс

$$\dot{\Phi} = f_x(t, \varphi(t,\tau,\xi))\, \Phi \qquad (43)$$

матрис-системинин

$$\Phi(\tau) = E \qquad (44)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллидир; бурада E ваһид матрисдир. (43) системинә (27) системинин ахтарылан функсијаларын башланғыч гијмәтләринә нәзәрән *вариасијаларла системи* дејилир.

Нәтичә. *Тутаг ки, (27) системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән $x = \varphi(t)$ һәлли мә'лумдур. Онда $x = \varphi(t,\tau,\xi)$ һәллинин*

$$u_i = \frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}\bigg|_{(\tau,\xi)=(t_0,x^0)},\quad \Phi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\bigg|_{(\tau,\xi)=(t_0,x^0)},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n$$

төрәмәләри ујғун олараг

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\varphi(t))}{\partial x_j} u_j,\quad u_i(t_0) = -f_i(t_0, x^0),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (45)$$

$$\dot{\Phi}_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\varphi(t))}{\partial x_j} \Phi_{jk},\ \Phi_{ik}(t_0) = \delta_{ik},\ i, k = 1, 2, \ldots, n \qquad (46)$$

мәсәләләринин һәлләри кими тапылыр.

Теорем 6 *(Линделөф). Тутаг ки, 5-чи теоремин шәртләри өдәнир вә $x_i = \varphi_i(t,\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары Γ областында (27), (28) мәсәләсинин һәллидир. Онда $z = \varphi_i(t,\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ дәјишәнләринә нәзәрән*

$$\frac{\partial z}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{n} f_k(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n) \frac{\partial z}{\partial\xi_k} = 0 \qquad (*)$$

хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлләридир вә

$$\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\ldots,\xi_n)} = \exp\left[\int_{\tau}^{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(s, \varphi(s,\tau,\xi))}{\partial x_k} ds\right] > 0.$$

Исбаты. Теореми исбат етмәк үчүн (42) ејнилијини $f_k(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)$-ә вуруб $k = 1, 2, \ldots, n$ көтүрәрәк топлајаг вә алынан мүнасибәти (39) ејнилијинин үзәринә кәләк. Бу заман

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{n}f_k(\tau,\xi)\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right]=$$

еjнилиj-

суси $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,\varphi(t,\tau,\xi))}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\varphi_j(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{n}f_k(\tau,\xi)\frac{\partial\varphi_j(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right]$

еjнилиjи алынар. Бурадан

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\tau}=-f_i(\tau,\xi),\quad \frac{\partial\varphi_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}=\delta_{ik}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$V_i(t,\tau,\xi)=\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{n}f_k(\tau,\xi)\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k},\quad i=1,2,\dots,n$$

функсиjалары

$$\dot u_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(t,\varphi(t,\tau,\xi))}{\partial x_j}u_j,\quad i=1,2,\dots,n$$

хәтти бирчинс системинин $u_i(\tau)=0$, $i=1,2,\dots,n$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли олдуғу алыныр. Һәллин јеканәлиjинә әсасән алырыг ки,

$$V_i(t,\tau,\xi)\equiv 0,\quad i=1,2,\dots,n,$$

јә'ни

$$\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{n}f_k(\tau,\xi)\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\equiv 0,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Бу исә теоремин биринчи тәклифинин доғрулуғуну көстәрир. Дикәр тәрәфдән, $\Phi=\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right)$ матрис-функсиjасы (43) системинин (44) шәртини өдәјән һәлли олдуғундан, Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуруна әсасән

$$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)}=\det\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right)=$$

$$=\exp\left[\int_{\tau}^{t}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k(s,\varphi(s,\tau,\xi))}{\partial x_k}\,ds\right]>0.$$

Теорем исбат олунду.

Инди исә (27) нормал системинин үмуми интегралынын варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 7. *Тутаг ки, 5-чи теоремин шәртләри өдәнир. Онда (27) системинин n сајда функсионал асылы олмајан диференсиалланан интеграллары вар.*

Исбаты. Тутаг ки,

$$\begin{cases}x_1=\varphi_1(t,\tau,\xi_1,\dots,\xi_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n=\varphi_n(t,\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)\end{cases}\qquad(**)$$

функсиjалар системи (27), (28) мәсәләсинин һәллидир.

Линделјоф теореминә көрә $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)}>0$ олдуғундан, гејри-ашкар функсиjаларын варлығы һаггында теоремә әсасән, (**) системи $\xi_1,\dots,\xi_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\begin{cases}\xi_1=\psi_1(\tau,t,x_1,\dots,x_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \xi_n=\psi_n(\tau,t,x_1,\dots,x_n).\end{cases}$$

Мә'лумдур ки, $\psi_1(\tau,t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(\tau,t,x_1,\dots,x_n)$ диференсиалланан функсиjалар олур.

Дикәр тәрәфдән,

$$\psi_i(\tau,t,\varphi_1(t,\tau,\xi_1,\dots,\xi_n),\dots,\varphi_n(t,\tau,\xi_1,\dots,\xi_n))\equiv\xi_i,$$
$$i=1,2,\dots,n$$

еjниликләринә әсасән

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_j}=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\dots,n$$

олдуғундан,

$$\frac{D(\psi_1,\dots,\psi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\cdot\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)}=1.$$

Бурадан $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)}>0$ шәртинә көрә алырыг ки, $\frac{D(\psi_1,\dots,\psi_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}>0$.

Бу исә көстәрир ки (бах: IV фәсил, теорем 1),

$$\psi_1(\tau,t,x_1,\dots,x_n),\dots,\psi_n(\tau,t,x_1,\dots,x_n)$$

функсиjалар системи һәр бир гејд олунмуш τ үчүн (27) системинин функсионал асылы олмајан диференсиалланан интегралларыдыр.

Мисал 3. $\dot x=\sqrt{1-t^2}\,e^{-x^2}$ тәнлијинин $x(0)=x_0$ вә $x(0)=\bar x_0$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлләринин фәргини $[-1,1]$ парчасында гијмәтләндирәк.

Тәнлијин верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәлләрини уйғун олараг $x=\varphi(t,x_0)$ вә $x=\varphi(t,\bar x_0)$ илә ишарә едәк. Бу һәлләр

$$\varphi(t,x_0)=x_0+\int_0^t\sqrt{1-s^2}\,e^{-\varphi^2(s,x_0)}\,ds,$$

$$\varphi(t, \overline{x}_0) = \overline{x}_0 + \int_0^t \sqrt{1-s^2}\, e^{-\varphi^2(s, \overline{x}_0)} ds$$

ejниликләрини өдәjир.

Гejд едәк ки, $\sqrt{1-t^2}\, e^{-x^2}$ функсиjасы $\{-1 \leqslant t \leqslant 1; -\infty < x < +\infty\}$ золағында

$$\left|\sqrt{1-t^2}\, e^{-x^2} - \sqrt{1-t^2}\, e^{-y^2}\right| \leqslant |x-y|$$

шәртини өдәjир. Она көрә дә $x = \varphi(t, x_0)$ вә $x = \varphi(t, \overline{x}_0)$ һәлләри $[-1, 1]$ парчасында тә'jин олунублар (II фәсил, § 8, гejд 4). Јухарыдакы ejниликләрдән, $0 \leqslant t \leqslant 1$ гәбул едәрәк алырыг:

$$|\varphi(t, \overline{x}_0) - \varphi(t, x_0)| \leqslant |\overline{x}_0 - x_0| + \int_0^t |\varphi(s, \overline{x}_0) - \varphi(s, x_0)| ds.$$

Бурадан, Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк,

$$|\varphi(t, \overline{x}_0) - \varphi(t, x_0)| \leqslant |\overline{x}_0 - x_0| e^t \leqslant |\overline{x}_0 - x_0| e.$$

Ајдындыр ки, бу бәрабәрсизлик $-1 \leqslant t \leqslant 0$ олдугда да доғрудур.

Хүсуси һалда, $x_0 = 0$, $\overline{x}_0 = 0{,}001$ оларса,

$$|\varphi(t, 0{,}001) - \varphi(t, 0)| < 0{,}003.$$

Мисал 4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + \dfrac{1}{1+t^2}, & x_1(1) = 2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1}{t} + x_2^2, & x_2(1) = -1 \end{cases} \tag{47}$$

мәсәләсиндә

$$u_i(t) = \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \tau}\bigg|_{(\tau, \xi) = (1, 2, -1)}, \quad \Phi_{ij}(t) = \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_j}\bigg|_{(\tau, \xi) = (1, 2, -1)}$$

төрәмәләрини һесаблајаг.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (47) мәсәләсинин һәлли

$$x_1 = \frac{t+3}{1+t^2}, \quad x_2 = -\frac{2t}{1+t^2}.$$

Онда $u_1(t)$, $u_2(t)$ функсиjалары ((45) мәсәләсинә әсасән)

$$\dot{u}_1 = -\frac{2t}{1+t^2} u_1 + \frac{t+3}{1+t^2} u_2, \quad u_1(1) = \frac{3}{2},$$

$$\dot{u}_2 = \frac{1-3t^2}{t(1+t^2)} u_2, \qquad u_2(1) = 0$$

мәсәләсинин һәлли кими тә'jин олунар. Бу мәсәләнин һәлли $u_1(t) = \dfrac{3}{1+t^2}$, $u_2(t) = 0$. Бахылан систем үчүн $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{12}(t)$, $\Phi_{21}(t)$, $\Phi_{22}(t)$ функсиjалары

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{11} = -\dfrac{2t}{1+t^2}\Phi_{11} + \dfrac{t+3}{1+t^2}\Phi_{21}, & \Phi_{11}(1) = 1, \\ \dot{\Phi}_{21} = \dfrac{1-3t^2}{t(1+t^2)}\Phi_{21}, & \Phi_{21}(1) = 0, \\ \dot{\Phi}_{12} = -\dfrac{2t}{1+t^2}\Phi_{12} + \dfrac{t+3}{1+t^2}\Phi_{22}, & \Phi_{12}(1) = 0, \\ \dot{\Phi}_{22} = \dfrac{1-3t^2}{t(1+t^2)}\Phi_{22}, & \Phi_{22}(1) = 1 \end{cases}$$

мәсәләсинин һәллидир. Бурадан,

$$\Phi_{11}(t) = \frac{2}{1+t^2}, \quad \Phi_{21}(t) = 0, \quad \Phi_{12}(t) = \frac{2}{1+t^2}\left\{\frac{2t^2-t-1}{1+t^2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{4}\right\}, \quad \Phi_{22}(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

§ 4. ҺӘЛЛИН АНАЛИТИКЛИЈИ ҺАГГЫНДА

Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ функсиjасынын t_0 нөгтәсинин мүәjјән $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ әтрафында истәнилән тәртибдән төрәмәләри вар вә бу әтрафда јығылан

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$$

гүввәт сырасына ајрылыр. Онда дејирләр ки, $x = \varphi(t)$ функсиjасы t_0 *нөгтәсинин әтрафында аналитикдир* (вә ја һоломорфдур). Верилмиш (α, β) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә аналитик олан $x = \varphi(t)$ функсиjасына һәмин интервалда аналитик функсиjа дејилир.

Ејни гајда илә, чохдәјишәнли функсиjанын аналитиклији анлајышыны вермәк олар.

Хүсуси һалда, $f(t, x)$ функсиjасынын (t_0, x_0) нөгтәсинин әтрафында истәнилән тәртибдән төрәмәләри варса, вә бу әтрафда јығылан

$$f(t, x) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} (t - t_0)^i (x - x_0)^j$$

гүввәт сырасына ајрыларса, дејирләр ки, һәмин функсиjа (t_0, x_0) нөгтәсинин әтрафында аналитикдир.

1. Садәлик үчүн $f(t, x)$ скаләр функсиjа олан һалда

240—16

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (27')$$

тәнлијинин

$$x(t_0) = x_0 \qquad (2')$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллинин аналитиклији һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 6. *Тутаг ки, $f(t, x)$ функсијасы (t_0, x_0) нөгтәсинин әтрафында аналитикдир. Онда (27'), (2') мәсәләсинин t_0 нөгтәсинин әтрафында аналитик олан јеканә $x = \varphi(t)$ һәлли вар.*

Исбаты. Үмумилији позмадан $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ гәбул едәк вә фәрз едәк ки, $f(t, x)$ функсијасы $D = \{|t| < a;\ |x| < b\}$ областында јығылан

$$f(t, x) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} t^i x^j \qquad (48)$$

гүввәт сырасына ајрылыр. (27'), (2') $(t_0 = 0,\ x_0 = 0)$ мәсәләсинин һәллини формал олараг

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots \qquad (49)$$

гүввәт сырасы шәклиндә ахтараг.

Бу сыранын $x(0) = 0$ шәртини өдәмәси үчүн $c_0 = 0$ олмалыдыр. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн (49) сырасындан формал олараг төрәмә алаг вә (27') тәнлијиндә јеринә јазаг. Онда (48) ајрылышыны да нәзәрә алсаг,

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \cdots = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} t^i (c_1 t + c_2 t^2 + \cdots)^j \qquad (50)$$

ејнилијини аларыг.

Алынан ејниликдә $t = 0$ көтүрсәк, $c_1 = a_{00}$ олар. Бу ејнилији диференсиаллајаг:

$$2c_2 + 3!\, c_3 t + \cdots = \sum_{i, j=0}^{\infty} i a_{ij} t^{i-1} (c_1 t + c_2 t^2 + \cdots)^j +$$

$$+ \sum_{i, j=0}^{\infty} j a_{ij} t^i (c_1 + 2c_2 t + \cdots)(c_1 t + c_2 t^2 + \cdots)^{j-1}.$$

Бурада јенә дә $t = 0$ гәбул етсәк, $2c_2 = a_{10} + a_{01} c_1$ олар. Сонунҹу ејнилији диференсиаллајыб $t = 0$ көтүрсәк, $3!\, c_3 = 2a_{02} c_1^2 + 2a_{11} c_1 + 2a_{01} c_2 + 2a_{20}$ вә с. Бу гајда илә (49) сырасынын әмсаллары рекуррент дүстурларла биргијмәтли тә'јин етмәк олар

Гејд едәк ки, $c_1, c_2, c_3, \ldots$ әмсалларыны (50) ејнилијиндә t аргументинин ејни дәрәҹәләринин әмсалларыны мүгајисә етмәклә дә тапмаг олар. Көстәрәк ки, әмсаллары бу гајда илә тә'јин олунан (49) сырасы $t = 0$ нөгтәсинин әтрафында јығылыр.

Теоремин шәртинә көрә (48) сырасы D областында јығылдығындан, $0 < a_1 < a$, $0 < b_1 < b$ шәртини өдәјән ихтијари a_1, b_1 әдәдләри үчүн мүсбәт һәдли $\sum_{i, j=1}^{\infty} |a_{ij}|\, a_1^i b_1^j$ әдәди сырасы јығыландыр. Бу сыранын ҹәмини M илә ишарә едәк. Онда $|a_{ij}|\, a_1^i b_1^j < M$, јә'ни $|a_{ij}| \leqslant \frac{M}{a_1^i b_1^j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ олар. $A_{ij} = \frac{M}{a_1^i b_1^j}$ ишарә едәрәк $D_1 = \{|t| < a_1,\ |x| < b_1\}$ областында

$$\sum_{i, j=0}^{\infty} A_{ij} t^i x^j \qquad (51)$$

сырасына бахаг. Бу сыра D_1 областында јығыландыр. Мә'лумдур ки, $|z| < 1$ олдугда $\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$. Она көрә дә

$$F(t, x) = \sum_{i, j=0}^{\infty} A_{ij} t^i x^j = M \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{t}{a_1}\right)^i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{b_1}\right)^j = \frac{M a_1 b_1}{(a_1 - t)(b_1 - x)}$$

Гурма гајдасындан ајдындыр ки, (51) сырасы D_1 областында (48) сырасынын мажорантыдыр. Она көрә дә $F(t, x)$ функсијасына D_1 областында $f(t, x)$ функсијасынын *мажоранты* дејилир.

Бурадан алыныр ки,

$$\dot{y} = \frac{M a_1 b_1}{(a_1 - t)(b_1 - y)} \qquad (52)$$

тәнлијинин $y(0) = 0$ шәртини өдәјән һәлли, $t = 0$ нөгтәсинин әтрафында (27') тәнлијинин $x(0) = 0$ шәртини өдәјән һәллинин мажоранты олур. Буну көстәрәк.

Ајдындыр ки, (52) тәнлијинин $y(0) = 0$ шәртини өдәјән һәлли

$$y(t) = b_1\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2Ma_1}{b_1} \ln\left(1 - \frac{t}{a_1}\right)}\right).$$

Мә'лумдур ки, $\ln(1 + z)$, $\sqrt{1 + u}$ функсијалары ујғун олараг $z = 0$, $u = 0$ нөгтәләринин әтрафында гүввәт сырасына ајрылыр вә һәмин сыралар $|z| < 1$ вә $|u| < 1$ областларында јығылыр. Она көрә дә $\sqrt{1 + \kappa \ln(1 + z)}$ функсијасыны z дәјишәнинин мүрәккәб функсијасы кими $z = 0$ нөгтәсинин әтрафында гүввәт сырасына ајырсаг, бу сыра $|\kappa \ln(1 + z)| < 1$, $|z| < 1$ олдугда, јә'ни $|z| < |1 - \exp(-\kappa)|$ олдугда јығылар.

Она көрә дә $y(t)$ функсијасыны $(-h, h)$ интервалында јығылан

$$y(t) = \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \dots \tag{53}$$

гүввәт сырасына ајырмаг олар; бурада $h = a_1\left[1 - \exp\left(-\frac{b_1}{2Ma_1}\right)\right]$

Бу сыранын әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн ону (52) тәнлијиндә јазыб, сағ тәрәфин дә $\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} t^i y^j$ шәклиндә олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\bar{c}_1 = A_{00}, \quad 2\bar{c}_2 = A_{10} + A_{01}\bar{c}_1;$$

$$3! \; \bar{c}_3 = 2A_{02}\bar{c}_1^2 + 2A_{11}\bar{c}_1 + 2A_{01}\bar{c}_2 + 2A_{20}, \dots$$

Бурадан $\bar{c}_k > 0$ вә $|c_k| \le \bar{c}_k$. Демәли, (53) сырасы (49) сырасынын мажорантыдыр. Она көрә дә (49) сырасы $(-h, h)$ интервалында јығылыр.

Һәллин јеканәлији $f(t, x)$ функсијасынын аналитиклијиндән алыныр. Теорем исбат олунду.

Аналожи тәклиф $x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\right)$ тәнлији вә нормал систем үчүн дә доғрудур.

2. Һәллин параметрләрдән кәсилмәз асылылығы вә параметрләрә нәзәрән диференсиалланмасы һаггындакы теоремләри башланғыч шәртләр дә параметрләрдән асылы олан һала үмумиләшдирмәк олар.

Доғрудан да, тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы 1-чи (вә ја 2-чи) теоремин шәртләрини өдәјир, $r(\mu)$ исә $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ параметрләриндән кәсилмәз асылы олан n өлчүлү вектордур. Онда 1-чи теоремин (2-чи теоремин) исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, (1) системинин

$$x(t_0) = r(\mu) \tag{2''}$$

башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \mu)$ һәлли аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир. $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы 3-чү теоремин (4-чү теоремин) шәртләрини өдәјирсә вә $r(\mu)$ векторунун $r_i(\mu)$, $i = 1, 2, \dots, n$ компонентләринин кәсилмәз $\frac{\partial r_i(\mu)}{\partial \mu_k}$, $k = 1, 2, \dots, l$ хүсуси төрәмәләри варса, (1) системинин (2″) башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \mu)$ һәллинин кәсилмәз $\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}$ хүсуси төрәмәләри вә кәсилмәз $\frac{\partial^2 \varphi_i(t, \mu)}{\partial t \, \partial \mu_k}$ гарышыг төрәмәләри вар, һәм дә бу гарышыг төрәмәләр диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.

Бу тәклифин доғрулуғу 3-чү теоремин исбат гајдасы илә көстәрилир.

3. Тутаг ки, μ скалјар параметрдир, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы μ-јә нәзәрән $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында тә'јин олунмушдур вә компонентләринин $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ дәјишәнләринә нәзәрән m тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Онда 3-чү теоремдән алынан нәтиҹәнин исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, $r(\mu)$ векторунун компонентләринин $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында m тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри варса, (1) системинин (2″) башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \mu)$ һәллинин μ параметринә нәзәрән $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында m тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бурадан ајдындыр ки, $x = \varphi(t, \mu)$ һәллини $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында μ-нүн дәрәҹәләри үзрә

$$\varphi(t, \mu) = \varphi^0(t) + \mu\varphi^1(t) + \dots + \mu^m \varphi^m(t) + o(\mu^m)$$

шәклиндә Тејлор дүстуруна ајырмаг олар.

Гејд едәк ки, $x = \varphi(t, \mu)$ мә'лум олмадыгда да $\varphi^0(t), \varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)$ вектор-функсијаларыны тә'јин етмәк олар. Бунун үчүн $f(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ вектор-функсијасыны вә $r(\mu)$ векторуну

$$f(t, \varphi^0(t) + \mu\varphi^1(t) + \dots + \mu^m \varphi^m(t) + o(\mu^m), \mu) =$$

$$= f(t, \varphi^0(t), 0) + \mu[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^1(t) + f_\mu(t, \varphi^0(t), 0)] +$$

$$+ \dots + \mu^m[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^m(t) + f^m(t)] + o(\mu^m),$$

$$r(\mu) = r(0) + \mu r^1 + \dots + \mu^m r^m + o(\mu^m)$$

шәклиндә Тејлор дүстуруна ајырараг

$$\dot{\varphi}^0(t) + \mu\dot{\varphi}^1(t) + \dots + \mu^m \dot{\varphi}^m(t) + o(\mu^m) =$$

$$= f(t, \varphi^0(t), 0) + \mu[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^1(t) + f_\mu(t, \varphi^0(t), 0)] +$$

$$+ \dots + \mu^m[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^m(t) + f^m(t)] + o(\mu^m)$$

ејнилијиндә вә елә чә дә

$$\varphi^0(t_0) + \mu\varphi^1(t_0) + \dots + \mu^m \varphi^m(t_0) + o(\mu^m) = r(0) + \mu r^1 + \dots +$$
$$+ \mu^m r^m + o(\mu^m)$$

бәрабәрлијиндә μ параметринин ејни дәрәҹәләринин әмсалларыны тутушдурмаг лазымдыр. Бу заман алырыг ки, $\varphi^0(t), \varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)$ вектор-функсијалары

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi}^0(t) = f(t, \varphi^0(t), 0), \quad \varphi^0(t_0) = r(0), \\ &\dot{\varphi}^1(t) = f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^1(t) + f_\mu(t, \varphi^0(t), 0), \quad \varphi^1(t_0) = r^1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dot{\varphi}^m(t) = f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^m(t) + f^m(t), \quad \varphi^m(t_0) = r^m \end{aligned} \tag{54}$$

мәсәләләринин һәлли кими тапылыр; бурада $f^i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ вектор-функсијасы $\varphi^0(t), \varphi^1(t), \dots, \varphi^{i-1}(t)$ вектор-функсијалары васитәсилә ифадә олунур. Бурадан ајдындыр ки, (1), (2″) мәсәләсинин $\mu = 0$ гијмәтинә ујғун олан $x = \varphi^0(t)$ һәлли мә'лум олдугда $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^m(t)$ функсијалары хәтти системләрин һәлләри кими тә'јин олунурлар.

Гејд едәк ки, $f(t, x, \mu)$ вә $r(\mu)$ вектор-функсијаларынын компонентләринин $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ дәјишәнләринә нәзәрән истәнилән тәртибдән төрәмәләри варса, (1), (2″) мәсәләсинин һәллини формал олараг

$$\varphi(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^k(t)\mu^k \qquad (55)$$

шәклиндә гүввәт сырасына ајырмаг олар. Бу сыра, үмумијјәтлә, јығылмаја биләр, лакин көстәрмәк олар ки, μ параметринин кичик гијмәтләри үчүн

$$\left\|\varphi(t, \mu)-\sum_{k=0}^{m}\varphi^k(t)\mu^k\right\|\leqslant c|\mu|^{m+1} \quad (c=\text{const})$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Она көрә дә (55) сырасына (1), (2″) мәсәләсинин һәллинин асимптотик ајрылышы дејилир.

Ашағыда скалјар тәнлик үчүн һәллин параметрә нәзәрән аналитиклији һаггында теорем исбат олунур. Бунун үчүн әввәлчә гејд едәк ки, $y=x-r(\mu)$ әвәзләмәси апармагла (1) системинин (2″) шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсини

$$\dot y=F(t, y, \mu), \quad F(t, y, \mu)=f(t, y+r(\mu), \mu)$$

системинин $y(t_0)=0$ шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирмәк олар.
Одур ки,

$$\dot x=f(t, x, \mu) \qquad (56)$$

тәнлијинин

$$x(t_0)=0 \qquad (57)$$

шәртини өдәјән һәллинин μ параметриндән асылылығыны өјрәнәк.

Теорем 7 (Пуанкаре-Љапунов). *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ функсијасы $G=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a;\ |x|<b;\ |\mu|<c\}$ чохлуғунда t-јә нәзәрән мүнтәзәм јығылан*

$$f(t, x, \mu)=\sum_{i, j=0}^{\infty}a_{ij}(t)x^i\mu^j \qquad (58)$$

гүввәт сырасына ајрылыр вә $a_{ij}(t)$, $i, j=0, 1, \dots$ функсијалары $[t_0, t_0+a]$ парчасында кәсилмәздирләр. Онда елә $0<\alpha<a$, $0<\rho<c$ әдәдләри вар ки, (56), (57) мәсәләсинин $x=\varphi(t, \mu)$ һәлли гапалы $\Pi=\{t_0\leqslant t\leqslant\alpha;\ |\mu|\leqslant\rho\}$ областында тә'јин олунуб вә јығылан

$$\varphi(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)\mu^k$$

сырасы шәклиндә көстәрилир.

Исбаты. Теоремин шәртинә көрә $0<b_1<b$, $0<c_1<c$ шәртини өдәјән истәнилән b_1, c_1 әдәдләри үчүн

$$\sum_{i, j=0}^{\infty}|a_{ij}(t)|\,b_1^i c_1^j$$

сырасы $[t_0, t_0+a]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр.

$$M=\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a}\sum_{i, j=0}^{\infty}|a_{ij}(t)|\,b_1^i c_1^j$$

ишарә едәк. Онда ајдындыр ки, $|a_{ij}(t)|\leqslant\frac{M}{b_1^i c_1^j}$; $i, j=0, 1, \dots$

Одур ки, $A_{ij}=\frac{M}{b_1^i c_1^j}$ ишарә етсәк, 6-чы теоремдә олдугу кими,

$$F(x, \mu)=\sum_{i, j=0}^{\infty}A_{ij}x^i\mu^j=\frac{Mb_1c_1}{(b_1-x)(c_1-\mu)}$$

функсијасы гапалы $G_1=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a;\ |x|\leqslant b_1;\ |\mu|\leqslant c_1\}$ областында $f(t, x, \mu)$ функсијасынын (јә'ни $\sum_{i, j=0}^{\infty}a_{ij}x^i\mu^j$ сырасы $\sum_{i, j=0}^{\infty}a_{ij}(t)x^i\mu^j$ сырасынын) мажоранты олар. Бурадан алыныр ки,

$$\dot z=\frac{Mb_1c_1}{(b_1-z)(c_1-\mu)} \qquad (59)$$

тәнлијинин

$$z(t_0)=0 \qquad (60)$$

шәртини өдәјән һәлли (56), (57) мәсәләсинин һәллинин мажоранты олар. Ајдындыр ки, (59), (60) мәсәләсинин һәлли

$$z(t, \mu)=b_1\left(1-\sqrt{1-\frac{2Mc_1(t-t_0)}{b_1(c_1-\mu)}}\right) \qquad (61)$$

шәклиндәдир.

Формал олараг (56), (57) мәсәләсинин һәллини

$$\varphi(t, \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(t)\mu^k \qquad (62)$$

шәклиндә ахтарсаг, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ... функсијалары

$$\dot\varphi_0=f(t, \varphi_0, 0), \quad \varphi_0(t_0)=0,$$
$$\dot\varphi_1=f_x(t, \varphi_0(t), 0)\varphi_1+f_\mu(t, \varphi_0(t), 0), \quad \varphi_1(t_0)=0, \qquad (63)$$

. . . .

мәсәләләринин һәлләри кими тә'јин олунар. Алынан системин биринчи тәнлији $\varphi_0(t)$-јә нәзәрән гејри-хәтти тәнликдир. Теоремин шәртләри дахилиндә һәмин тәнлијин $\varphi_0(t_0)=0$ шәртини өдәјән вә $[t_0, t_0+a_1]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар, бурада $a_1=\min\left\{a, \frac{b_1}{M}\right\}$. Ајдындыр ки, (63) системинин галан тәнликләриндән $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... функсијалары хәтти мәсәләләрин һәлләри кими тә'јин олунурлар. Одур ки, бу функсијалар да $[t_0, t_0+a_1]$ парчасында тә'јин олунублар.

Тутаг ки, α әдәди $0<\alpha<\frac{a_1}{2}$ шәртини өдәјән ихтијари гејд олунмуш әдәддир вә ρ әдәдини $0<\rho<c_1\left(1-\frac{2M\alpha}{b_1}\right)$ шәртindән сечәк. Онда, (61) дүстуру илә верилән $z(t, \mu)$ функсијасы гапалы $\bar{D}=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha;\ -\rho\leqslant\mu\leqslant\rho\}$ областында тә'јин олунмушдур вә ону $\mu=0$ нөгтәсинин әтрафында t-јә нәзәрән мүнтәзәм јығылан

$$z(t, \mu)=\sum_{i=0}^{\infty} z_i(t)\mu^i \qquad (64)$$

гүввәт сырасына ајырмаг олар. Бурада $z_k(t)$, $k=0, 1, \ldots$ функсијалары $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында мүсбәтдирләр вә $|\varphi_k(t)|\leqslant z_k(t)$ бәрабәрсизликләри өдәнир. Јә'ни (64) сырасы (62) сырасынын мажоранты олур. Демәли, μ параметри $|\mu|<\rho$ шәртини өдәдикдә (62) сырасы $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында t-јә нәзәрән мүнтәзәм јығылыр. Теорем исбат олунду.

Мисал 5. $\ddot{x}=3x\dot{x}+e^t$ тәнлијинин $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ шәртини өдәјән вә $t=0$ нөгтәсинин әтрафында аналитик олан һәллинин ајрылышынын бир нечә һәддини тапмаг.

Мәсәләнин һәллини

$$x=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots$$

шәклиндә ахтарсаг, башланғыч шәртләринә әсасән $c_0=1$, $c_1=0$. Бу сыраны тәнликдә јазыб, алынан

$$2c_2+3\cdot 2c_3t+4\cdot 3\, c_4t^2+\cdots=3\,(1+c_2t^2+c_3t^3+\cdots)\times$$

$$\times\,(2c_2t+3c_3t^2+\cdots)+1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots$$

ејнилијиндә $t=0$ көтүрсәк, $2c_2=1$ олар.

Ејнилији диференсиалласаг вә јенә дә $t=0$ гәбул етсәк, $6c_3=6c_2+1$. Беләликлә, $c_0=1$, $c_1=0$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_3=\frac{2}{3}, \ldots$ вә $x=1+\frac{t^2}{2}+\frac{2t^3}{3}+\cdots$

Мисал 6. $\dot{x}=x^2+\mu x^{5/2}$, $x(0)=1-\mu$ мәсәләсинин һәллини μ параметринә көрә Тејлор дүстуруна ајырмаг. Ајдындыр ки,

$f(t, x, \mu)=x^2+\mu x^{5/2}$ функсијасынын (0, 0, 0) нөгтәсинин әтрафында x-ә нәзәрән ики тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар. Она көрә тәнлијин $x(0)=1-\mu$ шәртини өдәјән $x=\varphi(t, \mu)$ һәлли

$$\varphi(t, \mu)=\varphi_0(t)+\mu\varphi_1(t)+\mu^2\varphi_2(t)+o(\mu^2)$$

шәклиндә көстәриlә биләр вә $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ функсијалары

$$\dot{\varphi}_0=\varphi_0^2, \quad \varphi_0(0)=1,$$
$$\dot{\varphi}_1=2\varphi_0\varphi_1+\varphi_0^{5/2}, \quad \varphi_1(0)=-1,$$
$$\dot{\varphi}_2=2\varphi_0\varphi_2+\varphi_1^2+2{,}5\varphi_0^{3/2}\varphi_1, \quad \varphi_2(0)=0$$

мәсәләләринин һәлләри кими тә'јин олунурлар. Бурадан, ардычыл һәлл етмәклә алырыг ки,

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{1-t}, \quad \varphi_1(t)=\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{2}{(1-t)^{3/2}},$$

$$\varphi_2(t)=\frac{3-2t}{(1-t)^3}+\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^3}-\frac{3}{(1-t)^{5/2}}.$$

Мисал 7.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1^2+\mu x_2,\\ \dot{x}_2=x_1x_2+\mu x_1\end{cases}$$

системинин $x_1(0)=\cos\mu$, $x_2(0)=\sin\mu$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин μ-нүн дәрәчәләринә нәзәрән ајрылышынын әмсалларындан бир нечәсини тапмаг.

Һәллин

$$x_1(t)=\varphi_{10}(t)+\mu\varphi_{11}(t)+\mu^2\varphi_{12}(t)+\cdots,$$
$$x_2(t)=\varphi_{20}(t)+\mu\varphi_{21}(t)+\mu^2\varphi_{22}(t)+\cdots$$

ајрылышыны верилмиш системдә јазыб, һәм дә

$$r_1(\mu)=\cos\mu=1-\frac{\mu^2}{2!}+\cdots,$$

$$r_2(\mu)=\sin\mu=\mu-\frac{\mu^3}{3!}+\cdots$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{10}=\varphi_{10}^2, & \varphi_{10}(0)=1;\\ \dot{\varphi}_{20}=\varphi_{10}\varphi_{20}, & \varphi_{20}(0)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{11}=2\varphi_{10}\varphi_{11}+\varphi_{20}, & \varphi_{11}(0)=0,\\ \dot{\varphi}_{21}=\varphi_{10}\varphi_{21}+\varphi_{11}\varphi_{20}+\varphi_{10}, & \varphi_{21}(0)=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{12}=2\varphi_{10}\varphi_{12}+\varphi_{11}^2+\varphi_{21}, & \varphi_{12}(0)=-\frac{1}{2},\\ \dot{\varphi}_{22}=\varphi_{10}\varphi_{22}+\varphi_{11}\varphi_{21}+\varphi_{11}+\varphi_{12}\varphi_{20}, & \varphi_{22}(0)=0\end{cases}$$

мәсәләләрини аларыг. Бу мәсәләләри ардычыл һәлл етсәк,

$$\varphi_{10}(t)=\frac{1}{1-t},\ \varphi_{20}(t)=0,\ \varphi_{11}(t)=0,\ \varphi_{21}(t)=\frac{1+t}{1-t},$$
$$\varphi_{12}(t)=-\frac{2t^3-6t+3}{6(1-t)^3},\quad \varphi_{22}(t)=0,\ \ldots$$

§ 5. СИНГУЛЈАР ҺӘЈӘЧАНЛАНМЫШ СИСТЕМЛӘР ҺАГГЫНДА

Бир чох практики мәсәләләрин тәдгиги

$$\begin{cases}\mu\dot{x}=F(t,\ x,\ y),\\ \dot{y}=g(t,\ x,\ y)\end{cases}\tag{65}$$

шәклиндә системләрин һәллинә кәтирилир. Бурада $F(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ үч өлчүлү фәзанын мүәјјән G областында тә'јин олунмуш функсијалардыр, μ исә кичик мүсбәт параметрдир.

Ајдындыр ки, (65) системинин биринчи тәнлијини μ-ја бөлмәклә бу системи, сағ тәрәфи параметрдән асылы олан (1) шәклиндә системә кәтирмәк олар. Лакин бу заман алынан

$$\dot{x}=\frac{1}{\mu}F(t,\ x,\ y),\quad \dot{y}=g(t,\ x,\ y)$$

системинин сағ тәрәфи μ сыфра јахынлашдыгда гејри-мәһдуд артыр. Одур ки, (1) системи үчүн јухарыда алдығымыз нәтичәләр $\mu=0$ нөгтәсинин әтрафында (65) системи үчүн, үмумијјәтлә, доғру дејил.

Бу параграфда әсас мәгсәд μ сыфра јахынлашдыгда (65) системинин

$$x(t_0,\ \mu)=x_0,\quad y(t_0,\ \mu)=y_0,\ (t_0,\ x_0,\ y_0)\in G\tag{66}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли илә системдә $\mu=0$ көтүрмәклә алынан

$$\begin{cases}0=F(t,\ x,\ y),\\ \dot{y}=g(t,\ x,\ y)\end{cases}\tag{67}$$

системинин

$$y(t_0)=y_0\tag{68}$$

шәртини өдәјән һәлли арасындакы әлагәни өјрәнмәкдән ибарәтдир.

(65) системинә *сингулјар һәјәчанланмыш* систем, бу системдә $\mu=0$ көтүрмәклә алынан (67) системинә исә она ујғун *чырлашмыш систем* дејилир.*

Ајдындыр ки, (65) системи ики тәртибли диференсиал тәнликләр системидир. (67) системинин биринчи тәнлији чәбри тәнлик олдуғундан бу тәнликдән x вә y дәјишәнләриндән бирини тә'јин едиб икинчи тәнликдә јазсаг, бир тәртибли диференсиал тәнлик аларыг. Јә'ни (67) системи бир тәртибли диференсиал тәнликдир. Одур ки, (67) системинин (68) шәртини өдәјән һәлли (66) шәртләриндән биринчисини, үмумијјәтлә, өдәмәз. Она көрә дә көзләмәк олар ки, (65) системинин (66) шәртләрини өдәјән һәлли, һәмин шәртләрин верилдији $t=t_0$ нөгтәсиндә (67) системинин (68) шәртини өдәјән һәллиндән чох фәргләнир.

Бу мәсәләни изаһ етмәк үчүн

$$\begin{cases}\mu\dot{x}=\alpha x+\beta_1,\\ \dot{y}=\gamma x+\delta y+\beta_2\end{cases}\tag{69}$$

системинин

$$x(0,\ \mu)=x_0,\quad y(0,\ \mu)=y_0\tag{70}$$

шәртләрини өдәјән һәллини арашдыраг; бурада α, β_1, β_2, γ, δ верилмиш әдәдләрдир вә $\alpha\neq 0$, $\delta\neq 0$.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (69), (70) мәсәләсинин һәлли

$$x(t,\ \mu)=-\frac{\beta_1}{\alpha}+\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\frac{\alpha}{\mu}t},$$

$$y(t,\ \mu)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\right.\tag{71}$$

$$\left.-\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t}+\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}e^{\frac{\alpha t}{\mu}},$$

ујғун чырлашмыш

$$\begin{cases}0=\alpha x+\beta_1,\\ \dot{y}=\gamma x+\delta y+\beta_2\end{cases}\tag{72}$$

системинин

$$y(0,\ \mu)=y_0\tag{73}$$

шәртини өдәјән һәлли исә

$$\bar{x}(t)=-\frac{\beta_1}{\alpha},\ \bar{y}(t)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t}\tag{74}$$

олур. Һәлләрин ифадәләриндән аларыг ки,

$$x(t,\ \mu)-\bar{x}(t)=\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\frac{\alpha}{\mu}t},$$

* Хатырладаг ки, јухарыда өјрәндијимиз (1) *системинә регулјар һәјәчанланмыш* систем, һәмин системдә $\mu=0$ көтүрмәклә алынан $\dot{x}=f(t,x,0)$ системинә исә *һәјәчанланмамыш* систем дејилир.

$$y(t, \mu) - \bar{y}(t) = -\frac{\mu\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2 - \mu\alpha\delta} e^{\delta t} + \frac{\mu\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2 - \mu\alpha\delta} e^{\frac{\alpha}{\mu}t}. \qquad (75)$$

Ajдындыр ки, $\alpha < 0$ вә $t > 0$ олдугда (вә ја $\alpha > 0$, $t < 0$ олдугда)

$$\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t), \quad \lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t) \qquad (76)$$

мүнасибәтләри өдәнир, лакин $x_0 \neq -\frac{\beta_1}{\alpha}$ олдугда $t = 0$ нөгтәсиндә бу мүнасибәтләрин биринчиси өдәнмир.

Беләликлә сингулјар һәјәчанланмыш (69) системинин һәллинин (76) мүнасибәтләрини өдәмәси үчүн, һәмин системин сағ тәрәфи регулјар һалда гојулан шәртләрдән әлавә, јени шәртләр өдәмәлидир (бурада $\alpha < 0$ шәрти) Гејд едәк ки, $x_0 \neq -\frac{\beta_1}{\alpha}$ олдугда (76) мүнасибәтләриндән биринчиси $t = 0$ нөгтәсиндә өдәнмәдијиндән, $t = 0$ нөгтәсинин кичик әтрафында бир зона јараныр ки, μ истәнилән гәдәр кичик олмасына бахмајараг, бу зонада (69), (70) мәсәләсинин һәлли (72), (73) мәсәләсинин һәллиндән чох фәргләнир. Белә зонанын јаранмасы һадисәсинә *сәрһәд лај һадисәси*, зонанын өзүнә исә *сәрһәд лајы* дејилир.

Ajдындыр ки, (75) ифадәләриндә μ параметринин кичик гијмәтләри үчүн $\left(x_0 + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\frac{\alpha}{\mu}t}$, $\frac{\mu\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2 - \mu\alpha\delta} e^{\frac{\alpha}{\mu}t}$ функсијалары әсас рол ојнајыр (δ әмсалы μ параметриндән асылы олмадығындан, μ сыфра јахынлашдыгда $-\frac{\mu\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2 - \mu\alpha\delta} e^{\delta t}$ сыфра јахынлашыр) Бу функсијалар (71) һәллинин (70) башланғыч шәртләрини өдәмәсини тә'мин едирләр вә $\alpha < 0$ олдугда $t > 0$ дәјишәни $t = 0$ башланғыч нөгтәсиндән узаглашдыгча експоненсиал сүр'әтлә сөнүрләр. Һәмин функсијалара *сәрһәд функсијалары* дејилир.

Сада (69) системи үчүн көстәрилән бу хассә, сингулјар һәјәчанланмыш системләрин кениш синфинә хас олан әсас хассәләрдән биридир. Јә'ни бу системләрин һәлләринин сәрһәд лајында хассәләри сәрһәд функсијалары илә характеризә олунур.

Сәрһәд функсијалары анлајышыны (69), (70) мәсәләси үзәриндә изаһ едәк. Бунун үчүн $t = \tau\mu$ әвәзләмәси апараг вә

$$\frac{\mu}{\alpha^2 - \mu\alpha\delta} = \frac{1}{\alpha^2}\mu + \frac{\delta}{\alpha^3}\mu^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^4}\mu^3 + \cdots$$

ајрылышындан истифадә едәрәк (71) һәллини

$$x(t, \mu) = -\frac{\beta_1}{\alpha} + \left(x_0 + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\alpha\tau},$$

$$y(t, \mu) = \frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta} - \frac{\beta_2}{\delta} + \left(y_0 - \frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta} + \frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t} - \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2} e^{\delta t}\mu -$$
$$- \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^3} e^{\delta t}\mu^2 + \cdots + \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2} e^{\alpha\tau}\mu + \qquad (77)$$
$$+ \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^3} e^{\alpha\tau}\mu^2 + \cdots$$

шәклиндә јазаг. Бурадан көрүнүр ки, (69), (70) мәсәләсинин һәлли

$$\bar{x}(t, \mu) = -\frac{\beta_1}{\alpha},$$
$$\bar{y}(t, \mu) = \frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta} - \frac{\beta_2}{\delta} + \left(y_0 - \frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta} + \frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t} - \qquad (78)$$
$$- \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2} e^{\delta t}\mu - \cdots$$

шәклиндә топлананларла

$$\Pi x(\tau, \mu) = \left(x_0 + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\alpha\tau},$$
$$\Pi y(\tau, \mu) = \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2} e^{\alpha\tau}\mu + \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)\delta}{\alpha^3} e^{\alpha\tau}\mu^2 + \cdots \qquad (79)$$

шәклиндә топлананларын чәминә бәрабәрдир. Садәлик үчүн

$$\bar{x}_0(t) = -\frac{\beta_1}{\alpha}, \ \bar{x}_k(t) \equiv 0, \ k = 1, 2, \ldots,$$
$$\bar{y}_0(t) = \frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta} - \frac{\beta_2}{\delta} + \left(y_0 - \frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta} + \frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t},$$
$$\bar{y}_1(t) = -\frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2} e^{\delta t}, \ldots,$$

$$\Pi_0 x(\tau) = \left(x_0 + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\alpha\tau}, \quad \Pi_k x(\tau) \equiv 0, \ k = 1, 2, \ldots,$$
$$\Pi_0 y(\tau) \equiv 0, \quad \Pi_1 y(\tau) = \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta_1)}{\alpha^2} e^{\alpha\tau}, \ldots$$

ишарә едәрәк (78) вә (79) сыраларыны ујғун олараг

$$\bar{x}(t, \mu) = \bar{x}_0(t) + \mu\bar{x}_1(t) + \cdots,$$
$$\bar{y}(t, \mu) = \bar{y}_0(t) + \mu\bar{y}_1(t) + \cdots, \qquad (78')$$
$$\Pi x(\tau, \mu) = \Pi_0 x(\tau) + \mu\Pi_1 x(\tau) + \cdots,$$
$$\Pi y(\tau, \mu) = \Pi_0 y(\tau) + \mu\Pi_1 y(\tau) + \cdots \qquad (79')$$

шәклиндә јазаг. Демәли, (71) һәллини

$$x(t, \mu) = \bar{x}_0(t) + \mu\bar{x}_1(t) + \cdots + \Pi_0 x(\tau) + \mu\Pi_1 x(\tau) + \cdots,$$

$$y(t, \mu) = \bar{y}_0(t) + \mu\bar{y}_1(t) + \cdots + \Pi_0 y(\tau) + \mu\Pi_1 y(\tau) + \cdots \quad (80)$$

сыралары шәклиндә јазмаг олар.

Гејд олунмуш $t > 0$ үчүн μ сыфра јахынлашдыгда τ сонсузлуғә јахынлашдығындан, ајдындыр ки, $\Pi_k x(\tau)$, $\Pi_k y(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$ функсијалары $\alpha < 0$ олдугда експоненсиал сүр'әтлә сыфра јахынлашырлар. Дикәр тәрәфдән, асанлыгла јохламаг олар ки, (80) сыраларында μ параметринин ејни дәрәҹәләринин әмсаллары үчүн

$$[\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau)]_{t=0} = x_0, \quad [\bar{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau)]_{t=0} = 0, \ldots,$$

$$[\bar{y}_0(t) + \Pi_0 y(\tau)]_{t=0} = y_0, \quad [\bar{y}_k(t) + \Pi_k y(\tau)]_{t=0} = 0$$

шәртләри өдәнир. Јә'ни $\Pi_k x(\tau)$, $\Pi_k y(\tau)$ функсијалары (71) һәллинин (70) башланғыч шәртләрини өдәмәсини тә'мин едирләр.

Бурадан алыныр ки, $\Pi_k x(\tau)$, $\Pi_k y(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$ функсијалары (69) (70) мәсәләсинин сәрһәд функсијаларыдыр.

Јухарыда гејд етдијимиз кими, бу параграфда әсас мәсәлә (65), (66) мәсәләсинин $x(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ һәлли илә (67), (68) мәсәләсинин $\bar{x}(t)$, $y(t)$ һәлли арасында

$$\lim_{\mu\to 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t), \quad \lim_{\mu\to 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t)$$

мүнасибәтләринин өдәндијини көстәрмәкдән ибарәтдир.

Гојулан мәсәлә ашағыда верилән Тихонов теореми илә һәлл олунур.

Фәрз едәк ки, ашағыдакы шәртләр өдәнир:

I. *$F(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ функсијалары G областында кәсилмәздир;*

II. *t, y дәјишәнләри фәзасынын гапалы, мәһдуд $\bar{D}$ областында тә'јин олунмуш кәсилмәз елә $\bar{x} = \varphi(t, y)$ функсијасы вар ки, $(t, y) \in \bar{D}$ олдугда $(t, \varphi(t, y), y) \in G$ вә $F(t, \varphi(t, y), y) \equiv 0$. Бу шәртләри өдәјән $x = \varphi(t, y)$ функсијасына $F(t, x, y) = 0$ тәнлијинин $\bar{D}$ областында көкү дејилир. Фәрз едәҹәјик ки, $x = \varphi(t, y)$ көкү $\bar{D}$ областында изолә олунмушдур, јә'ни елә $\eta > 0$ әдәди вар ки, $0 < |x - \varphi(t, y)| < \eta$, $(t, y) \in \bar{D}$ олдугда $F(t, x, y) \neq 0$;*

III. *һәм (65), (66) мәсәләсинин, һәм дә*

$$\dot{y} = g(t, \varphi(t, y), y), \quad y(t_0) = y_0$$

мәсәләсинин $[t_0, T]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар. Бу һәлләри ујғун олараг $x(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ вә $\bar{y}(t)$ илә ишарә едәк.

Параметр кими гәбул олунан t вә y үчүн

$$\frac{dz}{d\tau} = F(t, z, y), \quad (\tau \geq 0) \quad (81)$$

тәнлијинә, (65) системинә ујғун олан сәрһәд лајын тәнлији, $F(t, z, y) = 0$ ҹәбри тәнлијинин көкләринә исә һәмин тәнлијин таразлыг вәзијјәтләри дејилир. II шәртиндән ајдындыр ки, $\bar{x} = \varphi(t, y)$ көкү (81) тәнлијинин изолә олунмуш таразлыг вәзијјәтидир.

IV. *(81) тәнлијинин $\bar{x} = \varphi(t, y)$ таразлыг вәзијјәти t вә y параметрләринә нәзәрән $\bar{D}$ областында мүнтәзәм олараг, Лјапунов мә'нада асимтотик дајаныглыдыр. Јә'ни истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә, анҹаг ε-дан асылы олан елә $\delta(\varepsilon) > 0$ әдәди вар ки, истәнилән $(t, y) \in \bar{D}$ үчүн, $|z(0) - \varphi(t, y)| < \delta$ олдугда $|z(\tau) - \varphi(t, y)| < \varepsilon$, $\tau \geq 0$ вә $\lim_{\tau\to+\infty} z(\tau) = \varphi(t, y)$ шәртләри өдәнир.*

Сәрһәд лајын тәнлијиндә $t = t_0$, $y = y_0$ көтүрмәклә алынан

$$\frac{dz}{d\tau} = F(t_0, z, y_0) \quad (82)$$

тәнлијинин

$$z(t_0) = x_0 \quad (83)$$

шәртини өдәјән һәллини $z = z(\tau)$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, x_0 нөгтәси $\varphi(t_0, y_0)$ нөгтәсинә, үмумијјәтлә, јахын олмадығындан, τ сонсузлуға јахынлашдыгда (82), (83) мәсәләсинин һәлли $\varphi(t_0, y_0)$-а јахынлашмаја биләр:

V. *(82), (83) мәсәләсинин $z(\tau)$ һәлли үчүн*

а) $\lim_{\tau\to+\infty} z(\tau) = \varphi(t_0, y_0)$,

б) $\tau > 0$ үчүн $(t_0, z(\tau), y_0) \in G$

шәртләри өдәнир.

Теорем 8 (Тихонов теореми). *Тутаг ки, I—V шәртләри өдәнир. Онда елә $\mu_0 > 0$ әдәди тапмаг олар ки, $0 < \mu \leq \mu_0$ шәртини өдәјән μ параметрләри үчүн (65) системинин (66) шәртләрини өдәјән $x = x(t, \mu)$, $y = y(t, \mu)$ һәлли $[t_0, T]$ парчасында тә'јин олунуб вә*

$$\lim_{\mu\to 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t) = \varphi(t, \bar{y}(t)), \quad t_0 < t \leq T,$$

$$\lim_{\mu\to 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

мүнасибәтләри өдәнир.

Бу теорем көстәрир ки, $y(t, \mu)$ функсијасы $\bar{y}(t)$ функсијасына $[t_0, T]$ парчасында, $x(t, \mu)$ функсијасы исә $\bar{x}(t)$ функсијасына $[t_1, T]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр; бурада t_1 нөгтәси $t_0 < t_1 < T$ шәртини өдәјән ихтијари гејд олунмуш

негтадир. Лакин Тихонов теореми $x(t, \mu)$ вә $y(t, \mu)$ функсијаларынын $\bar{x}(t)$ вә $\bar{y}(t)$ функсијаларына јығылма сүр'әти һаггында һеч бир мә'лумат вермир.

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн, (65) системинин сағ тәрәфи үзәринә әлавә һамарлыг шәртләри гојулур вә системин (66) шәртләрини өдәјән һәлли (80) шәклиндә ахтарылыр.

Чалышмалар

1. $\mu > 0$ параметринин һансы гијмәтләриндә $\dot{x} = 2x + \mu t\sqrt{x}$ тәнлијинин $x(0) = 1$ башланғыч шәртини өдәјән вә $[0, 1]$ парчасында тә'јин олунан $x = \varphi(t, 0)$, $x = \varphi(t, \mu)$ һәлләри үчүн $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, 0)| \leqslant \varepsilon$ шәрти өдәнәр.

Чаваб: $0 \leqslant \mu \leqslant 2\left(\sqrt{1 + e^{-2}\varepsilon} - 1\right)$.

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{2t}{1+t^2} x_1 + \mu(t + t^3) \end{cases}$$

системинин $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ башланғыч шәртини өдәјән $x_1 = \varphi_1(t; 0)$, $x_2 = \varphi_2(t, 0)$ вә $x_1 = \varphi_1(t; 0{,}001)$ $x_2 = \varphi_2(t, 0{,}001)$ һәлләринин фәргини $[0, 1]$ парчасында гијмәтләндирин.

Чаваб: $|\varphi_1(t, 0{,}001) - \varphi_1(t; 0)| < 0{,}003$,
$|\varphi_2(t; 0{,}001) - \varphi_2(t; 0)| < 0{,}001$.

3. Ашағыдакы мисалларда һәллин параметрә нәзәрән төрәмәсини тапын:

а) $\dot{x} = x + \mu(t + \sqrt{x})$, $x(0) = 1$, $z(t) = \left.\dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Чаваб: $z(t) = 3e^t - t - 1 - 2e^{t/2}$.

б) $\dot{x} = \dfrac{2t}{1+t^2} x + \mu e^{x - 2(1+t^2)}$, $x(0) = 2$, $z(t) = \left.\dfrac{\partial x}{d\mu}\right|_{\mu=0}$.

Чаваб: $z(t) = (1 + t^2)\ \mathrm{arctg}\, t$.

в) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1}{t} - 2t^3 x_1, & x_1(1) = 0, \quad z_1(t) = \left.\dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}, \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 + x_2^2, & x_2(1) = 1, \quad z_2(t) = \left.\dfrac{\partial x_2}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}. \end{cases}$$

Чаваб: $z_1(t) = t\left(\dfrac{t^7}{21} - \dfrac{t^5}{10} + \dfrac{t}{6} - \dfrac{4}{35}\right)$,

$z_2(t) = \dfrac{t^3}{4} - \dfrac{t^5}{6} - \dfrac{1}{12t^2}$.

г) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2te^{\mu(x_2 - x_1)} + 2\mu(tx_2 - 2x_1), & x_1(0) = e^{\mu} - 1, \quad z_1(t) = \left.\dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \mu^2 x_2^2, & x_2(0) = \sin\mu, \quad z_2(t) = \left.\dfrac{\partial x_2}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}. \end{cases}$$

Чаваб: $z_1(t) = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{4t^3}{3} + 1$,

$z_2(t) = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{10}{3} t^3 + 10t^2 - 20t - 20e^{-t} + 21$.

д) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \mu_1 x_2 + \mu_2 x_2^2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = \mu_1 x_1 - x_2 + \mu_2 x_1 x_2, & x_2(0) = 1, \end{cases} \quad z_{ij}(t) = \left.\dfrac{\partial x_i}{\partial \mu_j}\right|_{(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)}, \ i, j = 1, 2$$

Чаваб: $z_{11}(t) = \mathrm{sh}\, t$, $z_{12}(t) = \dfrac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \mathrm{sh}\dfrac{3t}{2}$,

$z_{21}(t) = \mathrm{sh}\, t$, $z_{22}(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \mathrm{sh}\dfrac{t}{2}$.

4. $\dot{x} = 1 - \dfrac{2t}{1+t^2} x$ тәнлијинин $x(0) = 0$ вә $x(0) = 0{,}01$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлләринин фәргини $[0, 1]$ парчасында гијмәтләндирин

Чаваб: $|\varphi(t; 0{,}01) - \varphi(t; 0)| < 0{,}01$.

5. a, b параметрләринин һансы гијмәтләриндә $\ddot{x} + 4x = f(t)$ тәнлијинин $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi(t, 0, 0)$ һәлли/илә $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi(t; a, b)$ һәлли $|\varphi(t; a, b) - \varphi(t, 0, 0)| \leqslant \varepsilon$ шәртини өдәјирләр? Бурада $f(t)$ функсијасы $t \geqslant 0$ јарымохунда кәсилмәздир.

Чаваб: $|a| + \dfrac{|b|}{2} < \varepsilon$.

6. $\ddot{x} + 4x = 0$ тәнлијинин $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi(t, 0)$ һәлли илә $x\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 0$, $\dot{x}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi\left(t, \dfrac{\pi}{12}\right)$ һәллинин фәргини гијмәтләндирин.

Чаваб: $\left|\varphi\left(t, \dfrac{\pi}{12}\right) - \varphi(t, 0)\right| \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

7. Ашағыдакы мисалларда һәллин башланғыч гијмәтләринә нәзәрән көстәрилән төрәмәләрини тапын:

а) $\dot{x} = 3x^2 + 2tx$, $x(1) = 0$, $z(t) = \left.\dfrac{\partial x}{\partial \tau}\right|_{(\tau, \xi) = (1, 0)}$,

$$\Phi(t)=\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{(\xi,\,t)=(1,\,0)}.$$

Чаваб: $u(t)=0,\ \Phi(t)=e^{t}$.

б) $\dot{x}=-5x+4x^3e^{2t},\ x(0)=1,\quad u(t)=\frac{\partial x}{\partial \tau}\Big|_{(\tau,\,t)=(0,\,1)}.$

Чаваб: $u(t)=-e^{7t}$.

в) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1^2,\ x_1(1)=-1, & \Phi_{ij}(t)=\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(1,\,-1,\,2)},\quad i,\ j=1,2.\\ \dot{x}_2=-x_1x_2+t,\ x_2(1)=2,\end{cases}$

Чаваб: $\Phi_{11}(t)=\frac{1}{t^2},\ \Phi_{12}(t)=0,\ \Phi_{21}(t)=1-t(1+\ln t),\ \Phi_{22}(t)=t.$

г) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-x_2+x_1^2,\ x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=x_2-2x_1x_2+x_1^2+2x_1^3,\ x_2(0)=1\end{cases}$

$u_i(t)=\frac{\partial x_i}{\partial \tau}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(0,\,1,\,1)},\quad \Phi_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(0,\,1,\,1)},\quad i,\ j=1,\ 2.$

Чаваб: $u_1(t)=e^{t},\quad u_2(t)=2e^{2t},\quad \Phi_{11}(t)=(1+2t)e^{t},$

$\Phi_{12}(t)=-te^{t},\quad \Phi_{21}(t)=4te^{2t}+2e^{2t}-2e^{t},\ \Phi_{22}(t)=e^{t}-2te^{2t}.$

Кестәриш: $x_1=e^{t},\ x_2=e^{2t}$ мәсәләнин һәллидир.

8. $\dot{x}=x\cos t+t$ тәнлијинин $x(0)=1$ шәртини өдәјән һәллинин t-нин дәрәчәләри үзрә гүввәт сырасына ајрылышынын бир нечә һәддинин әмсалыны тә'јин един.

Чаваб $\varphi(t)=1+t+t^2+\frac{1}{6}t^3+\cdots$

9. Ашағыдакы мисалларда һәллин параметрә нәзәрән гүввәт сырасына ајрылышынын бир нечә һәддинин әмсалыны тә'јин един

а) $\dot{x}=\mu t^3-x^2,\quad x(1)=1.$

Чаваб. $\varphi(t,\mu)=\frac{1}{t}+\frac{\mu}{5}\left(t^3-\frac{1}{t^2}\right)+\mu^2\left(\frac{1}{25t^3}-\frac{1}{18t^2}+\frac{t^2}{50}-\right.$

$\left.-\frac{t^7}{225}\right)+\cdots$

б) $\dot{x}=-2x+x^2e^{t},\quad x(0)=1+3\mu.$

Чаваб: $\varphi(t,\mu)=e^{-t}+3\mu+9\mu^2(e^{t}-1)+\cdots.$

в) $\dot{x}=\frac{2}{t}x+1+\mu tx,\ x(1)=-1+2\mu.$

Чаваб: $\varphi(t,\mu)=-t+\mu t^2(3-t)+\mu^2t^2\left(\frac{3t^3}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{7}{6}\right)+\cdots$

г) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-\mu x_2,\quad x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=\mu x_1-x_2,\quad x_2(0)=2.\end{cases}$

Чаваб: $x_1=\varphi_1(t,\mu)=e^{t}+\mu\left(e^{-t}-e^{t}\right)+\mu^2\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)e^{t}-\right.$

$\left.-\frac{1}{4}e^{-t}\right]+\cdots,$

$x_2=\varphi_2(t,\mu)=2e^{-t}+\frac{\mu}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)+\mu^2\left[\left(t+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{1}{2}\right)e^{-t}-\frac{1}{2}e^{t}\right]+\cdots$

г) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1^2+\mu x_2,\quad x_1(0)=\cos\mu,\\ \dot{x}_2=x_1x_2+\mu x_1,\ x_2(0)=\sin\mu.\end{cases}$

Чаваб: $x_1=\varphi_1(t,\mu)=\frac{1}{1-t}+\mu^2\frac{6t-2t^3-3}{6(1-t)^2}+\cdots,$

$x_2=\varphi_2(t,\mu)=\mu\frac{1+t}{1-t}+\mu^2\cdot 0+\cdots,$

10. Исбат един ки,

$\begin{cases}\mu\dot{x}=-x+t,\\ \dot{y}=xy^2\end{cases}$

системинин һәлләри μ сағдан сыфыра јахынлашдыгда

$\begin{cases}0=-x+t,\\ \dot{y}=xy^2\end{cases}$

системинин һәлләринә јахынлашыр. Бу тәклиф

$\begin{cases}\mu\dot{x}=x+t,\\ \dot{y}=xy^2,\end{cases}\qquad \begin{cases}0=x+t,\\ \dot{y}=xy^2\end{cases}$

системләри үчүн дә доғрудурму?

VII ФӘСИЛ

ДАЈАНЫГЛЫГ НӘЗӘРИЈЈӘСИ ҺАГГЫНДА

Һәллин башланғыч шәртләрдән кәсилмәз асылылығыны өјрәнәркән көстәрдик ки, сәрбәст дәјишән сонлу парчада дәјишәркә, башланғыч шәртләр кичик дәјишдикдә һәлл һәмин парчада кичик дәјишир. Бир чох практик мәсәләләрдә башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәси илә әлагәдар олараг, сәрбәст дәјишән сонсуз интервалда дәјишдикдә һәллин кичик дәјишмәсинин

өјрәнмәк лазым кәлир. Бу исә һәллин дајаныглығы мәсәләси илә бағлыдыр.

Бу фәсил диференсиал тәнликләр системинин һәлләринин Љапунов мә'нада дајаныглығы нәзәријјәсинә һәср олунмушдур.

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР

Тутаг ки,

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (1)$$

нормал системиндә $f(t, x)$ вектор-функсијасынын $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри $G = I \times D$ чохлуғунда кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ хүсуси төрәмәләри вар, бурада $I = \{t_0 \leqslant t < +\infty\}$, D исә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мәһдуд областыдыр.

Ајдындыр ки, гојулмуш шәртләр дахилиндә һәр бир $x^0 \in D$ нөгтәси үчүн (1) системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[t_0, t_1)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш davaметдирилмәјән јеканә һәлли вар.

Фәрз едәк ки, $x = \varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән вә I-дә тә'јин олунмуш һәллидир. Верилмиш $\xi \in D$ үчүн системин $x(t_0) = \xi$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш давам етдирилмәјән һәллини $x = \varphi(t, \xi)$ илә ишарә едәк.

Тутаг ки, 1) кафи гәдәр кичик мүсбәт ρ әдәди вар ки, $\|\xi - x^0\| < \rho$ шәртини өдәјән ξ-ләр үчүн $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри I јарымохунда тә'јин олунуб; 2) истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $0 < \delta \leqslant \rho$ әдәди вар ки, $\|\xi - x^0\| < \delta$ олдугда $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри I јарымохунда $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ шәртини өдәјир. Онда дејирләр ки, (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәлли *Љапунов мә'нада дајаныглыдыр.*

Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ һәлли Љапунов мә'нада дајаныглыдыр вә 3) $0 < \sigma \leqslant \delta$ шәртини өдәјән елә σ әдәди вардыр ки, $\|\xi - x^0\| < \sigma$ олдугда $\lim\limits_{t \to \infty} \|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| = 0$ олур. Бу заман дејирләр ки, $x = \varphi(t)$ һәлли *асимптотик дајаныглыдыр.*

Тутаг ки, һәр һансы $\varepsilon > 0$ вә истәнилән $\delta > 0$ әдәдләри үчүн $\|\xi^0 - x^0\| < \delta$ шәртини өдәјән елә $\xi^0 \in D$ нөгтәси вә елә $t_1 > t_0$ аны вардыр ки, $x = \varphi(t, \xi^0)$ һәлли $\|\varphi(t_1, \xi^0) - \varphi(t_1)\| \geqslant \varepsilon$ шәртини өдәјир. Онда (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәлли *дајаныгсыз һәлл* адланыр.

Тутаг ки, елә $\sigma > 0$ әдәди вардыр ки, $\|\xi - x^0\| < \sigma$ шәртини өдәјән һәр бир $\xi \in D$ үчүн $x = \varphi(t, \xi)$ һәлли мүәјјән $t_1 = T(\xi) > t_0$ анында тә'јин олунмушдур вә тә'јин олундуғу $t \geqslant T(\xi)$ нөгтәләриндә $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| \geqslant \sigma$ бәрабәрсизлијини

өдәјир. Онда (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәлли *тамам дајаныгсыз һәлл адланыр.*

Ајдындыр ки, $x = a$ сабит вектору үчүн $f(t, a) = 0$, $t \in I$ оларса, бу вектор (1) системинин I-дә һәлли олур. Белә һәллә (1) системинин таразлыг вәзијјәти дејилир. Хүсуси һалда $a = 0$ оларса, $x = 0$ һәллинә тривиал һәлл дејилир.

Системин $x = a$ таразлыг вәзијјәтинин Љапунов мә'нада дајаныглы вә ја дајаныгсыз олмасынын тә'рифи, јухарыдакы тә'рифләрдә $x^0 = a$, $\varphi(t) = a$, $t \in I$ көтүрмәклә алыныр.

Адәтән, верилмиш системин һәр һансы һәллинин дајаныглығынын арашдырылмасы мәсәләси, бу системин көмәји илә гурулан јени системин тривиал һәллинин дајаныглығынын арашдырылмасы мәсәләсинә кәтирилир.

Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин һәр һансы һәллидир. Системдә $x = y + \varphi(t)$ әвәзләмәси апараг. Онда

$$\dot{y} = F(t, y), \quad F(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) \qquad (1')$$

системи алынар вә ајдындыр ки, $y = 0$ бу системин һәллидир.

Беләликлә, (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәллинин дајаныглығы мәсәләси (1′) системинин $y = 0$ тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирилир.

Ашағыда көстәрәчәјик ки, хәтти бирчинс системин һәр бир һәллинин мәһдудлуғундан онун ихтијари һәллинин дајаныглығы вә әксинә, һәр һансы һәллинин дајаныглығындан ихтијари һәллин мәһдудлуғу алыныр. Гејд едәк ки, бу хассә бирчинс олмајан вә гејри-хәтти системләр үчүн, үмумијјәтлә, доғру дејил.

Мисал 1. $\dot{x} = ax$ тәнлијинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны арашдыраг. Ајдындыр ки, тәнлијин $x(t_0) = \xi$ шәртини өдәјән һәлли $\varphi(t, \xi) = \xi e^{a(t-t_0)}$ шәклиндәдир.

Тутаг ки, $a \leqslant 0$. Ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta > 0$ әдәдини $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ шәртиндән сечсәк, $\|\xi\| < \delta$ олдугда

$$|\xi e^{a(t-t_0)}| \leqslant |\xi| < \delta \leqslant \varepsilon, \ t \in I.$$

Бурадан алыныр ки, $a \leqslant 0$ олдугда тәнлијин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр. Бундан башга, $a < 0$ олдугда һәм дә $\lim\limits_{t \to +\infty} \xi e^{a(t-t_0)} = 0$ олур. Демәли, $a < 0$ олдугда $x = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр.

Үмуми һәллин ифадәсиндән ајдындыр ки, $a > 0$ оларса, һәр һансы $\varepsilon > 0$ вә ихтијари $\delta > 0$ әдәдләри үчүн елә $t_1 = T(\xi) > t_0$ аны тапмаг олар ки, $0 < |\xi| < \delta \leqslant \varepsilon$ олмасына бахмајараг $t \geqslant t_1$ олдугда $|\xi e^{a(t-t_0)}| \geqslant \varepsilon$ олар. Дог-

рудан да, $t_1 = t_0 + \frac{1}{a} \ln \frac{\varepsilon}{|\xi|}$ гәбул етсәк, асанлыгла көстәрмәк олар ки, $t \geqslant t_1$ олдугда $|\xi e^{a(t-t_0)}| \geqslant \varepsilon$ олур.

Демәли, $a > 0$ олдугда $x = 0$ тривиал һәлли дајаныгсыз һәллдир.

Мисал 2. Јохламаг олар ки, $\varphi(t) = e^t$ функсијасы $\dot{x} = -x + 2e^t$ тәнлијинин $x(0) = 1$ шәртини өдәјән һәллидир вә тәнлијин $x(0) = \xi$ шәртини өдәјән һәлли $\varphi(t, \xi) = (\xi - 1)e^{-t} + e^t$. Ихтијари $t \geqslant 0$ үчүн $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |\xi - 1| e^{-t} \leqslant |\xi - 1|$ олдуғундан, ајдындыр ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta > 0$ әдәдини $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ шәртиндән сечсәк $|\xi - 1| < \delta$ олдугда, $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t \in I_0 = \{0 \leqslant t < +\infty\}$ олар. Дикәр тәрәфдән $\lim_{t \to +\infty} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = \lim_{t \to \infty} |\xi - 1| e^{-t} = 0$ олдуғундан, алырыг ки, $\varphi(t) = e^t$ һәлли I_0-да асимптотик дајаныгдыр.

Ајдындыр ки, $\varphi(t) = e^t$ һәлли I_0-да мәһдуд дејил.

Мисал 3. $\dot{x} = \sin x$ тәнлијинин үмуми һәлли $x = 2\operatorname{arctg}(ce^t)$ шәклиндәдир вә һәлләр I_0-да мәһдуддур.

Ајдындыр ки, $c < 0$ олдугда $\lim_{t \to +\infty} x(t) = -\pi$, $c > 0$ олдугда исә $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \pi$. Бурадан алырыг ки, $x(t) = 0$ һәлли дајаныглы дејил.

§ 2. ХӘТТИ СИСТЕМИН ДАЈАНЫГЛЫҒЫ

Тутаг ки, хәтти бирҹинс олмајан

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{2}$$

системи верилмишдир; бурада $A(t)$ матрис-функсијасы вә $f(t)$ вектор-функсијасы $I = \{t_0 < t < +\infty\}$ јарымохунда кәсилмәздир. Бу системин һәр һансы $x = \varphi(t)$ һәллинин дајаныглығы мәсәләси, $x = y + \varphi(t)$ әвәзләмәси васитәсилә ујғун бирҹинс

$$\dot{y} = A(t)y$$

системинин $y = 0$ тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирилир. Она көрә дә хәтти бирҹинс

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3}$$

системинин тривиал һәллинин дајаныглығыны өјрәнмәклә кифајәтләнәҹәјик.

Бүтүн һәлләри дајаныглы (асимптотик дајаныглы) олан системә *дајаныглы систем (асимптотик дајаныглы систем)* дејилир.

Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (3) системинин $\Phi(t_0) = E$ шәртини өдәјән фундаментал матрисидир, бурада E ваһид матрисдир. Онда (3) системинин $x(t_0) = \xi$ башлангыҹ шәртини өдәјән һәлли

$$\varphi(t, \xi) = \Phi(t)\xi \tag{4}$$

шәклиндә көстәрилир. Бурадан асанлыгла көстәрмәк олар ки, (3) системинин дајаныглы олмасы үчүн онун тривиал һәллинин дајаныглы олмасы зәрури вә кафидир.

Хәтти бирҹинс олмајан (2) системинин ихтијари ики һәллинин фәрги ујғун бирҹинс (3) системинин һәлли олдуғундан, ахырынҹы тәклифдән алырыг ки, (2) системинин дајаныглы олмасы үчүн ујғун бирҹинс системин дајаныглы олмасы зәрури вә кафидир.

Јухарыда кәтирилән мисаллар көстәрир ки, һәллин дајаныглығы илә мәһдудлуғу асылы олмајан анлајышлардыр. Лакин хәтти бирҹинс системин дајаныглығы илә онун һәлләринин мәһдудлуғу мәсәләләри бир-бирилә сых бағлыдыр.

Теорем 1. *Хәтти бирҹинс системин дајаныглы олмасы үчүн, онун һәр бир һәллинин I-дә мәһдуд олмасы зәрури вә кафидир.*

З ә р у р и л и ј и н   и с б а т ы. Тутаг ки, (3) системи дајаныглыдыр. Онда тривиал һәллин дајаныглығына әсасән, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta > 0$ әдәди тапмаг олар ки, $\|\xi\| < \delta$ олдугда (4)-ә әсасән $\|\varphi(t, \xi)\| = \|\Phi(t)\xi\| < \varepsilon$, $t \in I$ олур.

Хүсуси һалда ξ вектору олараг, i-ҹи компоненти $\frac{\delta}{2}$, галан компонентләри исә сыфыр олан вектор көтүрсәк,

$$\|\varphi(t, \xi)\| = \|\Phi(t)\xi\| = \|\Phi^i(t)\| \frac{\delta}{2} < \varepsilon, \quad t \in I$$

олар; бурада $\Phi^i(t)$ илә $\Phi(t)$ матрисинин i-ҹи сүтуну ишарә олунмушдур. Онда $\|\Phi^i(t)\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$ олдуғундан,

$$\|\Phi(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\Phi^i(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{2\varepsilon}{\delta}\sqrt{n}, \quad t \in I$$

олар, јә'ни $\Phi(t)$ матриси I јарымохунда мәһдуддур вә (4) дүстуруна әсасән алырыг ки, (3) системинин һәр бир һәлли мәһдуддур.

К а ф и л и ј и н   и с б а т ы. (3) системинин һәр бир һәллинин мәһдудлуғундан алырыг ки, $\Phi(t)$ фундаментал матриси I-да мәһдуддур: $\|\Phi(t)\| \leqslant M$, $t \in I$. Онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta > 0$ әдәдини $0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$ шәртиндән сечсәк,

$\|\xi\| < \delta$ олдугда (4) дүстуруна әсасән $\|\varphi(t, \xi)\| \leqslant \|\Phi(t)\| \times \|\xi\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$ олар. Бурадан алыныр ки, (3) системинин тривиал һәлли дајаныглыдыр. Теорем исбат олунду.

Нәтичә *Тутаг ки, бирчинс олмајан (2) хәтти системи дајаныглыдыр. Онда ја бу системин һәлләринин һәр бири I јарымохунда мәһдуддур, јахуд да heч бири мәһдуд дејил.*

Нәтичәнин исбаты (2) системинин $x(t_0) = \xi$ башланғыч шәртини едәјән һәллинин

$$\varphi(t, \xi) = \Phi(t)\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s) f(s) ds$$

шәклиндә көстәрилмәсиндән вә ујғун бирчинс системин һәлләринин I-дә мәһдудлуғундан алыныр.

Теорем 2. *Хәтти бирчинс системин асимптотик дајаныглы олмасы үчүн онун һәр бир һәллинин t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда сыфра јахынлашмасы зәрури вә кафидир.*

Зәрурилијин исбаты. Тривиал һәлл асимптотик дајаныглы олдуғундан, елә $\sigma > 0$ әдәди вар ки, $\|\xi\| < \sigma$ олдугда $x(t_0) = \xi$ шәртини едәјән $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри үчүн $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, \xi) = \lim_{t \to +\infty} \Phi(t)\xi = 0$. Бурадан $\lim_{t \to +\infty} \Phi^i(t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Онда (4) дүстуруна әсасән зәрурилијин исбаты алыныр.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, (3) тәнлијинин һәр бир $x = \varphi(t, \xi)$ һәлли

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, \xi) = 0 \tag{5}$$

шәртини өдәјир. Бурадан лимитин тә'рифинә әсасән елә $A_\xi > t_0$ әдәди вар ки,

$$\|\varphi(t, \xi)\| \leqslant 1, \quad t \in [A_\xi, +\infty).$$

Дикәр тәрәфдән, $\varphi(t, \xi)$ вектор-функсијасы сонлу $[t_0, A_\xi]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан, һәм дә бу парчада мәһдуддур. Она көрә дә, $x = \varphi(t, \xi)$ һәлли I јарымохунда мәһдуддур. Бурадан, 1-чи теоремә вә (5) шәртинә әсасән, (3) системинин тривиал һәллинин асимптотик дајаныглы олдуғу алыныр. Теорем исбат олунду.

Сабит әмсаллы хәтти бирчинс

$$\dot{x} = Ax \tag{6}$$

системинин дајаныглығы мәсәләси A матрисинин характеристик әдәдләри илә бағлыдыр. Белә системләрин $I_0 = \{0 \leqslant t < +\infty\}$ јарымохунда дајаныглығыны өјрәнәк. Бунун үчүн A матрисинин Жордан формасындан истифадә олунур.

Мә'лумдур ки, J матриси A матрисинин каноник Жордан формасы исә, елә гејри-мәхсуси P матриси вар ки,

$$P^{-1}AP = J \equiv \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_l}(\lambda_l) \end{pmatrix},$$

$$J_{m_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, l;$$

бурада $m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$; $J_{m_j}(\lambda_j)$ һүчрәси m_j-тәртибли квадрат матрисдир вә мүәјјән j_0 үчүн $m_{j_0} = 1$ олдугда $J_{m_{j_0}}(\lambda_{j_0})$ бирелементли һүчрә олуб, јеканә λ_{j_0} елементи вар; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ әдәдләри A матрисинин характеристик әдәдләридир вә мүхтәлиф олмаја биләрләр.

Әкәр (6) системиндә $x = Py$ әвәзләмәси апарсаг, y векторунун $y_1, y_2, \ldots, y_n$ компонентләринә нәзәрән

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 y_2 + y_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_{m_1} = \lambda_1 y_{m_1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_{n-m_l+1} = \lambda_l y_{n-m_l+1} + y_{n-m_l+2}, \\ \dot{y}_{n-m_l+2} = \lambda_l y_{n-m_l+2} + y_{n-m_l+3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n = \lambda_l y_n \end{cases} \tag{7}$$

системи алынар. Бу системин биринчи m_1 сајда тәнлији $J_{m_1}(\lambda_1)$ һүчрәсинә вә с. сонунчу m_l сајда тәнлији исә $J_{m_l}(\lambda_l)$ һүчрәсинә ујғун алыныр. Һәр һансы һүчрә, мәсәлән, $J_{m_1}(\lambda_1)$ һүчрәси бирелементли оларса, она анчаг бир $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$ тәнлији ујғун кәлир.

Гејд едәк ки, P матриси гејри-мәхсуси матрис олдуғундан, (6) системинин дајаныглығы мәсәләси (7) системинин дајаныглығы мәсәләсинә еквивалентдир.

Теорем 3. *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин I_0 јарымохунда дајаныглы олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, A матрисинин бүтүн характеристик әдәдләринин һәгиги һиссәләри мүсбәт олмамагла, һәгиги һиссәси сыфыр олан характеристик әдәдләрә ујғун Жордан һүчрәләринин бирелементли олмасыдыр.*

З ә р у р и л и ј и н и с б а т ы. Тутаг ки, (6) системи дајаныг-
лыдыр, лакин A матрисинин характеристик әдәдләри ичәри-
синдә һәгиги һиссәси мүсбәт оланы вар. Үмумилији позмадан,
фәрз едәк ки, $Re\,\lambda_1 = a > 0$. Онда (7) системинин $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$,
$y_2(t) = 0, \ldots, y_n(t) = 0$ һәлли үчүн

$$\lim_{t\to+\infty} \| y(t) \| = \lim_{t\to+\infty} | e^{\lambda_1 t} | = \lim_{t\to+\infty} e^{at} = +\infty.$$

Бу исә (7) системинин дајаныглылығына зиддир.
Бу исә (7) системинин дајаныглылығына зиддир.

Инди тутаг ки, A матрисинин һәгиги һиссәси сыфыр олан
характеристик әдәдләри ичәрисиндә еләси вар ки, она ујғун
олан Жордан һүчрәсинин тәртиби икидән аз дејил. Үмумилији
позмадан, фәрз едәк ки, $\lambda_1 = i\beta$ ($\beta = 0$ ола биләр) характерис-
тик әдәдинә ујғун олан $J_{m_1}(\lambda_1)$ Жордан һүчрәсиндә m_1 2.
Бу һалы арашдырмаг үчүн (7) системинин $y_j(0) = 1$, $j = 1$,
$2, \ldots, m_1$, $y_j(0) = 0$, $j = m_1 + 1, \ldots, n$ башланғыч шәртини өдә-
јән һәллини тапаг. Бунун үчүн (7) системинин биринчи m_1 тән-
ликләрини, сонунчудан башлајараг ардычыл һәлл едәк. Онда
(7) системинин

$$y_1(t) = e^{i\beta t}\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right),$$

$$y_2(t) = e^{i\beta t}\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}\right),$$

. . . .

$$y_{m_1}(t) = e^{i\beta t},$$

$$y_j(t) = 0, \quad j = m_1 + 1, \ldots, n$$

һәллини аларыг вә $m_1 > 2$ олдуғундан, бу һәлл үчүн

$$\lim_{t\to+\infty} \| \varphi(t) \| \geq \lim_{t\to+\infty}\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right) = +\infty.$$

Бу исә (7) системинин дајаныглы олмасына зиддир.

К а ф и л и ј и н и с б а т ы. Тутаг ки, $Re\,\lambda_j = \alpha_j < 0$, $j = 1$,
$2, \ldots, k$ $(k < l)$ вә $Re\,\lambda_j = 0$, $j = k + 1, \ldots, l$. Теоремин шәр-
тинә әсасән $J_{m_j}(\lambda_j)$, $j = k + 1, \ldots, l$ бирелементли олуб, јека-
нә λ_j елементи вар ($\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_l$ мүхтәлиф олмаја биләр-
ләр). Онда (7) системинин үмуми һәлли

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + tc_2 + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right),$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_1 t}\left(c_2 + tc_3 + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right),$$

. . . .

$$y_{m_1}(t) = e^{\lambda_1 t}c_{m_1}$$

. . . .

$$y_n(t) = e^{\lambda_l t}c_n$$

шәклиндә олар. $\sigma = \min(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_k|)$ ишарә едәк
вә $0 < \nu < \sigma$ шәртини өдәјән ν үчүн $\mu = \sigma - \nu$ әдәдинә бахаг.
Онда $\alpha_j + \nu \leq -\mu$, $j = 1, 2, \ldots, k$ олар.

Компонентләри $c_1, c_2, \ldots, c_n$ олан c вектору үчүн елә M
әдәди тапмаг олар ки, $t \geq 0$ олдугда

$$| y_1(t) | = \left| e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + tc_2 + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right)\right| =$$

$$= e^{(\alpha_1+\nu)t}\left| e^{-\nu t}\left(c_1 + tc_2 + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right)\right| < Me^{-\mu t},$$

$$| y_2(t) = \left| e^{\lambda_1 t}\left(c_2 + tc_3 + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right)\right| =$$

$$= e^{(\alpha_1+\nu)t}\left| e^{-\nu t}\left(c_2 + tc_3 + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right)\right| \leq Me^{-\mu t}, \ldots,$$

$$| y_n(t) | = | e^{\lambda_l t} c_n | = | c_n | \leq M.$$

Бу бәрабәрсизликләрә әсасән, (7) системинин һәр бир һәл-
лини

$$\| y(t) \|^2 \leq M_1 e^{-2\mu t} + M_2$$

шәклиндә гијмәтләндирмәк олар. Бурадан да 1-чи теоремә
әсасән (7) системинин дајаныглы олмасы алыныр.

Гејд едәк ки, (6) системинин һәлләри $x(t) = Py(t)$ шәк-
линдә олдуғундан, сонунчу бәрабәрсизлијә әсасән бу систе-
мин һәр бир һәлли үчүн елә M_3, M_4 әдәдләри тапмаг олар ки

$$\| x(t) \|^2 < M_3 e^{-2\mu t} + M_4$$

бәрабәрсизлији өдәнәр.

Теорем 4. *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин I_0 јарымохунда асимптотик дајаныглы олмасы үчүн A матрисинин характеристик әдәдләринин һамысынын һәгиги һиссәләринин мәнфи олмасы зәрури вә кафидир.*

И с б а т ы. Зәрурилик 3-чү теоремдәки гајда илә исбат
олунур.

Теоремин шәртләри дахилиндә (8) бәрабәрсизлији

$$\| x(t) \| < M_5 e^{-\mu t}, \quad t \in I_0 \ (\mu > 0) \tag{9}$$

бәрабәрсизлији илә әвәз олунур вә бурадан да 2-чи теоремә
әсасән кафилијин исбаты алыныр.

Исбат олунан теоремләр көстәрир ки, сабит әмсаллы хәтти
бирчинс системин дајаныглығы мәсәләсиндә A матрисинин
характеристик әдәдләринин һәгиги һиссәләринин ишарәләрини
билмәк әсас рол ојнајыр. A матрисинин характеристик әдәд-
ләри

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

шәклиндә һәгиги әмсаллы чохһәдлинин көкләри олдуғундан, бу чохһәдлинин көкләринин һәгиги һиссәләринин ишарәләрини мүәјјән етмәк кифајәтдир. Одур ки, һәгиги әмсаллы $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ чохһәдлисини көтүрәк вә онун көкләринин һәгиги һиссәләринин мүсбәт олмамасы һаггында бир нечә әламәтлә таныш олаг. Үмумилији позмадан, $a_0 > 0$ көтүрүлүр.

Көкләринин һәгиги һиссәләри мәнфи олан $f(\lambda)$ чохһәдлисинә *Гурвич чохһәдлиси дејилир.*

Тәклиф 1. *$f(\lambda)$ чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ олмасы зәруридир. Чохһәдлинин дәрәчәси $n \leqslant 2$ олдуғда бу шәрт һәм дә кафидир.*

Доғрудан да, $f(\lambda)$ чохһәдлиси Гурвич чохһәдлиси исә онун көкләри $\lambda = -a$ $(a > 0)$, $\lambda = -\alpha + i\beta$, $\bar\lambda = -\alpha - i\beta$ $(\alpha > 0)$ шәклиндәдир. Демәли, $f(\lambda)$ чохһәдлиси $\lambda + a$, $\lambda + \alpha - i\beta$, $\lambda + \alpha + i\beta$ вә с. шәклиндә вуругларын һасили кими көстәрилә биләр. Бурадан ајдындыр ки, $f(\lambda)$ чохһәдлисинин әмсаллары мүсбәт олар.

Мисал 1. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1 + 3i$, $\lambda_3 = 1 - 3i$ әдәдләри $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30$ чохһәдлисинин көкләридир. Әмсалларын мүсбәт олмасына бахмајараг $f(\lambda)$ чохһәдлиси Гурвич чохһәдлиси дејил.

Баш диагонал елементләри $a_1, a_2, \ldots, a_n$ олан

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

квадрат матрисини дүзәлдәк вә онун баш диагонал минорларыны

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$$

илә ишарә едәк.

Тәклиф 2 (Гурвич теореми). *$f(\lambda)$ чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ шәртләринин өдәнмәси зәрури вә кафидир.*

Тәклиф 3 (Ленар—Шипар шәрти). *$f(\lambda)$ чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ вә $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \ldots$ шәртләринин өдәнмәси зәрури вә кафидир.*

Тәклиф 4 (Михајлов шәрти). *$f(\lambda)$ чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн $a_n \cdot a_{n-1} > 0$ олмагла,*

$$a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \cdots = 0,$$
$$a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \cdots = 0$$

тәнликләринин көкләринин һамысынын һәгиги, мүсбәт, мүхтәлиф олмасы вә

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots$$

шәртини өдәмәси зәрури вә кафидир.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ \dot x_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ \dot x_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

системинин дајаныглығыны арашдыраг.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda + 34$$

олдуғундан, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 68$. Онда Гурвич теореминә әсасән бахылан систем асимптотик дајаныглы олур.

Мисал 3. α вә β параметрләринин һансы гијмәтиндә

$$\dddot x + \alpha\ddot x + \beta\dot x + 3x = 0$$

тәнлији асимптотик дајаныглыдыр?

Һәлли. Бурада $f(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 3$ олдуғундан, Ленар—Шипар шәртинә әсасән, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ вә $\Delta_2 = \alpha\beta - 3 > 0$ олдуғда бахылан тәнлик асимптотик дајаныглы олур.

Мисал 4. $x^{V} + x^{IV} + 6\dddot x + 4\ddot x + 8\dot x + 3x = 0$ тәнлијинин асимптотик дајаныглы олдуғуну Михајлов шәртинин көмәјилә көстәрәк. Бахылан тәнлик үчүн $a_{n-1} \cdot a_n = 8 \cdot 3 > 0$ вә $3 - 4\xi + \xi^2 = 0$, $8 - 6\eta + \eta^2 = 0$ тәнликләринин көкләри ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 4$) үчүн $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$ шәрти өдәнир. Демәли, бахылан тәнлик асимптотик дајаныглыдыр.

§ 3. ЛЈАПУНОВ ФУНКСИЈАЛАРЫ ҮСУЛУ

Бу параграфда D областынын n-өлчүлү фәзанын координат башланғычыны өз дахилиндә сахладығыны вә $f(t, 0) = 0$, $t \in I$ шәртинин өдәндијини фәрз едәрәк Лјапунов функсијаларынын көмәји илә (1) системинин тривиал һәллинин дајаныглығыны арашдырачағыг.

Тутаг ки, $v = v(t, x)$ функсијасы G чохлуғунда кәсилмәздир вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Әкәр $v(t, 0) = 0$,

$t \in I$ вә $v(t, x) \geqslant 0$ $(v(t, x) \leqslant 0)$, $(t, x) \in G$ оларса, $v(t, x)$ функсијасына *ишарәси мүсбәт (ишарәси мәнфи)* функсија дејилир

Ишарәси мүсбәт $v(t, x)$ функсијасы үчүн, D областында

$$v(t, x) \geqslant \omega(x) > 0, \quad (t, x) \in G, \quad x \neq 0,$$
$$v(t, x) = \omega(0) = 0, \quad t \in I$$

шәртләрини өдәјән вә кәсилмәз диференсиалланан $\omega(x)$ функсијасы варса, $v(t, x)$ функсијасына G чохлуғунда *мүсбәт мүәјјән*, $\omega(x)$-ә исә D областында мүсбәт мүәјјән функсија дејилир.

Ејни гајда илә, ишарәси мәнфи $\tilde{v}(t, x)$ функсијасы үчүн D областында

$$\tilde{v}(t, x) \leqslant -\tilde{\omega}(x) < 0, \quad (t, x) \in G, \quad x \neq 0,$$
$$\tilde{v}(t, 0) = \tilde{\omega}(0) = 0, \quad t \in I$$

шәртләрини өдәјән кәсилмәз диференсиалланан вә мүсбәт мүәјјән $\tilde{\omega}(x)$ функсијасы варса, $\tilde{v}(t, x)$ функсијасына G-дә *мәнфи мүәјјән функсија* дејилир.

Дајаныглығын арашдырылмасы үчүн истифадә олунан белә $v(t, x)$ функсијасына *Ljапунов функсијасы* дејилир.

Адәтән, (1) системинин сағ тәрәфи t-дән ашкар асылы олмадыгда Ljапунов функсијасы олараг $\omega(x)$ көтүрүлүр.

Лемма. *Тутаг ки, $\omega(x)$ функсијасы D областында мүсбәт мүәјјән функсијадыр. Онда елә $h > 0$ әдәди вар ки, $0 < c < h$ шәртини өдәјән ихтијари c әдәди үчүн $\omega(x) = c$ сәвијјә сәтһләри координат башланғычына нәзәрән гапалы сәтһләрдир, јә'ни координат башланғычыны D областынын сәрһәди илә бирләшдирән ихтијари кәсилмәз әјри $\omega(x) = c$ сәтһини һеч олмаса бир нөгтәдә кәсир.*

Исбаты. Елә $R > 0$ әдәди көтүрәк ки, мәркәзи координат башланғычында вә радиусу R олан H_R күрәси тамамилә D областында јерләшсин. Бу күрәнин сәтһини S_R илә ишарә едәк. $\omega(x)$ функсијасы гапалы, мәһдуд S_R сферасы үзәриндә кәсилмәз олдуғундан, бурада минимумуну алыр. Бу минимуму h илә ишарә едәк. S_R сферасы үзәриндә η нөгтәси көтүрүб, $x(0) = 0$, $x(s_1) = \eta$ шәртләрини өдәјән вә $[0, s_1]$ парчасында кәсилмәз олан $x = x(s)$ функсијасы үчүн $\Phi(s) = \omega(x(s))$ функсијасына бахаг. Ајдындыр ки, $y = \Phi(s)$ функсијасы $[0, s_1]$ парчасында кәсилмәздир вә $\Phi(0) = \omega(x(0)) = 0$, $\Phi(s_1) = \omega(x(s_1)) = \omega(\eta) \geqslant h > 0$. Бурадан Коши теореминә әсасән, $0 < c < h$ шәртини өдәјән ихтијари c әдәди үчүн елә $s' \in [0, s_1]$ нөгтәси вар ки, $\Phi(s') = \omega(x(s')) = c$ олур. Лемма исбат олунду.

Теорем 5. *Тутаг ки, G чохлуғунда мүсбәт мүәјјән олан елә $v(t, x)$ функсијасы вар ки, онун (1) системинә әсасән төрәмәси*

$$\dot{v}_{(1)}(t, x) \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x) \leqslant 0, \quad (t, x) \in G \qquad (10)$$

олур. Онда (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр.

Исбаты. $v(t, x)$ функсијасы мүсбәт мүәјјән олдуғундан D областында мүсбәт мүәјјән олан елә $\omega(x)$ функсијасы вар ки, $v(t, x) \geqslant \omega(x) > 0$, $x \neq 0$, шәрти өдәнир.

Ајдындыр ки, кифајәт гәдәр кичик $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн мәркәзи координат башланғычында вә радиусу ε олан H_ε күрәси S_ε сферасы илә бирликдә D областында јерләшәр. $\omega(x)$ функсијасынын S_ε сферасы үзәриндә алдығы ән кичик гијмәти ω_ε илә ишарә едәк. Онда $v(t, 0) = 0$, $t \in I$ олдуғундан, верилмиш ε әдәдинә көрә $0 < \delta < \varepsilon$ шәртини өдәјән елә δ әдәди сечмәк олар ки, $x \in H_\delta$, $t \in I$ үчүн $v(t, x) < \omega_\varepsilon$ олар. Сечилмиш $\delta > 0$ әдәди үчүн $0 < \| \xi \| < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари ξ нөгтәси көтүрүб, (1) системинин $x(t_0) = \xi$ шәртини өдәјән һәллинә бахаг. Гојулмуш шәртләр дахилиндә бу мәсәләнин $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында тә'јин олунан вә даваметдирилмәјән јеканә $x = \varphi(t, \xi)$ һәлли вар. Көстәрәк ки, $t \in [t_0, t_\xi)$ үчүн

$$\| \varphi(t, \xi) \| < \varepsilon. \qquad (11)$$

Доғрудан да, $\| \xi \| < \delta < \varepsilon$ олдуғундан, бу бәрабәрсизлик кичик $h > 0$ әдәди үчүн $[t_0, t_0 + h]$ $(t_0 + h < t_\xi)$ парчасында өдәнир. Әкәр бу бәрабәрсизлик $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында өдәнмәзсә, леммаја әсасән елә $t_1 \in (t_0, t_\xi)$ нөгтәси тапмаг олар ки, $t \in [t_0, t_1)$ олдугда (11) бәрабәрсизлији өдәнир вә $\| \varphi(t_1, \xi) \| = \varepsilon$ олур. Бурадан алырыг ки, $x^1 = \varphi(t_1, \xi)$ нөгтәси S_ε сферасы үзәриндә јерләшир. Дикәр тәрәфдән, (10) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$v(t_1, x^1) - v(t_0, \xi) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{v}(t, \varphi(t, \xi))\, dt \leqslant 0$$

олур. Бурадан $v(t_0, \xi) \geqslant v(t_1, x^1) \geqslant \omega(x^1) \geqslant \omega_\varepsilon$. Бу исә $v(t_0, \xi) < \omega_\varepsilon$ шәртинә зиддир. Демәли, $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында (11) бәрабәрсизлији өдәнир.

Гејд едәк ки, (11) бәрабәрсизлијинин өдәнмәсиндән $t_\xi = +\infty$ олдуғу алыныр. Доғрудан да, әкс һалда (јәни $t_\xi < +\infty$ олдугда) $\varphi(t, \xi)$ һәлли даваметдирилән һәлл олар.

Беләликлә, ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $0 < \delta < \varepsilon$ шәртини өдәјән елә δ сечмәк олар ки, $\| \xi \| < \delta$ шәрти өдәндикдә, (1) системинин $x(t_0) = \xi$ башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри I јарымохунда тә'јин олунуб вә бу јарымохда $\| \varphi(t, \xi) \| < \varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнир. Бу исә (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығы демәкдир.

Теорем 6. *Тутаг ки, G чохлуғунда мүсбәт мүәјјән олан елә $v(t, x)$ функсијасы вар ки, онун (1) системинә әсасән төрәмәси мәнфи мүәјјәндир вә I јарымохунда мүнтәзәм оларағ $\lim\limits_{x \to 0} v(t, x) = 0$ шәрти өдәнир. Онда (1) системинин тривиал һәлли асимптотик дајаныглыдыр.*

И с б а т ы. 5-чи теоремин шәртләри өдәндијиндән $x = 0$ һәлли дајаныглыдыр. Она көрә дә $0 < \sigma < \delta$ шәртини өдәјән σ әдәди үчүн $0 < \|\xi\| < \sigma$ олдугда

$$\varphi(t, \xi) \in \overline{H}_\varepsilon, \quad t \in I \ (\overline{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \cup S_\varepsilon)$$

олар. Көстәрәк ки,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, \xi) = 0. \qquad (12)$$

Бунун үчүн $\Phi(t) = v(t, \varphi(t, \xi))$ функсијасына бахаг. Шәртә көрә $\dot\Phi(t) = \dot v_{(1)}(t, \varphi(t, \xi)) < 0$, $t \in I$ олдуғундан, $\Phi(t)$ функсијасы I јарымохунда чидди монотон азаландыр вә $\Phi(t) \geqslant 0$. Одур ки, сонлу $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = \inf\limits_t \Phi(t) = l \geqslant 0$ лимити вар. Тутаг ки, $l > 0$. Онда елә $\lambda > 0$ әдәди вар ки, $\|\varphi(t, \xi)\| \geqslant \lambda$, $t \in I$. Доғрудан да, әкс һалда елә $\{t_k\}$, $t_k \in I$ ардычыллығы сечмәк олар ки, $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = +\infty$ вә $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(t_k, \xi) = 0$. Бурадан, теоремин шәртинә әсасән аларыг ки, $\lim\limits_{k \to \infty} \Phi(t_k) = \lim\limits_{k \to \infty} v(t_k, \varphi(t_k, \xi)) = 0$.

Демәли, $l > 0$ олдугда $0 < \lambda \leqslant \|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon$, $t \in I$ олмалыдыр. Јә'ни $t \in I$ үчүн $\varphi(t, \xi) \in \overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda$. Шәртә көрә $v(t, x)$ функсијасынын (1) системинә әсасән төрәмәси мәнфи мүәјјән олдуғундан елә мүсбәт мүәјјән $\omega_1(x)$ функсијасы вар ки,

$$\dot v_{(1)}(t, x) \leqslant -\omega_1(x) < 0, \ t \in I, x \in \overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda.$$

Гапалы мәһдуд $\overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda$ чохлуғунда $\omega_1(x)$ функсијасынын минимумуну m илә ишарә етсәк ($m > 0$),

$$\dot v_{(1)}(t, x) \leqslant -m, \quad t \in I, \quad x \in \overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda$$

олар. Онда

$$v(t, \varphi(t, \xi)) = v(t_0, \xi) + \int_{t_0}^{t} \dot v(\tau, \varphi(\tau, \xi))\, d\tau$$

бәрабәрлијинә әсасән аларыг ки,

$$v(t, \varphi(t, \xi)) \leqslant v(t_0, \xi) - m(t - t_0), \ t \geqslant t_0$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Бу бәрабәрсизлијин сағ тәрәфи кифајәт гәдәр бөјүк t-ләр үчүн мәнфи, сол тәрәфи исә һәмишә мүсбәтдир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $l = 0$ олмалыдыр, јә'ни

$$\lim_{t \to +\infty} v(t, \varphi(t, \xi)) = 0. \qquad (13)$$

Бурадан да, (12) мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр. Буну көстәрмәк үчүн $0 < \rho < \varepsilon$ шәртини өдәјән һәр һансы ρ әдәди көтүрәк вә гапалы, мәһдуд $\overline{H}_\varepsilon \setminus H_\rho$ областында $\omega(x)$ функсијасынын минимумуну ω_ρ илә ишарә едәк. Лимитин тә'рифинә әсасән (13) мүнасибәтиндән алырыг ки, елә $t_\rho > t_0$ вар ки, $t \geqslant t_\rho$ олдугда $v(t, \varphi(t, \xi)) < \omega_\rho$ олур. Бурадан, $\Phi(t) = v(t, \varphi(t, \xi))$ функсијасынын монотон азалан олмасына әсасән алырыг ки,

$$\|\varphi(t, \xi)\| < \rho, \ t > t_\rho \qquad (14)$$

олмалыдыр. Доғрудан да, әкс һалда, елә $t_1 > t_\rho$ нөгтәси тапмаг олар ки, $\|\varphi(t_1, \xi)\| \geqslant \rho$ олар. Бурадан $v(t_1, \varphi(t_1, \xi)) \geqslant \omega(\varphi(t_1, \xi)) \geqslant \omega_\rho$ бәрабәрсизлији алыныр. Дикәр тәрәфдән, $t \geqslant t_\rho$ олдугда $v(t, \varphi(t, \xi)) < \omega_\rho$ олдуғундан, алынан зиддијјәт (14) бәрабәрсизлијинин доғрулуғуну көстәрир вә бурадан да, ρ ихтијари олдуғундан, (12) мүнасибәти алыныр. Бу исә (1) системинин тривиал һәллинин асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрир. Теорем исбат олунду.

Хүсуси һалда, (1) системинин сағ тәрәфи t-дән ашкар асылы олмадыгда, јә'ни

$$\dot x = f(x), \ f(0) = 0 \qquad (15)$$

автоном системи үчүн 6-чы теорем ашағыдакы шәкилдә олур.

Теорем 7. *Тутаг ки, D областында өзү мүсбәт мүәјјән вә (15) системинә әсасән төрәмәси $\dot\omega_{(15)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{d\omega}{dx_j} f_j(x)$ мәнфи мүәјјән олан $\omega(x)$ функсијасы вар. Онда (15) системинин тривиал һәлли асимптотик дајаныглыдыр.*

И с б а т ы. 5-чи теоремә әсасән, $x = 0$ һәлли дајаныглыдыр. Бу һәллин асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрмәк үчүн әввәлчә 6-чы теоремин исбат гајдасы илә $\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi))$ функсијасынын чидди монотон азалан вә $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(\varphi(t, \xi)) = 0$ олдуғу көстәрилир. Бурадан, јенә дә 6-чы теоремин исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, \xi) = 0$. Бу исә көстәрир ки, (15) системинин $x = 0$ һәлли асимптотик дајаныглыдыр.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 x_2^2, \\ \dot x_2 = x_2 x_1^2 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны Лјапунов функсијалары үсулу илә арашдыраг. Бунун үчүн $\omega(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ функсијасына бахаг. Ајдындыр ки, бу

функсија мүсбәт мүәјјән функсијадыр. Дикәр тәрәфдән, онун бахылан системә әсасән төрәмәси

$$\dot{\omega}(x_1, x_2) = \frac{d\omega}{dx_1}(-x_1 x_2^2) + \frac{d\omega}{dx_2}(x_2 x_1^2) = -4x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 = -2x_1^2 x_2^2$$

олдуғундан, $\omega(x_1, 0) = \dot{\omega}(0, x_2) = 0$ вә $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ олдугда $\dot{\omega}(x_1, x_2) < 0$. Демәли, $\omega(x_1, x_2)$ функсијасынын өзү мүсбәт мүәјјән, бахылан системә әсасән төрәмәси исә ишарәси мәнфи функсијадыр. Одур ки, 5-чи теоремә әсасән $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, системин истәнилән $x_1(t)$, $x_2(t)$ һәлли үчүн $x_1^2(t) + x_2^2(t) = c$ ($c \geqslant 0$ ихтијари сабитдир) мүнасибәти доғрудур. Бурадан ајдындыр ки, $\lim\limits_{t \to +\infty} \| x(t) \| \neq 0$. Бу бир даһа көстәрир ки, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглы дејил.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 9x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 - 0{,}5x_2^3 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрәк.

Лјапунов функсијасы олараг $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$ функсијасыны көтүрәк. Бу функсијанын бахылан системә әсасән төрәмәсини тапаг:

$$\dot{\omega}(x_1, x_2) = \frac{d\omega}{dx_1}(-5x_1 - 9x_2 - x_1^3) + \frac{d\omega}{dx_2}(3x_1 - 4x_2 - 0{,}5x_2^3) =$$
$$= -(10x_1^2 + 24x_2^2 + 2x_1^4 + 3x_2^4).$$

Ајдындыр ки, $\omega(x_1, x_2)$ функсијасынын өзү мүсбәт мүәјјән, системә әсасән төрәмәси исә мәнфи мүәјјәндир. Онда 7-чи теоремә әсасән, бахылан системин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр.

Исбат олунан теоремләр көстәрир ки, Лјапунов функсија-лары үсулу илә дајаныглығы өјрәнәркән әсас чәтинликләрдән бири Лјапунов функсијасынын варлығы вә гурулмасы мәсәләсидир.

Теорем 8. *Тутаг ки, A матрисинин характеристик әдәдләринин һамысынын һәгиги һиссәси мәнфидир. Онда елә мүсбәт мүәјјән* $\omega(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} x_i x_j$ *квадратик формасы вар ки, онун (6) системинә әсасән төрәмәси, мүәјјән* $\beta > 0$ *әдәди үчүн*

$$\dot{\omega}_{(6)}(x) \leqslant -\beta\omega(x) \tag{16}$$

бәрабәрсизлијини өдәјир.

Исбаты. Мә'лумдур ки, (V фәсил, § 5) (6) системинин $x(0) = \xi$ башланғыч шәртини өдәјән һәллини

$$\varphi(t, \xi) = e^{At}\xi \tag{17}$$

шәклиндә вермәк олар. Ајдындыр ки, $\Phi^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ илә e^{At} матрисинин i-чи сүтунуну ишарә етсәк, бу һәлли

$$\varphi(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Phi^i(t) \tag{18}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Шәртә көрә A матрисинин характеристик әдәдләринин һәгиги һиссәси мәнфи олдуғундан, елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, (9) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\| \varphi(t, \xi) \| < M \| \xi \| e^{-\delta t}, \quad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Она көрә

$$\omega(\xi) = \int_0^\infty \| \varphi(\tau, \xi) \|^2 d\tau \tag{20}$$

интегралы сонлудур. Бу интегралда

$$\| \varphi(t, \xi) \|^2 = (\varphi(t, \xi), \varphi(t, \xi))$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (18) бәрабәрлијинә әсасән

$$\omega(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^\infty (\Phi^i(\tau), \Phi^j(\tau)) d\tau \right) \xi_i \xi_j$$

олур. Бурада

$$\omega_{ij} = \int_0^\infty (\Phi^i(\tau), \Phi^j(\tau)) d\tau, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

ишарә едәк. Ајдындыр ки, алынан $\omega(\xi) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} \xi_i \xi_j$ квадратик формасы мүсбәт мүәјјәндир.

Дикәр тәрәфдән, (17) дүстуруна әсасән

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = e^{At} \varphi(s, \xi) = e^{At} e^{As} \xi = e^{A(t+s)} \xi = \varphi(t + s, \xi)$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\omega(\varphi(t, \xi)) = \int_0^\infty \| \varphi(\tau, \varphi(t, \xi)) \|^2 d\tau = \int_0^\infty \| \varphi(\tau + t, \xi) \|^2 d\tau$$

олар. Бурада $\tau + t = s$ әвәз едиб, алынан

$$\omega(\varphi(t,\xi))=\int_t^\infty \|\varphi(s,\xi)\|^2 ds$$

функсиjасынын $t=0$ нөгтәсиндә төрәмәсини тапаг:

$$\dot{\omega}_{(6)}(\xi)=\frac{d}{dt}\omega(\varphi(t,\xi))|_{t=0}=-\|\varphi(t,\xi)\|^2|_{t=0}=-\|\xi\|^2. \quad (21)$$

Мәркәзи координат башланғычында олан ваһид радиуслу S_1 сферасы үзәриндә $\omega(\xi)$ функсиjасынын минимум вә максимум гиjмәтләрини уjғун олараг μ вә ν илә ишарә едәк. (Аjдындыр ки, $\mu>0$, $\nu>0$). Онда $x\in S_1$ үчүн

$$\mu\leqslant\omega(x)\leqslant\nu \quad (22)$$

олар. Һәр бир ξ нөгтәси үчүн елә λ әдәди вә $x\in S_1$ нөгтәси вар ки, $\xi=\lambda x$. Онда $\|\xi\|^2=\|\lambda x\|^2=|\lambda|^2\|x\|^2=\lambda^2$ олдуғундан, (22) бәрабәрсизлиjинин һәр тәрәфини λ^2-на вурмагла

$$\mu\|\xi\|^2\leqslant\omega(\xi)\leqslant\nu\|\xi\|^2 \quad (23)$$

бәрабәрсизлиjини аларыг. Бурадан алынан

$$-\|\xi\|^2\leqslant-\frac{1}{\nu}\omega(\xi).$$

бәрабәрсизлиjини (21)-дә нәзәрә алсаг,

$$\dot{\omega}_{(6)}(\xi)\leqslant-\frac{1}{\nu}\omega(\xi).$$

Теорем исбат олунду.

Бу теорем көстәрир ки, асимптотик даjаныглы сабит әмсаллы систем үчүн квадратик форма шәклиндә Лjапунов функсиjасы гурмаг олар.

Мисал 3. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-3x_2,\\ \dot{x}_2=2x_1-4x_2\end{cases}$$

системи асимптотик даjаныглыдыр. Онда исбат етдиjимиз теоремә әсасән, системин $\omega(x_1,x_2)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$ шәклиндә Лjапунов функсиjасы вар. Бу квадратик форманын мүсбәт мүәjjән олмасы үчүн $a>0$, $ac-b^2>0$ олмалыдыр. Дикәр тәрәфдән, $\omega(x_1,x_2)$ функсиjасынын системә әсасән төрәмәси

$$\dot{\omega}(x_1,x_2)=2(a+2b)x_1^2+2(2c-3a-3b)x_1x_2-2(3b+4c)x_2^2$$

олдуғундан, $\dot{\omega}(x_1,x_2)$ төрәмәсинин мәнфи мүәjjән олмасы үчүн $2(a+2b)<0$, $-4(a+2b)(3b+4c)-(2c-3a-3b)^2>0$ олмалыдыр.

Беләликлә, $\omega(x_1,x_2)$ функсиjасынын бахылан системин Лjапунов функсиjасы олмасы үчүн a, b, c әмсаллары

$$a>0,\ ac-b^2>0,\ \ 2(a+2b)<0,$$
$$-4(a+2b)(3b+4c)-(2c-3a-3b)^2>0$$

бәрабәрсизликләрини өдәмәлидирләр. Бурадан, хүсуси һалда, $a=1$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=1$ көтүрсәк, $\omega(x_1,x_2)=x_1^2-\frac{4}{3}x_1x_2+x_2^2$ функсиjасы бахылан систем үчүн Лjапунов функсиjасы олар.

§ 4. БИРИНЧИ JАХЫНЛАШМАЛАРА НӘЗӘРӘН ДАJАНЫГЛЫГ ҺАГГЫНДА ЛJАПУНОВ ТЕОРЕМИ

Бу параграфда

$$\dot{x}=Ax+f(t,x) \quad (24)$$

шәклиндә олан системин тривиал һәллинин даjаныглығы араштырылыр. Бурада A сабит матрис, $f(t,x)$ исә $f_i(t,x)$, $i=1, 2,\ldots,n$ компонентләри $G=I\times D$ чохлуғунда кәсилмәз олан вектор-функсиjадыр; $I=\{t_0\leqslant t<+\infty\}$, D исә n өлчүлү Евклид фәзасынын координат башланғычыны өз дахилиндә сахлаjан мәһдуд областдыр. Әлавә олараг фәрз едәҹәjик ки, t-jә нәзәрән I-дә мүнтәзәм олараг,

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}=0 \quad (25)$$

шәрти өдәнир. Хәтти биршинс

$$\dot{x}=Ax \quad (6$$

системинә, (24) геjри-хәтти системинин *биринчи jахынлашмалар системи* деjилир.

Геjд едәк ки,

$$\dot{x}=F(t,x) \quad (26)$$

системиндә $F(t,x)$ вектор-функсиjасы мүәjjән шәртләри өдәдикдә, бу системи (24) шәклиндә системә кәтирмәк олар. Доғрудан да, тутаг ки, $F(t,x)$ вектор-функсиjасы вә $F_x(t,x)$ матрис-функсиjасы G чохлуғунда кәсилмәздирләр, $F(t,0)=0$, $t\in I$, һәм дә $F_x(t,0)=A_1$ сабит матрисдир. Онда Теjлор дүстуруна әсасән

$$F(t,x)=F(t,0)+F_x(t,0)x+F_1(t,x)$$

олдуғундан, (26) системи

$$\dot{x}=A_1x+F_1(t,x).$$

шәклиндә jазыла биләр вә аjдындыр ки, $F_1(t,x)$ вектор-функсиjасы (25) шәртини өдәjир.

Теорем 9. *Тутаг ки, (6) системи асимптотик дајаныглыдыр вә (25) шәрти өдәнир. Онда (24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр.*

Исбаты. (6) системи асимптотик дајаныглы олдуғундан, 8-чи теорәмә әсасән елә мүсбәт мүәјјән $\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} x_i x_j$ квадратик формасы вардыр ки, онун (6) системинә әсасән төрәмәси (16) бәрабәрсизлијини өдәјир.

Көстәрәк ки, $\omega(x)$ квадратик формасы һәм дә (24) системи үчүн Љапунов функсијасыдыр. Бу форманын (24) системинә әсасән төрәмәси, (16) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\dot{\omega}_{(24)}(x) = \dot{\omega}_{(6)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} f_i(t, x) \leqslant -$$

$$-\beta\omega(x) + (\operatorname{grad} \omega(x), f(t, x)) \tag{27}$$

шәртини өдәјир; бурада

$$\operatorname{grad} \omega(x) = \left\{\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_n}\right\}.$$

Дикәр тәрәфдән, $\frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ төрәмәләри $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән хәтти форма олдуғундан

$$\| \operatorname{grad} \omega(x) \| \leqslant l \| x \|, \quad l = \text{const} > 0.$$

Онда (23) бәрабәрсизликләринә әсасән

$$\| \operatorname{grad} \omega(x) \| < \frac{l}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\omega(x)}. \tag{28}$$

Јухарыда исбат едилән леммаја әсасән, кифајәт гәдәр ки-
чик $b > 0$ әдәди үчүн $\omega(x) \leqslant b$ шәртини өдәјән x нөгтәләр
чохлуғу, n өлчүлү Евклид фәзасынын координат башланғы-
чыны дахилиндә сахлајан гапалы, мәһдуд област олур. Бу
гапалы областы Δ_b илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, b әдәдини
кичик көтүрсәк, $\Delta_b \subset D$ олар. Белә b-ләр үчүн $f(t, x)$ век-
тор-функсијасы $I \times \Delta_b$ чохлуғунда кәсилмәз олдуғундан вә
(25) шәртини өдәдијиндән, елә мүсбәт, монотон артан вә
$\lim_{r \to 0} \Omega(r) = 0$ шәртини өдәјән $\Omega(r)$ функсијасы вардыр ки, (VI
фәсил, лемма 1) $(t, x) \in I \times \Delta_b$ олдугда

$$\| f(t, x) \| \leqslant \Omega(\| x \|) \| x \| \tag{29}$$

мүнасибәти өдәнир. Бурадан, (23) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\| f(t, x) \| < \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\omega(x)}\, \Omega\left(\sqrt{\frac{\omega(x)}{\mu}}\right).$$

Бу бәрабәрсизлијә вә (28) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$| (\operatorname{grad} \omega(x), f(t, x)) | \leqslant \frac{l}{\mu} \omega(x)\, \Omega\left(\sqrt{\frac{\omega(x)}{\mu}}\right)$$

олар. Онда (27) бәрабәрсизлијини

$$\dot{\omega}_{(24)}(x) \leqslant -\beta \omega(x) + \frac{l}{\mu} \omega(x)\, \Omega\left(\sqrt{\frac{\omega(x)}{\mu}}\right)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Верилмиш $\beta > 0$ әдәдинә көрә $0 < c \leqslant b$ шәртини өдәјән елә c әдәди сечәк ки, $\frac{l}{\mu} \Omega\left(\sqrt{\frac{c}{\mu}}\right) \leqslant \frac{\beta}{2}$ олсун. Онда $\omega(x) \leqslant c$ бәрабәрсизлији илә тә'јин олунан гапалы, мәһдуд Δ_c областында

$$\dot{\omega}_{(24)}(x) \leqslant -\beta\omega(x) + \frac{l}{\mu} \Omega\left(\sqrt{\frac{c}{\mu}}\right) \omega(x) \leqslant -\frac{\beta}{2} \omega(x) \tag{30}$$

бәрабәрсизлији өдәнәр.

Алынан бәрабәрсизлик көстәрир ки, мүсбәт мүәјјән $\omega(x)$
квадратик формасынын (24) системинә әсасән төрәмәси мән-
фи мүәјјәндир. Бурадан да, 6-чы теорема әсасән алырыг ки,
(24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныг-
лыдыр.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + (tx_2 - x_1)^2 + t^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2tx_2 - (x_2 + 1)^2 + 2t + 2 \end{cases} \tag{31}$$

системинин $x_1 = t^2$, $x_2 = t$ һәллинин дајаныглы олуб-олмамасыны јохлајаг. Бу системдә

$$x_1 = y_1 + t^2, \quad x_2 = y_2 + t$$

әвәзләмәси апарсаг, бахылан һәллин дајаныглығы мәсәләси

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2 + (ty_2 - y_1)^2, \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 - y_2^2 \end{cases} \tag{32}$$

системинин $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығы-
ны арашдырмаға кәтирилир. Алынан систем (24) шәклиндә-
дир вә (25) шәрти өдәнир. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,
үјғун

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2, \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

хәтти биринҹи систем асимптотик дајаныглыдыр. Онда 9-чу
теорема әсасән, (32) системинин $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ таразлыг вәзиј-
јәти вә демәли, (31) системинин $x_1 = t^2$, $x_2 = t$ һәлли асимп-
тотик дајаныглыдыр.

Тутаг ки,

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (1)$$

системи верилмишдир; бурада $f(t, x)$ вектор-функсијасы 1-чи параграфда гојулан шәртләри өдәјир вә $f(t, 0) \equiv 0$ $t \in I$. Бу системин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсызлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 10 (*Четајев*). *Тутаг ки, мәркәзи координат башланғычында вә радиусу $\varepsilon_0 > 0$ олан гапалы $\overline{H}_{\varepsilon_0} \subset D$ күрәсиндә кәсилмәз диференсиалланан $w(x)$ функсијасы вә $U \subset H_{\varepsilon_0}$ областы вар ки,*

1) $x = 0$ нөгтәси U областынын сәрһәддиндә јерләшир вә бу областда $w(x) > 0$;

2) $\dot{w}_{(1)}(x) = (\operatorname{grad} w(x), f(t, x)) > 0$, $t \in I$, $x \in U$ белә ки, һәр бир $\alpha > 0$ әдәдинә көрә елә $\beta > 0$ әдәди вар ки, $w(x) \geqslant \alpha$ олдугда, $\dot{w}_{(1)}(x) \geqslant \beta$ олур;

3) U областынын H_{ε_0} күрәсиндә јерләшән сәрһәд нөгтәләри үчүн $w(x) = 0$.

Онда (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Исбаты. Кифајәт гәдәр кичик $\delta > 0$ әдәди көтүрүб, $0 < \|\xi\| < \delta$ шәртини өдәјән $\xi \in U$ үчүн (1) системинин $x = \varphi(t, \xi)$ һәллинә бахаг. Онда мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $\varphi(t, \xi) \in U$, $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Теоремин 2-чи шәртинә әсасән $[t_0, t_0 + h]$ парчасында

$$\Phi(t) = w(\varphi(t, \xi)) > 0 \text{ вә } \dot{\Phi}(t) = \dot{w}(\varphi(t, \xi)) > 0$$

олур. Демәли, $\Phi(t)$ функсијасы һәмин парчада чидди монотон артандыр. Она көрә дә $\varphi(t, \xi) \in U$ шәртини өдәјән бүтүн $t \geqslant t_0$ нөгтәләри үчүн

$$\Phi(t) = w(\varphi(t, \xi)) \geqslant w(\varphi(t_0, \xi)) = w(\xi) = \alpha > 0, \qquad (33)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{w}(\varphi(t, \xi)) \geqslant \beta > 0. \qquad (34)$$

Ахырынчы бәрабәрсизлији t_0-дан t-јә гәдәр интеграллламагла аларыг ки,

$$w(\varphi(t, \xi)) \geqslant w(\varphi(t_0, \xi)) + \beta(t - t_0), \quad t \geqslant t_0.$$

Бурадан ајдындыр ки, $\varphi(t, \xi) \in U$, $t \in I$ оларса, t артдыгча $\Phi(t) = w(\varphi(t, \xi))$ функсијасы гејри-мәһдуд артар. Бу исә $w(x)$ функсијасынын гапалы, мәһдуд $\overline{H}_{\varepsilon_0}$ күрәсиндә мәһдудлуғуна зиддир.

Демәли, истәнилән $t \geqslant t_0$ үчүн $\varphi(t, \xi) \in U$ ола билмәз. Она көрә дә елә $t_1 > t_0$ аны вар ки, $t \in [t_0, t_1)$ үчүн $\varphi(t, \xi) \in U$ вә $\varphi(t_1, \xi)$ нөгтәси U областынын сәрһәддиндә јерләшир. Хүсуси һалда, $\varphi(t_1, \xi) \in H_{\varepsilon_0}$ оларса, теоремин 3-чү шәртинә әсасән

$$w(\varphi(t_1, \xi)) = 0 \qquad (35)$$

олмалыдыр. Дикәр тәрәфдән, (33) бәрабәрсизлијиндән

$$w(\varphi(t_1, \xi)) \geqslant \alpha > 0$$

олдуғу алыныр. Бу исә (35) шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\varphi(t_1, \xi)$ нөгтәси H_{ε_0} күрәсинин дахилиндә јерләшә билмәз. Демәли, $\|\varphi(t_1, \xi)\| \geqslant \varepsilon_0$ олмалыдыр. Бурадан алыныр ки, (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр. Теорем исбат олунду.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2^2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + x_2^3 \end{cases} \qquad (36)$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсыз олдуғуну көстәрәк. Бу систем үчүн $w(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ функсијасына бахаг. U областы олараг $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ дүз хәтләри арасында галан вә $x_1 > 0$ олан нөгтәләр чохлуғуну көтүрәк. Ајдындыр ки, (0, 0) нөгтәси U областынын сәрһәд нөгтәсидир вә ихтијари $(x_1, x_2) \in U$ үчүн $w(x_1, x_2) > 0$ олур. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\dot{w}_{(36)}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)\, w(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in U$. Бундан башга $w(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ олдуғундан, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн, U областынын H_ε күрәсинә дахил олан (x_1, x_2) сәрһәд нөгтәләриндә $w(x_1, x_2) = 0$.

Дикәр тәрәфдән, $\dot{w}_{(36)}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)\, w(x_1, x_2)$ ифадәсиндән ајдындыр ки, истәнилән $\alpha > 0$ әдәдинә көрә $w(x_1, x_2) \geqslant \alpha$ олдугда $\dot{w}_{(36)}(x_1, x_2) \geqslant 2(x_1^2 + x_2^2)\alpha \geqslant 2\alpha^2$ олур.

Демәли, Четајев теореминин бүтүн шәртләри өдәнир. Она көрә дә (36) системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Биринчи јахынлашмалара нәзәрән дајаныгсызлығы арашдырмаг үчүн

$$\dot{x} = Ax + f(t, x) \qquad (24)$$

системинә бахаг. Бурада A сабит матрисдир, $f(t, x)$ вектор-функсијасы исә t-јә нәзәрән I-да мүнтәзәм олараг

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \qquad (25)$$

шәртини өдәјир.

Теорем 11. *Тутаг ки, A матрисинин характеристик әдәдләриндән һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мүсбәтдир вә (25) шәрти өдәнир. Онда (24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.*

Исбаты. Мә'лумдур ки, J матриси A матрисинин каноник Жордан формасы исә, елә гејри-мәхсуси P матриси вар ки,

$P^{-1}AP = J$ (бах. V фəсил, § 1). J матрисинин һүчрəлəрини $J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \ldots, J_{m_\kappa}(\lambda_\kappa), J_{m_{\kappa+1}}(\lambda_{\kappa+1}), \ldots, J_{m_l}(\lambda_l)$ илə ишарə едəк вə тутаг ки, $\mathrm{Re}\,\lambda_r = \alpha_r > 0$, $r = 1, 2, \ldots, \kappa$ $(1 \leqslant \kappa < l)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_r = \alpha_r \leqslant 0$, $r = \kappa + 1, \ldots, l$.

Ајдындыр ки (24) системиндə $x = Py$ əвəзлəмəси апарсаг,

$$\dot y = Jy + P^{-1}f(t, Py)$$

системини аларыг.

Ихтијари $\gamma > 0$ əдəди үчүн баш диагонал елементлəри $1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}$ олан Q диагонал матриси көтүрəрəк сонунчу системдə $y = Qz$ əвəзлəмəси апараг. Бу заман

$$\dot z = Q^{-1}JQz + Q^{-1}P^{-1}f(t, PQz)$$

системини вə ја компонентлəрлə јазсаг,

$$\begin{cases} \dot z_1 = \lambda_1 z_1 + \gamma z_2 + g_1(t, z), \\ \dot z_2 = \lambda_1 z_2 + \gamma z_3 + g_2(t, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot z_{m_1} = \lambda_1 z_{m_1} + g_{m_1}(t, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot z_{n-m_l+1} = \lambda_l z_{n-m_l+1} + \gamma z_{n-m_l+2} + g_{n-m_l+1}(t, z), \\ \dot z_{n-m_l+2} = \lambda_l z_{n-m_l+2} + \gamma z_{n-m_l+3} + g_{n-m_l+2}(t, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot z_n = \lambda_l z_n + g_n(t, z) \end{cases} \quad (37)$$

системини аларыг, бурада $g_1(t, z), g_2(t, z), \ldots, g_n(t, z)$ функсијалары $g(t, z) = Q^{-1}P^{-1}f(t, PQz)$ вектор-функсијасынын компонентлəридир.

Гејд едəк ки, һəр һансы һүчрə, мəсəлəн, $J_{m_1}(\lambda_1)$ бир елементли олдугда, (37) системиндə она ујғун анчаг бир

$$\dot z_1 = \lambda_1 z_1 + g_1(t, z)$$

тəнлији вар.

Апарылан əвəзлəмəлəрдəн ајдындыр ки, P вə Q матрислəри гејри-мəхсуси матрислəр олдуғундан, (24) системинин $x = 0$ таразлыг вəзијјəтинин дајаныглығы мəсəлəси, (37) системинин $z = 0$ таразлыг вəзијјəтинин дајаныглығы мəсəлəсинə еквивалентдир.

Гејд едəк ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ əдəдлəри, үмумијјəтлə, комплекс əдəдлəр олдуғундан, (37) системинин һəллəри, үмумијјəтлə, комплекс функсијалардыр. Она көрə $z_j = u_j + iv_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ гəбул етсəк, $|z_j|^2 = z_j \bar z_j = u_j^2 + v_j^2$ олар.

Индн $p = m_1 + m_2 + \cdots + m_\kappa$ ишарə едиб, $v(z) = \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2$ квадратик формасыны дүзəлдəк вə онун (37) системинə əсасəн төрəмəсини һесаблајаг:

$$\dot v_{(37)}(z) = \sum_{j=1}^{p} (\dot z_j \bar z_j + z_j \dot{\bar z}_j) - \sum_{j=p+1}^{n} (\dot z_j \bar z_j + z_j \dot{\bar z}_j) =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{p} \alpha_j |z_j|^2 - 2\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j |z_j|^2 + \gamma \sum_{j=1}^{p-1} (z_j \bar z_{j+1} + \bar z_j z_{j+1}) -$$

$$- \gamma \sum_{j=p+1}^{n-1} (z_j \bar z_{j+1} + \bar z_j z_{j+1}) + \sum_{j=1}^{p} (\bar z_j g_j(t, z) + z_j \bar g_j(t, z)) -$$

$$- \sum_{j=p+1}^{n} (\bar z_j g_j(t, z) + z_j \bar g_j(t, z)). \quad (38)$$

Гејд едəк ки, $\dot{\bar z}_j$ төрəмəсини тапмаг үчүн (37) системинин ујғун тəнлијиндəн комплекс гошма тəнлијə кечмəк лазымдыр.

$|z_j \bar z_{j+1}| \leqslant \frac{1}{2}(|z_j|^2 + |z_{j+1}|^2)$ бəрабəрсизлијини нəзəрə алсаг,

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1} (z_j \bar z_{j+1} + \bar z_j z_{j+1})\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} (|z_j|^2 + |z_{j+1}|^2),$$

$$\left|\sum_{j=p+1}^{n-1} (z_j \bar z_{j+1} + \bar z_j z_{j+1})\right| \leqslant \sum_{j=p+1}^{n-1} (|z_j|^2 + |z_{j+1}|^2).$$

Дикəр тəрəфдəн, (25) шəрти өдəндијиндəн, (29) бəрабəрсизлијинə əсасəн асанлыгла көстəрмəк олар ки,

$$\| g(t, z) \| = \| Q^{-1}P^{-1}f(t, PQz) \| \leqslant \Omega_1(\| z \|) \| z \|.$$

Бурада $\Omega_1(r)$ функсијасы $r > 0$ областында монотон артан вə $\lim_{r \to +0} \Omega_1(r) = 0$ шəртини өдəјəн функсијадыр. Бу бəрабəрсизлијə əсасəн асанлыгла көстəрмəк олар ки,

$$\left|\sum_{j=1}^{p} (\bar z_j g_j(t, z) + z_j \bar g_j(t, z)) - \sum_{j=p+1}^{n} (\bar z_j g_j(t, z) + z_j \bar g_j(t, z))\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} |z_j| \, |g_j(t, z)| \leqslant 2n\Omega_1(\| z \|) \|z\|^2.$$

Алынмыш гијмəтлəри (38) бəрабəрлијиндə нəзəрə алсаг,

$$\dot v_{(37)}(z) \geqslant 2\sum_{j=1}^{p} (\alpha_j - 2\gamma) |z_j|^2 -$$

$$- 2\sum_{j=p+1}^{n} (\alpha_j + 2\gamma) |z_j|^2 - 2n\Omega_1(\| z \|) \| z \|^2$$

олар. Бу бәрабәрсизлиіи дә, $\|z\|^2 - \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 + \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2$ олдуғундан,

$$\dot{\omega}_{(37)}(z) \geqslant 2\left\{\sum_{j=1}^{p} [\alpha_j - 2\gamma - n\Omega_1(\|z\|)] \|z_j\|^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=p+1}^{n} [\alpha_j + 2\gamma + n\Omega_1(\|z\|)] |z_j|^2\right\}. \qquad (39)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Тутаг ки, $\varepsilon > 0$ әдәди $\varepsilon < \frac{1}{6} \min\limits_{1 \leq j \leq n} \{\alpha_j\}$ шәртини өдәјир вә јухарыда ихтијари көтүрүлән γ әдәдини елә сечәк ки, $0 < \gamma < \varepsilon$ олсун.

Дикәр тәрәфдән, $\lim\limits_{r \to +0} \Omega_1(r) = 0$ олдуғундан, верилмиш ε әдәдинә көрә елә $\delta > 0$ әдәди тапмаг олар ки, $\|z\| < \delta$ олдуғда $n\Omega_1(\|z\|) < \varepsilon$ олар. Онда (39) бәрабәрсизлијиндән

$$\dot{\omega}_{(37)}(z) \geqslant 2\left\{\sum_{j=1}^{p} (\alpha_j - 3\varepsilon) |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} (\alpha_j + 3\varepsilon) |z_j|^2\right\}$$

бәрабәрсизлији алынар. Бурадан да, ε-нун сечилмә гајдасына көрә $\alpha_j - 3\varepsilon > 3\varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, p$ вә $\alpha_j < 0$, $j = p+1, \ldots, n$ олдуғундан алырыг ки,

$$\dot{\omega}_{(37)}(z) \geqslant 6\varepsilon\left\{\sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2\right\} - 6\varepsilon\omega(z).$$

Демәли, $\omega(z)$ квадратик формасынын (37) системинә әсасән төрәмәси

$$\dot{\omega}_{(37)}(z) \geqslant 6\varepsilon\omega(z) \qquad (40)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир.

Сечилмиш $\delta > 0$ әдәдинә көрә H_δ күрәси илә $\sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2 > 0$ шәртини өдәјән z-ләр чохлуғунун кәсишмәсини U илә ишарә едәк.

Ајдындыр ки, $z = 0$ нөгтәси U областынын сәрһәд нөгтәсидир вә U областында $\omega(z) > 0$. Онда (40) бәрабәрсизлијинә әсасән U областында $\dot{\omega}_{(37)}(z) > 0$. Дикәр тәрәфдән, U областынын гурулма гајдасындан ајдындыр ки, бу областын H_δ күрәси дахилиндә јерләшән сәрһәд нөгтәләриндә $\omega(z) = 0$.

Беләликлә, $\omega(z)$ квадратик формасы вә U областы үчүн Четајев теореминин шәртләри өдәнир. Демәли, (37) системинин $z = 0$ таразлыг вәзијјәти дајанығсыздыр.

Гејд едәк ки, теореми Четајев теореминдән истифадә етмәдән ашағыдакы гајда илә дә исбат етмәк олар.

Сечилмиш $\delta > 0$ әдәдинә көрә, $0 < \delta_1 < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари δ_1 әдәди көтүрәк вә $\|\xi\| < \delta_1$, $\sum_{j=1}^{p} |\xi_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |\xi_j|^2 > 0$ шәртләрини өдәјән ξ үчүн $z(t, \xi)$ һәллинә бахаг. Онда елә $h > 0$ әдәди вар ки, $t \in [t_0, t_0 + h]$ олдугда $\|z(t, \xi)\| < \delta$ олар. Она көрә дә, (40) бәрабәрсизлијинә әсасән $[t_0, t_0 + h]$ парчасында

$$\dot{\omega}(z(t, \xi)) \geqslant 6\varepsilon\omega(z(t, \xi))$$

бәрабәрсизлији өдәнәр. Бурадан да, $e^{-6\varepsilon t}$-јә вуруб t_0-дан t-јә гәдәр интегралламагла

$$\omega(z(t, \xi)) \geqslant \omega(\xi) e^{6\varepsilon(t - t_0)}$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Лакин $\|z(t, \xi)\|^2 \geqslant \omega(z(t, \xi))$ олдуғундан, бурадан алырыг ки, $\|z(t, \xi)\| < \delta$ бәрабәрсизлији истәнилән $t > t_0$ үчүн өдәнә билмәз. Јә'ни мүәјјән $t_1 > t_0$ аны вардыр ки, $t = t_1$ олдугда $\|z(t, \xi)\| \geqslant \delta$ олур. Бу исә көстәрир ки, (37) системинин $z = 0$ һәлли дајанығсыздыр.

Мисал 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + t x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + x_1^2 x_2 \sin t \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајанығлығыны араштыраг.

Уйғун биринчи јахынлашмалар системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

шәклиндәдир вә бу системин матрисинин характеристик әдәдләри $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, јә'ни характеристик әдәдләрдән бири мүсбәтдир.

Бахылан системдә $f(t, x)$ вектор-функсијасынын компонентләри $f_1(t, x) = t x_1 x_2^2$, $f_2(t, x) = x_1^2 x_2 \sin t$ шәклиндәдир вә асанлыгла јохламаг олар ки, (25) шәрти өдәнир. Онда теоремә әсасән алырыг ки, бахылан системин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти дајанығсыздыр.

Теорем 12. *Тутаг ки, A матрисинин характеристик әдәдләринин һамысынын һәгиги һиссәси мүсбәтдир вә $f(t, x)$ вектор-функсијасы (25) шәртини өдәјир. Онда (24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти тамам дајанығсыздыр.*

Исбаты A матрисинин характеристик әдәдләрини $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ $(\alpha_j > 0)$ илә ишарә едәк. Онда $-\lambda_j = -\alpha_j - i\beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ әдәдләри $-A$ матрисинин характеристик әдәдләри олдуғундан, 9-чу теоремә әсасән

$$\dot{x} = -Ax - f(t, x) \tag{45}$$

системи үчүн елә мүсбәт мүәјјән $\omega(x)$ квадратик формасы вә $c > 0$ әдәди вар ки, $x \in \Delta_c$ олдугда

$$\dot{\omega}_{(45)}(x) \leqslant -2\alpha\omega(x) \quad (\alpha > 0)$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Бу заман һәм дә (45) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглы олур.

Дикәр тәрәфдән,

$$\dot{\omega}_{(24)}(x) = -\dot{\omega}_{(45)}(x)$$

олдуғундан, $x \in \Delta_c$ нөгтәләри үчүн

$$\dot{\omega}_{(24)}(x) \geqslant 2\alpha\omega(x) \tag{46}$$

олур.

Инди $0 < \|\xi\| < c$ шәртини өдәјән ξ-ләр үчүн (24) системинин $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләринә бахаг. Онда $\|\varphi(t, \xi)\| < c$ шәртини өдәјән t-ләр $(t \geqslant t_0)$ үчүн, (46) бәрабәрсизлијинә әсасән, $\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi))$ функсијасынын төрәмәси

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\omega}(\varphi(t, \xi)) \geqslant 2\alpha\Phi(t)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бурадан, $\|\varphi(t, \xi)\| < c$ шәртини өдәјән $t \geqslant t_0$ үчүн

$$\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi)) \geqslant \omega(\xi)e^{2\alpha(t-t_0)}$$

бәрабәрсизлији алыныр.

Бу бәрабәрсизликдән (23)-ә әсасән алырыг ки,

$$\|\varphi(t, \xi)\|^2 \geqslant \frac{1}{\gamma}\omega(\varphi(t, \xi)) \geqslant \frac{1}{\gamma}\omega(\xi)e^{2\alpha(t-t_0)}$$

вә ја

$$\|\varphi(t, \xi)\| \geqslant \sqrt{\frac{1}{\gamma}\omega(\xi)}\, e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

Алынмыш бәрабәрсизликдән ајдындыр ки, $0 < \|\xi\| < c$ шәртини өдәјән ξ үчүн елә $T = T(\xi)$ аны вар ки, $t \geqslant T(\xi)$ олдугда

$$\|\varphi(t, \xi)\| \geqslant c.$$

Бу исә $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин тамам дајаныгсызлығы демәкдир.

Мисал 3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + tx_1^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_1^2 x_2^2 \end{cases}$$

системиндә биринчи јахынлашмалар системинин матрисинин характеристик әдәдләри $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$ олдуғундан, бахылан системин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, таразлыг вәзијјәти тамам дајаныгсыздыр.

Гејд. (6) системи јалныз дајаныглы олдугда, (24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны биринчи јахынлашмалар үсулу илә арашдыраркән јухарыда исбат етдијимиз теоремләр јарамыр. Бу заман (24) системинин $x = 0$ һәлли дајаныглы вә ја дајаныгсыз ола биләр. Буну ашағыдакы мисалларла изаһ едәк.

Мисал 4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_2^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_1^3 \end{cases} \tag{47}$$

системинә ујғун биринчи јахынлашмалар системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \tag{48}$$

олур. Асанлыгла јохламаг олар ки, (48) системи дајаныглыдыр, лакин асимптотик дајаныглы дејил.

Мүсбәт мүәјјән $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 + x_2^4$ функсијасынын (47) системинә әсасән төрәмәси $\dot{\omega}_{(47)}(x_1, x_2) \equiv 0$ олдуғундан, 5-чи теоремә әсасән, бу системин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр.

Мисал 5. Ајдындыр ки, (48) системи һәм дә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{49}$$

системинин биринчи јахынлашмалар системидир. Мүсбәт мүәјјән $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функсијасынын (49) системинә әсасән төрәмәси $\dot{\omega}_{(49)}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)^2$ мүсбәт мүәјјән олдуғундан, (48) системинин дајаныглы олмасына бахмајараг, Четајев теореминә әсасән (49) системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Бу мисаллар көстәрир ки, верилмиш системин таразлыг вәзијјәтини арашдырмаг үчүн Лјапунов функсијалары үсулу даһа үмумидир.

Чалышмалар

1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 - 3x_3, \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - 2{,}4x_3, \\ \dot{x}_3 = 8x_1 - 6x_3 \end{cases}$$

системинин дајаныглығыны арашдырын.

Чаваб: Асимптотик дајанығлы.

2. α, β-нын һансы гијмәтләриндә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - x_2 - \alpha x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_1 - \alpha x_2 - x_3 \end{cases}$$

системи асимптотик дајанығлыдыр.

Чаваб: $1 + \beta^2 - 2\alpha^2 > 0$.

3. Ашағыдакы мисалларда тривиал һәллин дајанығлығыны Гурвич вә ја Михајлов шәртинин көмәклији илә көстәрин:

а) $x^{IV} + 7\dddot{x} + 12\ddot{x} + 23\dot{x} + 10x = 0$,

б) $x^{IV} + 2\dddot{x} + 6\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = 0$,

в) $x^{V} + x^{IV} + 10\dddot{x} + 8\ddot{x} + 24\dot{x} + 15x = 0$.

4. a вә b әдәдләринин һансы гијмәтләриндә

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

тәнлијинин тривиал һәлли асимптотик дајанығлыдыр.

Чаваб: $b > 0$, $3a > b$.

5. $\omega(x_1, x_2) = \frac{17}{4} x_1^2 - \frac{2}{3} x_1 x_2 + \frac{1}{7} x_2^2$ функсијасы васитәсилә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

системинин асимптотик дајанығлы олдуғуну көстәрин.

6. а)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

системи үчүн Лјапунов функсијасы гурун.

б) 8-чи теоремин исбат тәрздәси илә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ x_2 = -x_2 \end{cases}$$

системи үчүн Лјапунов функсијасыны гурун.

Чаваб: $\omega(x_1, x_2) = 0{,}5x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}75x_2^2$.

7. $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функсијасы васитәсилә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 - 6x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 2x_1^2 x_2 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин асимптотик дајанығлығыны арашдырын

8. Биринчи јахынлашмалар үсулу илә ашағыда верилмиш системләрин таразлыг вәзијјәтләринин дајанығлығыны арашдырын:

а)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1x_2 - 7, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1x_2 - 13. \end{cases}$$

Чаваб: (5, 2) дајанығсыз, (− 2, − 5) асимптотик дајанығлы.

б)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + (x_1 - 2x_2)^2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_1x_2. \end{cases}$$

Чаваб: (0, 0) асимптотик дајанығлы, (− 2, − 1) дајанығсыз, (1, 1) дајанығсыз, $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$ асимптотик дајанығлы.

в)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 0{,}5x_2 + (x_1 - 0{,}5x_2)^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_1x_2 - 3. \end{cases}$$

Чаваб: (1,5; 5) асимптотик дајанығлы, (0,5; 1) тамам дајанығсыз, (1,5; 3) дајанығсыз, (− 0,5; 1) дајанығсыз.

9.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + (x_2 + 2t)\sin(x_1 - t) + \\ \qquad + (x_1 - t)^2 \cos(x_2 + 2t) - 8t + 1, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 + (x_2 + 2t)^2 - 10t - 2 \end{cases}$$

системинин $x_1 = t$, $x_2 = -2t$ һәллинин асимптотик дајанығлы олдуғуну биринчи јахынлашмалар үсулу илә көстәрин

10. a параметринин һансы гијмәтләриндә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1 - ax_2} - 1, \\ \dot{x}_2 = ax_1 - 2x_2 - x_1^2 + 2x_2^2 \end{cases}$$

системинин (0, 0) таразлыг вәзијјәти асимптотик дајанығлыдыр?

Чаваб: $a^2 > 2$.

11. $\omega(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$ функсијасынын көмәји илә

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^3 x_2^2 + x_1^5, \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 x_2^3 + x_2^5 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајанығсыз олдуғуну көстәрин.

12. Биринчи јахынлашмалар үсулу вә $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функсијасынын көмәји илә

$$\begin{cases} \dot x_1 = 2x_2 + 3x_1^2(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot x_2 = -2x_1 + 3x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсыз олдуғуну көстәрин.

13. Биринчи јахынлашмалар үсулу вә $v(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^6 + x_2^2 + x_2^6$ функсијасынын көмәји илә

$$\begin{cases} \dot x_1 = 2x_2 + 6x_2^5, \\ \dot x_2 = -2x_1 - 6x_1^5 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглы олдуғуну көстәрин.

VIII ФӘСИЛ

ИКИТӘРТИБЛИ ТӘНЛИКЛӘР НӘЗӘРИЈЈӘСИНИН БӘ'ЗИ МӘСӘЛӘЛӘРИ

Бу фәсилдә әввәлҹә хәтти тәнликләрин һәлләринин бә'зи хассәләри, онлар үчүн сәрһәд мәсәләләри, Грин функсијасы өјрәнилир, мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында теоремләр исбат олунур.

Сонра исә садә гејри-хәтти сәрһәд мәсәләси вә Бессел тәнлији һаггында гыса мә'лумат верилир.

§ 1 ИКИТӘРТИБЛИ ХӘТТИ БИРҸИНС ТӘНЛИЈИН САДӘ ФОРМАЛАРЫ

Әввәлҹә үмуми шәкилдә верилмиш икитәртибли

$$p_0(t)\ddot x + p_1(t)\dot x + p_2(t)x = 0 \tag{1}$$

хәтти бирҹинс тәнлијини араштыраг.

Исбат олунмуш варлыг вә јеканәлик теоремләринә әсасән (IV фәсил, §§ 5, 6) алырыг ки, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ функсијалары верилмиш $t = t_0$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында кәсилмәздирсә вә $p_0(t_0) \neq 0$ исә, (1) тәнлијинин

$$x(t_0) = x_0, \ \dot x(t_0) = x_1$$

башланғыч шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Тутаг ки $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ функсијалары $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир вә $p_0(t) \neq 0$ Онда (1) тәнлијинин һәлләри һәмин парчада тә'јин олунуб.

1. (1) тәнлији ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирҹинс олдуғундан, $x = xu$ әвәзләмәси илә онун тәртибини азалдыб (IV фәсил, § 4)

$$p_0(t)\dot u + p_0(t)u^2 + p_1(t)u + p_2(t) = 0$$

Риккати тәнлијинә кәтирмәк олар.

Гејд едәк ки,

$$\dot y = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Риккати тәнлијинин дә $P(t)$, $\dot P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ функсијалары кәсилмәз вә $P(t) \neq 0$ олдугда

$$y = -\frac{1}{P(t)}\frac{\dot x}{x}$$

әвәзләмәси илә

$$P(t)\ddot x - [\dot P(t) + P(t)Q(t)]\dot x + R(t)P^2(t)x = 0$$

шәклиндә олан икитәртибли хәтти бирҹинс тәнлијә кәтирмәк олар.

2. Тутаг ки, (1) тәнлијиндә $p_0(t)$, $p_1(t)$ әмсалларынын кәсилмәз төрәмәси вар. Тәнликдә $x = \alpha(t)y$ әвәзләмәси апараг вә $\alpha(t)$ функсијасыны елә сечәк ки, алынан јени тәнликдә $\dot y$-ин әмсалы сыфыр олсун. Бу заман $\alpha(t)$-јә нәзәрән

$$2p_0(t)\dot\alpha + p_1(t)\alpha = 0$$

тәнлији алынып. Онун

$$\alpha(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt\right)$$

һәллини көтүрсәк, (1) тәнлији

$$\ddot y + Q(t)y = 0 \tag{2}$$

шәклинә дүшәр; бурада

$$Q(t) = \frac{2p_0(t)\dot p_1(t) - 2\dot p_0(t)p_1(t) - p_1^2(t)}{4p_0^2(t)} + \frac{p_2(t)}{p_0(t)}.$$

3. Ајдындыр ки, (1) тәнлијиндә $p_1(t) \equiv \dot p_0(t)$ оларса, ону

$$\frac{d}{dt}\left(p_0(t)\frac{dx}{dt}\right) + p_2(t)x = 0 \tag{3}$$

өз-өзүнә гошма шәкилдә јазмаг олар.

Көстәрәк ки, (1) шәклиндә олан тәнлији һәмишә өз-өзүнә гошма шәклә кәтирмәк олар. Бунун үчүн (1) тәнлијинин һәр тәрәфини һәләлик намә'лум олан $\mu = \mu(t)$ функсијасына вураг:

$$\mu(t)p_0(t)\ddot x + \mu(t)p_1(t)\dot x + \mu(t)p_2(t)x = 0,$$

Ајдындыр ки, $\mu(t)$ функсијасыны

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)p_0(t))=\mu(t)p_1(t)$$

шәртиндән сечсәк, алынмыш тәнлик (3) шәклиндә олар Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$\mu(t)=\frac{1}{p_0(t)}\exp\left(\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right)$$

функсијасы бу шәрти өдәјир. Онда үјғун өз-өзүнә гошма тәнлик

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right)+q(t)x=0 \qquad (4)$$

олар; бурада

$$p(t)=\exp\left(\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right),\quad q(t)=\frac{p_2(t)}{p_0(t)}\exp\left(\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right). \qquad (5)$$

Беләликлә, (1) тәнлијини һәмишә (4) тәнлијинә кәтирмәк олар вә бу заман $p(t)>0$. Өз-өзүнә гошма (4) тәнлијиндә t сәрбәст дәјишәнин јерини

$$\tau=\int_0^t\frac{ds}{p(s)} \qquad (6)$$

дәјишәни илә әвәз едәк. $p(t)>0$ олдуғундан, τ дәјишәни t-нин чидди монотон артан функсијасы олур Буна көрә дә (6) әвәзләмәси илә верилән функсијанын јеканә $t=\varphi(\tau)$ тәрси вар. Онда $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{p(t)}\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{p(t)}\frac{d^2x}{d\tau^2}$ вә (4) тәнлији

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+Q(\tau)x=0 \qquad (7)$$

шәклинә дүшәр; бурада

$$Q(\tau)=p(t)q(t)=p(\varphi(\tau))q(\varphi(\tau)).$$

(6) әвәзләмәсинә *Лиувилл әвәзләмәси* дејилир.

Ашағыда (1) тәнлији үчүн араmдырылан мәсәләләрин хүсусијјәтләриндән асылы олараг бу тәнлији (2), (4), (7) каноник шәкилләриндән биринә баxылыр.

§ 2 ҺӘЛЛИН ХАССӘЛӘРИ

Икитәртибли хәтти бирчинс тәнлијин тривиал олмајан һәлләринин бә'зи хассәләри илә таныш олаг

Теорем 1. *$x=x_1(t)$ функсијасы (1) тәнлијинин t_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилән һәллидирсә, һәмин тәнлијин бу нөгтәдә сыфра чеврилән һәр бир $x=x(t)$ һәлли*

$$x(t)=cx_1(t)$$

шәклиндәдир; бурада c сабитдир.

Исбаты. $x_1(t)$ вә $x(t)$ һәлләри t_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилдијиндән, бу һәлләрдән дүзәлмиш

$$W(t)=\begin{vmatrix}x(t) & x_1(t)\\ \dot x(t) & \dot x_1(t)\end{vmatrix}$$

Вронски детерминанты һәмин нөгтәдә сыфра чеврилир Онда Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуруна әсасән $W(t)=0$, $t\in[\alpha,\beta]$ олур вә бурадан да алыныр ки, $x_1(t)$, $x(t)$ һәлләри хәтти асылыдыр.

Теорем 2. *(1) тәнлијинин һәлләринин сыфырлары садәдир, јә'ни тәнлијин һәр һансы $x(t)$ һәлли үчүн $x(t_0)=0$ исә, $\dot x(t_0)\neq 0$.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, һәр һансы $x(t)$ һәлли $x(t_0)=0$, $\dot x(t_0)=0$ шәртләрини өдәјир. Тәнлијин тривиал һәлли дә һәмин шәртләри өдәдијиндән, һәллин јеканәлијинә әсасән, $x(t)\equiv 0$ олар. Бу исә $x(t)$-нин тривиал олмајан һәлл олмасына зиддир

Теорем 3. *(1) тәнлијинин һәлләринин анчаг изолә едилмиш (тәчрид олунмуш) сыфырлары ола биләр, јә'ни $t=t_0$ нөгтәси һәр һансы $x=x(t)$ һәллинин сыфыры исә, елә $\delta>0$ әдәди вар ки, $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ интервалында һәмин һәллин t_0-дан фәргли сыфыры јохдур.*

Исбаты Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $t=t_0$ һәр һансы $x=x(t)$ һәллинин изолә олунмајан сыфырыдыр. Онда мүсбәт, монотон азалан вә сыфра јахынлашан $\{\delta_n\}$ ардычыллығы үчүн $(t_0-\delta_n,\ t_0+\delta_n)$ интервалында $x(t)$ һәллинин t_0-дан фәргли t_n сыфыры вар. $x(t_n)=0$, $n=1,2,\ldots$ Дикәр тәрәфдән $|t_n-t_0|<\delta_n$ олдуғундан, $\lim_{n\to\infty}t_n=t_0$. Бурадан, төрәмәнин тә'рифинә әсасән

$$\dot x(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(t_n)-x(t_0)}{t_n-t_0}=0$$

Демәли, $x(t)$ һәлли үчүн $x(t_0)=0$, $\dot x(t_0)=0$ Бу исә сыфырларын садәлији һаггында теоремә зиддир.

Нәтичә 1 *Һәр бир сонлу $[\alpha,\beta]$ парчасында (1) тәнлијинин истәнилән һәллинин анчаг сонлу сајда сыфыры ола биләр.*

Теорем 4 (Валле-Пуссен). *Тутаг ки, $[\alpha, \beta]$ парчасында $|Q(t)| \leqslant M$, $M > 0$. Онда (2) тәнлијинин һәр бир һәллинин ики ардычыл сыфыры (әкәр варса) арасындакы мәсафә $\sqrt{\frac{6}{M}}$ әдәдиндән кичик дејил.*

Исбаты. Үмумилији позмадан фәрз етмәк олар ки, $t=0$ вә $t=h$ нөгтәләри (2) тәнлијинин һәр һансы $y(t)$ һәллинин ики ардычыл сыфырыдыр.

Һиссә-һиссә интеграллamaгла јохламаг олар ки,

$$h\dot{y}(t) = \int_0^t s\ddot{y}(s)ds - \int_t^h (h-s)\ddot{y}(s)ds$$

ејнилији доғрудур. Бу ејниликдә $y(t)$ функсијасынын (2) тәнлијинин һәлли олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$h\dot{y}(t) = -\int_0^t sQ(s)y(s)ds + \int_t^h (h-s)Q(s)y(s)ds. \qquad (8)$$

Тутаг ки,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant h} |\dot{y}(t)| = \dot{y}(\tau) = \mu, \quad \tau \in [0, h].$$

Ајдындыр ки, $\mu > 0$. Доғрудан да, $\mu = 0$ олса, $\dot{y}(t) \equiv 0$, $t \in [0, h]$ вә $y(0) = 0$ олдуғундан, $y(t) = 0$, $t \in [0, h]$.

$y(t)$ функсијасына $[0, s]$ вә $[s, h]$ парчаларында Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәтбиг етмәклә

$$|y(s)| \leqslant \mu s, \quad |y(s)| \leqslant \mu(h-s)$$

бәрабәрсизликләрини аларыг. Бу көстәрир ки,

$$|(h-s)y(s)| \leqslant \mu s(h-s), \quad |sy(s)| \leqslant \mu s(h-s), \quad 0 \leqslant s \leqslant h$$

бәрабәрсизликләри өдәнир.

Алынан бәрабәрсизликләрә әсасән (8) ејнилијиндән, ихтијари $t \in [0, h]$ үчүн

$$h|\dot{y}(t)| \leqslant \mu M \int_0^h s(h-s)\,ds = \mu M \frac{h^3}{6}$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бурадан, хүсуси һалда $t = \tau$ көтүрсәк, $6 \leqslant Mh^2$ олар вә демәли, көкләр арасындакы h мәсафәси үчүн $h \geqslant \sqrt{\frac{6}{M}}$ бәрабәрсизлији алынар. Теорем исбат олунду.

Теорем 5. *Тутаг ки, (4) тәнлијиндә а) $p(t)$, $q(t)$ әмсалларынын $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз төрәмәләри вар вә $q(t) \neq 0$;*
б) $p(t)\,q(t)$ һасили азалмајандыр (артмајандыр).

Онда (4) тәнлијинин һәр һансы $x = x(t)$ һәллинин $[\alpha, \beta]$ парчасында артан истигамәтдә дүзүлмүш $t_1, t_2, t_3, \ldots$ сыфырлары үчүн

$$\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2} |x(t)| \geqslant \max_{t_2\leqslant t\leqslant t_3} |x(t)| \geqslant \cdots$$
$$\cdots\left(\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2} |x(t)| \leqslant \max_{t_2\leqslant t\leqslant t_3} |x(t)| \leqslant \cdots\right)$$

бәрабәрсизликләри доғрудур

Исбаты. $x = x(t)$ һәлли васитәсилә

$$\varphi(t) = x^2(t) + \frac{1}{p(t)\,q(t)}(p(t)\,\dot{x}(t))^2$$

функсијасыны дүзәлдәк. Бурадан, $x(t)$ функсијасынын (4) тәнлијинин һәлли олдуғуну нәзәрә алараг асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\dot{\varphi}(t) = -\left[\frac{\dot{x}(t)}{q(t)}\right]^2 \frac{d}{dt}(p(t)q(t)).$$

Теоремин шәртинә әсасән $\frac{d}{dt}(p(t)q(t)) \geqslant 0 \left(\frac{d}{dt}(p(t)p(t)) \leqslant 0\right)$ олдуғундан, $\dot{\varphi}(t) \leqslant 0$ ($\dot{\varphi}(t) \geqslant 0$) олур, јә'ни $\varphi(t)$ функсијасы артмајандыр (азалмајандыр). $x = x(t)$ һәллинин максимум вә минимум гијмәтләр алдығы нөгтәләрдә $\dot{x}(t) = 0$ олдуғундан, бу нөгтәләрдә $\varphi(t) = x^2(t)$. Дикәр тәрәфдән, $\varphi(t)$ функсијасы артмајан (азалмајан) олдуғу үчүн, һәллин максимумларынын вә минимумларынын квадратлары артмајандырлар (азалмајандырлар). Бурадан алырыг ки, $|x(t)|$ функсијасынын максимумлары артмајандырлар (азалмајандырлар). Теорем исбат олунду.

(4) тәнлији илә јанашы

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right) + q_1(t)\,y = 0 \qquad (4')$$

тәнлијинә бахаг.

Теорем 6 (Штурм). *Тутаг ки, $p(t)$, $\dot{p}(t)$, $q(t)$, $q_1(t)$ функсијалары $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир вә бу парчада*

$$q_1(t) \geqslant q(t) \qquad (9)$$

шәрти өдәнир. Онда (4) тәнлијинин һәр бир һәллинин ики ардычыл сыфыры арасында (4′) тәнлијинин ихтијари һәллинин һеч олмаса бир сыфыры вар.

Исбаты. Тутаг ки, $x(t)$ функсијасы (4) тәнлијинин t_1, t_2 ($\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$) нөгтәләриндә сыфра чеврилән һәлли, $y(t)$ исә (4′) тәнлијинин ихтијари һәллидир. Демәли, $[\alpha, \beta]$ парчасында

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx(t)}{dt}\right)+q(t)x(t)=0,\ \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right)+q_1(t)y(t)=0$$

ejниликләри өдәнир. Бу ejниликләрдән биринчисини $y(t)$-jә, икинчисини исә $x(t)$-jә вуруб тәрәф-тәрәфә чыхсаг,

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)p(t)\frac{dx(t)}{dt}-x(t)p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right]=(q_1(t)-q(t))x(t)\ y(t)$$

ejнилиjини аларыг. Алынан ejнилиjи t_1-дән t_2-jә гәдәр интеграллаjыб $x(t_1)=0$, $x(t_2)=0$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$y(t_2)p(t_2)x(t_2)-y(t_1)p(t_1)x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)dt \tag{10}$$

бәрабәрлиjини аларыг.

Үмумилиjи позмадан (t_1, t_2) интервалында $x(t)>0$ гәбул етмәк олар. Онда $\dot{x}(t_1)>0$, $\dot{x}(t_2)<0$ олур.

Теореми исбат етмәк үчүн ашағыдакы һаллара бахаг.

1) $[t_1, t_2]$ парчасында $q_1(t)\not\equiv q(t)$. Бурадан (9) шәртинә әсасән аларыг ки, һеч олмаса бир $\bar{t}\in[t_1, t_2]$ нөгтәси вар ки, $q_1(\bar{t})>q(\bar{t})$ олур. Дикәр тәрәфдән $q(t)$, $q_1(t)$ функсиjалары кәсилмәз олдуғундан, $\bar{t}$-нин $[t_1, t_2]$ парчасына дахил олан кичик әтрафында да $q_1(t)>q(t)$ бәрабәрсизлиjи өдәнәр. Көстәрәк ки, бу һалда $y(t)$ һәллинин (t_1, t_2) интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, (t_1, t_2) интервалында $y(t)$ һәлли сыфра чеврилмир. Үмумилиjи позмадан бу интервалда $y(t)>0$ гәбул едәк. Онда (10) бәрабәрлиjинин сол тәрәфи мүсбәт олмаjан әдәд ($y(t)$ парчанын учларында сыфра чеврилә биләр), сағ тәрәфи исә мүсбәт әдәд олур. Алынан зиддиjjәт көстәрир ки, (4′) тәнлиjинин $y(t)$ һәллинин (t_1, t_2) интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар.

2) $[t_1, t_2]$ парчасында $q_1(t)\equiv q(t)$. Онда $[t_1, t_2]$ парчасында (4) вә (4′) тәнликләри үст-үстә дүшүрләр. Бу һалда ja $y(t)=cx(t)$ олмалыдыр, jахуд да $y(t)$ һәллинин (t_1, t_2) интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар. Әкс һалда, (t_1, t_2) интервалында $y(t)>0$ гәбул етсәк, (10) бәрабәрлиjиндән зиддиjjәт аларыг. Доғрудан да, бу заман (10) бәрабәрлиjинин сағ тәрәфи сыфыр, сол тәрәфи исә мәнфи олур. Теорем исбат олунду.

Нәтичә 1. *Тутаг ки, Штурм теореминин шәртләри өдәнир вә (t_1, t_2) интервалында $q_1(t)\not\equiv q(t)$. Онда (4′) тәнлиjинин $y(t_1)=0$ шәртини өдәjән ихтиjари $y(t)$ һәллинин (t_1, t_2) интервалында да һеч олмаса бир сыфыры вар.*

Доғрудан да, бахылан һалда (10) бәрабәрлиjи

$$y(t_2)p(t_2)\dot{x}(t_2)=\int_{t_1}^{t_2}(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)dt \tag{11}$$

шәклинә дүшүр вә (t_1, t_2) интервалында $x(t)>0$, $y(t)>0$ гәбул етсәк, (11) бәрабәрлиjинин сол тәрәфи мәнфи вә ja сыфыр, сағ тәрәфи исә мүсбәт олар. Алынан зиддиjjәт нәтичәнин доғрулуғуну көстәрир.

Нәтичә 2. *(4) тәнлиjинин һәр һансы һәллинин ики гоншу сыфыры арасында, һәмин тәнлиjин бу һәлл илә хәтти асылы олмаjан һәллинин jеканә сыфыры вар.*

Бу заман деjирләр ки, (4) тәнлиjинин хәтти асылы олмаjан һәлләринин сыфырлары бир-бирини *гаршылыглы бөлүр.*

Нәтичәни Штурм теоремидә $q_1(t)\equiv q(t)$ көтүрмәклә исбат етмәк олар.

Икитәртибли хәтти бирчинс тәнлиjин һәр һансы һәллинин верилмиш $[\alpha, \beta]$ парчасында ән азы ики сыфыры варса, бу һәлл $[\alpha, \beta]$ парчасында *рәгс едән* адланыр. Әкс һалда, деjирләр ки, һәлл $[\alpha, \beta]$ парчасында рәгс етмәjәндир.

Нәтичә 3. *Тутаг ки, $[\alpha, \beta]$ парчасында $q(t)\leqslant 0$. Онда (4) тәнлиjинин һәлләри һәмин парчада рәгс етмәjәндир.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $q(t)\leqslant 0$ олмасына бахмаjараг, (4) тәнлиjинин тривиал олмаjан елә һәлли вар ки, бу һәллин бахылан парчада һеч олмаса ики t_1, t_2 сыфырлары вар. Онда Штурм теореминә әсасән

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right)=0$$

тәнлиjинин истәнилән һәллинин $[t_1, t_2]$ парчасында һеч олмаса бир сыфыры вар. Лакин $y=c\,(c\neq 0)$ бу тәнлиjин һеч бир нөгтәдә сыфра чеврилмәjән һәлли олдуғундан, алынан зиддиjjәт нәтичәнин доғрулуғуну көстәрир.

Нәтичә 4. *Тутаг ки, (2) тәнлиjиндә $Q(t)$ функсиjасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз, артан функсиjадыр вә $t_1, t_2, t_3, \ldots$ һәмин тәнлиjин һәр һансы $y=y(t)$ һәллинин артан истигамәтдә дүзүлмүш сыфырларыдыр. Онда*

$$0<t_2-t_1<t_3-t_2<\cdots$$

Исбаты. $t_2-t_1=h$ ишарә едәк. Аjдындыр ки, $z(t)=y(t-h)$ функсиjасы

$$\ddot{z}+Q(t-h)z=0 \tag{2′}$$

тәнлиjинин һәллидир вә t_2, t_3+h, $t_4+h, \ldots$ бу һәллин сыфырларыдыр.

Шәртә көрә $Q(t)>Q(t-h)$ олдуғундан, (2) вә (2′) тәнликләрини мүгаjисә етсәк, 1-чи нәтичәjә әсасән $t_2+h<t_3$ олар, jә'ни $t_2-t_1<t_3-t_2$.

Ejни гаjда илә $t_3-t_2<t_4-t_3$ вә с. олдуғуну исбат етмәк олар.

Нәтиҹә 5. *Тутаг ки, (2) тәнлијиндә $Q(t)$ функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир вә*

$$0 < m \leq Q(t) \leq M \qquad (12)$$

шәрти өдәнир. Онда (2) тәнлијинин һәр һансы һәллинин ики ардычыл сыфыры арасындакы мәсафә

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq h \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}} \qquad (13)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир.

Исбаты. Штурм теоремини тәтбиг етмәк үчүн (2) тәнлијини

$$\ddot{z} + mz = 0, \qquad (14)$$

$$\ddot{u} + Mu = 0 \qquad (15)$$

тәнликләри илә мүгајисә едәк.

Тутаг ки, t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ нөгтәләри (2) тәнлијинин һәр һансы $y(t)$ һәллинин ики ардычыл сыфырыдыр.

Ајдындыр ки, (14) вә (15) тәнликләринин $t = t_1$ нөгтәсиндә сыфра чеврилән һәлләри, ујғун олараг

$$z = A \sin \sqrt{m}\,(t - t_1), \quad u = A_1 \sin \sqrt{M}\,(t - t_1)$$

шәклиндәдир; бурада A, A_1 ихтијари сабитләрдир. Бу һәлләр t_1-дән сағда илк дәфә ујғун олараг

$$\bar{t}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}, \quad \bar{\bar{t}}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

нөгтәләриндә сыфра чеврилирләр. Штурм теоремини (2) вә (14) тәнликләринә тәтбиг етдикдә $t_2 \leq \bar{t}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ бәрабәрсизлији, (15) вә (2) тәнликләринә тәтбиг етдикдә исә $\bar{\bar{t}}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_2$ бәрабәрсизлији алыныр. Бурадан $h = t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ вә $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_2 - t_1 = h$ олдуғундан, нәтиҹәнин исбаты алыныр.

Бу нәтиҹәјә әсасән алырыг ки, (12) шәрти узунлуғу $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$-дән кичик олмајан $[\alpha_1, \beta_1]$ ($[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$) парчасында өдәнирсә, (2) тәнлијинин ихтијари һәллинин бу парчада һеч олмаса бир сыфыры вар. Она көрә дә тәнлијин ихтијари һәллинин $[\alpha, \beta]$ парчасындакы сыфырларынын сајы $\left[\frac{(\beta - \alpha)\sqrt{m}}{\pi}\right]$ әдәдиндән аз дејил, бурада $[z]$ илә z-ин там һиссәси ишарә олунмушдур.

§ 4. СӘРҺӘД МӘСӘЛӘСИ, ГРИН ФУНКСИЈАСЫ

Мә'лумдур ки, n $(n \geq 1)$ тәртибли тәнлијин үмуми һәлли n ихтијари сабитдән асылыдыр. Она көрә дә дејирләр ки, n тәртибли ади диференсиал тәнлијин сәрбәстлик дәрәҹәси n-дир.

Индијә гәдәр үмуми һәллдән тәнлијин мүәјјән хүсуси һәллини алмаг үчүн башланғыч шәртләрдән истифадә олунурду. Јә'ни ахтарылан функсија вә онун төрәмәләри сәрбәст дәјишәнин ејни бир гијмәтиндә верилирди. Лакин бир чох мәсәләләрдә алынан тәнлијин елә һәллини тапмаг тәләб олунур ки, бу һәлл сәрбәст дәјишәнин мүхтәлиф гијмәтләриндә верилмиш шәртләри өдәсин. Бу исә сәрһәд мәсәләси илә бағлыдыр.

Тутаг ки,

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0 \qquad (1)$$

тәнлијинин

$$x(\alpha) = a_1, \ x(\beta) = a_2 \ (\alpha < \beta) \qquad (16)$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы тәләб олунур, бурада α, β, a_1, a_2 верилмиш әдәдләрдир.

Бу мәсәләјә *сәрһәд мәсәләси*, (16) шәртләринә исә *сәрһәд шәртләри* дејилир.

Ајдындыр ки, (1), (16) сәрһәд мәсәләсини һәлл етмәк, һәндәси олараг, (1) тәнлијинин $(\alpha, a_1), (\beta, a_2)$ нөгтәләриндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир.

(1) тәнлији үчүн (16)-дан үмуми олан

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}\dot{x}(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}\dot{x}(\beta) = a_1, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}\dot{x}(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}\dot{x}(\beta) = a_2 \end{cases} \qquad (17)$$

сәрһәд шәртләри дә вермәк олар.

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}\dot{x}(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}\dot{x}(\beta) = 0, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}\dot{x}(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}\dot{x}(\beta) = 0 \end{cases} \qquad (17')$$

сәрһәд шәртләринә *бирҹинс сәрһәд шәртләри*, (1) тәнлијинин бирҹинс сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә исә *бирҹинс сәрһәд мәсәләси* дејилир.

Садә мисаллар көстәрир ки, (1) тәнлијинин әмсаллары мүәјјән шәртләри өдәдикдә Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар, лакин сәрһәд мәсәләсинин һәлли јохдур вә ја сонсуз сајдадыр.

Мисал 1. $\ddot{x} + x = 0$ тәнлијинин $x(0) = 0, \ x(\pi) = 1$ сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлли јохдур. Доғрудан да, тәнлијин үмуми һәлли

$$x = A \sin t + B \cos t$$

шәклиндә, $x(0)=0$ шәртини өдәјән һәлләри исә $x = A\sin t$ шәклиндәдир. Ајдындыр ки, бу һәлләр ичәрисиндә $x(\pi)=1$ шәртини өдәјәни јохдур.

Асанлыгла јохламаг олар ки, ихтијари A үчүн $x = A\sin t$ функсијасы бахылан тәнлијин $x(0)=0,\ x(\pi)=0$ шәртләрини өдәјән һәллидир. Лакин тәнлијин $x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ шәртини өдәјән јеканә $x=\sin t$ һәлли вар.

Мә'лумдур ки, $x_1(t), x_2(t)$ функсијалары (1) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләри исә, онун үмуми һәлли

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \qquad (18)$$

шәклиндәдир вә демәли, (17) шәртләрини өдәјән һәлл дә (әкәр варса) бу һәлләр ичәрисиндәдир, бурада c_1, c_2 ихтијари сабитләрдир. Бу сабитләри елә сечәк ки, (18) һәлли (17) шәртләрини өдәсин. Онда c_1, c_2 мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = a_1, \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = a_2 \end{cases} \qquad (19)$$

ҹәбри тәнликләр системи алыныр; бурада

$$A_{i1} = a_{i1}x_1(\alpha) + a_{i2}\dot{x}_1(\alpha) + b_{i1}x_1(\beta) + b_{i2}\dot{x}_1(\beta),$$

$$A_{i2} = a_{i1}x_2(\alpha) + a_{i2}\dot{x}_2(\alpha) + b_{i1}x_2(\beta) + b_{i2}\dot{x}_2(\beta),\ i=1,2.$$

Садәлик үчүн

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

ишарә едәк. Ҹәбрдән мә'лум олан Кронекер—Капелли теоремине әсасән (19) системинин ујушан олуб-олмамасы илә әлагәдар олараг алырыг ки,

а) $\det A \neq 0$ исә, (19) системинин јеканә һәлли вар вә демәли, (1) тәнлијинин (ихтијари a_1, a_2 әдәдләри үчүн), (17) шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Бурадан һәм дә алыныр ки, $\det A \neq 0$ исә, бирҹинс сәрһәд мәсәләсинин јеканә тривиал һәлли вар вә әксинә, бирҹинс сәрһәд мәсәләсинин јеканә тривиал һәлли варса, $\det A \neq 0$. Јә'ни, (1) тәнлијинин (17) шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар;

б) $\det A = 0$ вә a_1, a_2 әдәдләринин һәр икиси сыфыр дејил. Онда A матрисинин рангы $\overline{A}$ матрисинин рангына бәрабәр олдугда (19) системинин сонсуз сајда һәлли вар вә демәли, (1) тәнлијинин (17) шәртләрини өдәјән сонсуз сајда һәлли вар, A матрисинин рангы $\overline{A}$ матрисинин рангына бәрабәр олмадыгда исә (19) системи ујушан дејил вә демәли, (1) тәнлијинин (17) шәртләрини өдәјән һәлли јохдур,

в) $\det A = 0$ олдугда (1) тәнлијинин (17′) бирҹинс сәрһәд шәртләрини өдәјән сонсуз сајда тривиал олмајан һәлли вар.

Бирҹинс олмајан

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = f(t) \qquad (20)$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлијин (17′) бирҹинс сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин гурулмасында Грин функсијасы мүһүм рол ојнајыр. Она көрә дә әввәлҹә Грин функсијасына тә'риф верәк.

Тутаг ки, $R = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$ квадратында тә'јин олунмуш $G(t,\tau)$ функсијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1. $G(t,\tau)$ функсијасы R квадратында кәсилмәздир, һәр бир $\tau \in (\alpha,\beta)$ үчүн $(\alpha,\tau), (\tau,\beta)$ интервалларында t-јә нәзәрән ики тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар вә бу интервалларда (1) тәнлијини өдәјир;

2. $G_t(t,\tau)$ төрәмәси $t=\tau$ нөгтәсиндә биринҹи нөв кәсилмәјә маликдир вә

$$G_t(\tau+0,\tau) - G_t(\tau-0,\tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}; \qquad (21)$$

3. $G(t,\tau)$ функсијасы t-јә нәзәрән (17′) бирҹинс сәрһәд шәртләрини өдәјир.

Белә $G(t,\tau)$ функсијасына (1), (17′) сәрһәд мәсәләсинин вә ја $L(x) = p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x$ диференсиал операторунун (17′) шәртләрини өдәјән *Грин функсијасы* дејилир.

Грин функсијасынын варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 7. *Тутаг ки, (1) тәнлијинин (17′) бирҹинс сәрһәд шәртләрини өдәјән анҹаг тривиал һәлли вар. Онда (1), (17′) мәсәләсинин Грин функсијасы вар.*

Исбаты. Тутаг ки, $x_1(t), x_2(t)$ функсијалары (1) тәнлијинин $[\alpha,\beta]$ парчасында хәтти асылы олмајан һәлләридир.

Тә'рифә көрә Грин функсијасы һәр бир $\tau \in (\alpha,\beta)$ үчүн (α,τ), (τ,β) интервалларында (1) тәнлијинин һәлли олдуғундан,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), & t \in [\alpha,\tau], \\ \overline{c}_1 x_1(t) + \overline{c}_2 x_2(t), & t \in [\tau,\beta] \end{cases}$$

олмалыдыр, бурада $c_1, c_2, \overline{c}_1, \overline{c}_2$ һәләлик намә'лум сабитләрдир.

Шәртә көрә $G(t,\tau)$ функсијасы R квадратында кәсилмәз олдуғундан,

$$c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau) = \overline{c}_1 x_1(\tau) + \overline{c}_2 x_2(\tau)$$

олар. Дикәр тәрәфдән, (21) шәртинә әсасән

$$\overline{c}_1 \dot{x}_1(\tau) + \overline{c}_2 \dot{x}_2(\tau) - c_1 \dot{x}_1(\tau) - c_2 \dot{x}_2(\tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}.$$

Ајдындыр ки, $\overline{c}_1 - c_1 = \gamma_1,\ \overline{c}_2 - c_2 = \gamma_2$ ишарә етсәк, сонунҹу ики мүнасибәтдән γ_1, γ_2 мәчһулларына нәзәрән хәтти, бирҹинс олмајан

$$\begin{cases} x_1(\tau)\gamma_1 + x_2(\tau)\gamma_2 = 0, \\ \dot x_1(\tau)\gamma_1 + \dot x_2(\tau)\gamma_2 = \dfrac{1}{p_0(\tau)} \end{cases} \qquad (22)$$

чәбри тәнликләр системини аларыг.

Бу системин әмсалларындан дүзәлдилмиш детерминант (1) тәнлијинин хәтти асылы олмајан $x_1(t)$, $x_2(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш $W(t)$ Вронски детерминантынын $t=\tau$ нөгтәсиндәки гијмәтинә бәрабәр олдуғундан, сыфырдан фәрглидир. Одур ки, (22) системинин јеканә

$$\gamma_1(\tau) = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)},\ \gamma_2(\tau)=\frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}$$

һәлли вар.

Онда $\bar c_1 = c_1+\gamma_1(\tau)$, $\bar c_2 = c_2+\gamma_2(\tau)$. Демәли,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1x_1(t)+c_2x_2(t), & t\in[\alpha,\tau], \\ (c_1+\gamma_1(\tau))x_1(t)+(c_2+\gamma_2(\tau))x_2(t), & t\in[\tau,\beta]. \end{cases}$$

Тәрифә көрә $G(t,\tau)$ функсијасы сәрһәд шәртләрини өдәмәлидир. Бу шәртләрә әсасән c_1, c_2 мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = -[b_{11}x_1(\beta)+b_{12}\dot x_1(\beta)]\gamma_1 - [b_{11}x_2(\beta)+b_{12}\dot x_2(\beta)]\gamma_2, \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = -[b_{21}x_1(\beta)+b_{22}\dot x_1(\beta)]\gamma_1 - [b_{21}x_2(\beta)+b_{22}\dot x_2(\beta)]\gamma_2 \end{cases}$$

системини аларыг.

Теоремин шәртинә көрә бирчинс сәрһәд мәсәләсинин јеканә тривиал һәлли вар. Демәли, $\det A\neq 0$. Одур ки, сонунчу системдән $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$ јеканә гајда илә тә'јин олунур. Бу гијмәтләри јухарыда нәзәрә алсаг, $\bar c_1(\tau)$, $\bar c_2(\tau)$ мәчһуллары да тә'јин олунар вә беләликлә,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1(\tau)x_1(t)+c_2(\tau)x_2(t), & t\in[\alpha,\tau], \\ \bar c_1(\tau)x_1(t)+\bar c_2(\tau)x_2(t), & t\in[\tau,\beta] \end{cases}$$

функсијасы (1), (17′) мәсәләсинин Грин функсијасы олур. Теорем исбат олунду.

Теорем 8. *Тутаг ки, $G(t,\tau)$ функсијасы (1), (17′) мәсәләсинин Грин функсијасыдыр вә $f(t)$ функсијасы $[\alpha,\beta]$ парчасында кәсилмәздир. Онда*

$$x(t)=\int_\alpha^\beta G(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (23)$$

дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасы (20) тәнлијинин (17′) шәртләрини өдәјән һәллидир.

Бу дүстура *Грин дүстуру* дејилир.

Исбаты. Грин дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасынын (17′) шәртләрини өдәмәси, $G(t,\tau)$ функсијасынын t аргументинә нәзәрән һәмин шәртләри өдәмәсиндән алындыр.

Көстәрәк ки, $x(t)$ функсијасы һәм дә (20) тәнлијини өдәјир. Бунун үчүн Грин дүстуруну

$$x(t)=\int_\alpha^t G(t,\tau)f(\tau)d\tau+\int_t^\beta G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

шәклиндә јазаг вә $\dot x(t)$, $\ddot x(t)$ төрәмәләрини һесаблајаг:

$$\dot x(t) = G(t,t)f(t) + \int_\alpha^t G_t(t,\tau)f(\tau)d\tau - G(t,t)f(t) + \int_t^\beta G_t(t,\tau)f(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta G_t(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$\ddot x(t) = G_t(t,t-0)f(t)+\int_\alpha^t G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau - G_t(t,t+0)f(t) + \int_t^\beta G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau = [G_t(t,t-0)-G_t(t,t+0)]f(t) + \int_\alpha^\beta G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Бурада $G_t(t,t-0)=G_t(t+0,t)$ вә $G_t(t,t+0)=G_t(t-0,t)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (21) шәртинә әсасән аларыг ки,

$$\ddot x(t) = \frac{1}{p_0(t)}f(t)+\int_\alpha^\beta G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Одур ки, Грин дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасы үчүн

$$L[x(t)] \equiv p_0(t)\ddot x(t)+p_1(t)\dot x(t)+p_2(t)x(t) = f(t)+\int_\alpha^\beta [p_0(t)G_{tt}(t,\tau)+p_1(t)G_t(t,\tau)+p_2(t)G(t,\tau)]f(\tau)d\tau$$

мүнасибәтини аларыг.

Шәртә көрә ихтијари $\tau\in(\alpha,\beta)$ үчүн $G(t,\tau)$ функсијасы (α,τ), (τ,β) интервалларында (1) тәнлијинин һәлли олдуғундан, бурадан

$$L[x(t)]\equiv f(t)$$

ејнилијини аларыг. Теорем исбат олунду.

Мисал 2. $(2t+1)\ddot x+4t\dot x-4x=f(t)$ тәнлијинин

$$x(0)-e^2x(1)=0,\ x(0)=0$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапаг. Бунун үчүн әввәлчә

$$(2t+1)\ddot{x}+4t\dot{x}-4x=0$$

бирчинс тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләрини тапаг. Тәнлијин бир хүсуси һәллини

$$x=at^n+bt^{n-1}+\dots$$

шәклиндә ахтараг. Ону тәнликдә јазыб t-нин еjни дәрәчәләринин әмсалларыны тутушдурсаг, аларыг ки, $n=1$, јә'ни тәнлијин

$$x=at+b$$

шәклиндә һәлли вар. Һәллин бу ифадәсини тәнликдә јазыб, әмсаллары тутушдурмагла a, b-ни тә'јин едирик. $a=1, b=0$. Демәли, $x_1(t)=t$ бирчинс тәнлијин һәллидир.

Тапылан $x_1(t)=t$ һәллинин көмәји илә тәнлијин тәртибини азалдараг онун $x_2(t)=e^{-2t}$ һәллини дә гура биләрик. Ајдындыр ки, $x(t)=t$, $x_2(t)=e^{-2t}$ һәлләри хәтти асылы дејилләр. Она көрә дә бахылан мәсәләнин Грин функсијасыны

$$G(t,\tau)=\begin{cases}c_1t+c_2e^{-2t}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ \bar{c}_1t+\bar{c}_2e^{-2t}, & \tau\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр.

$p_0(t)=2t+1$, $W(t)=-(2t+1)e^{-2t}$ олдуғундан, аларыг ки,

$$\bar{c}_1-c_1=\gamma_1=\frac{1}{(2\tau+1)^2},\quad \bar{c}_2-c_2=\gamma_2=-\frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}.$$

Бурадан

$$\bar{c}_1=c_1+\frac{1}{(2\tau+1)^2},\quad \bar{c}_2=c_2-\frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}.$$

Бу гијмәтләри Грин функсијасынын ифадәсиндә јеринә јазыб сәрһәд шәртләрини нәзәрә алсаг, c_1, c_2 мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases}c_1-\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}+\dfrac{1}{(2\tau+1)^2}=0,\\ c_1-2c_2=0\end{cases}$$

системини аларыг. Бурадан c_1, c_2 мәчһулларыны тә'јин едиб үмуми нәзәријјәдәки гајда илә

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}-1}{(2\tau+1)^2}t+\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}-1}{2(2\tau+1)^2}e^{-2t}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ \dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}t+\dfrac{\tau(e^{-2}-2)e^{2\tau}-1}{2(2\tau+1)^2}e^{-2t}, & \tau\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

Грин функсијасыны гура биләрик. Онда теоремә әсасән

$$x(t)=\int_0^1 G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

функсијасы бахылан мәсәләнин һәлли олар.

§ 4. МӘХСУСИ ӘДӘД ВӘ МӘХСУСИ ФУНКСИЈА ҺАГГЫНДА

Тутаг ки,

$$\ddot{x}+(\lambda-q(t))x=0 \tag{24}$$

тәнлијинин

$$\begin{cases}a_{11}x(\alpha)+a_{12}\dot{x}(\alpha)=0,\\ b_{21}x(\beta)+b_{22}\dot{x}(\beta)=0\end{cases} \tag{25}$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур, бурада λ параметр, $q(t)$ функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз һәгиги функсијадыр, $a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}$ һәгиги әдәдләрдир вә

$$a_{11}^2+a_{12}^2>0,\qquad b_{21}^2+b_{22}^2>0$$

шәртләри өдәнир. Ајдындыр ки, (24), (25) мәсәләсинин һәмишә тривиал һәлли вар, лакин λ параметринин бә'зи гијмәтләри үчүн һәмин мәсәләнин тривиал олмајан һәлли ола биләр. λ параметринин (24), (25) мәсәләсинин тривиал олмајан һәллинин варлығыны тә'мин едән гијмәтләринә бу мәсәләнин *мәхсуси әдәдләри*, ујғун һәлләрә исә *мәхсуси функсијалары* дејилир. Она көрә дә (24), (25) мәсәләсинә *мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында* мәсәлә вә ја *Штурм—Лиувилл мәсәләси* дејилир.

Әввәлчә

$$\ddot{x}+\lambda x=0 \tag{26}$$

тәнлијинин

$$x(0)=0,\ x(\pi)=0 \tag{27}$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә бахаг.

Штурм теоремине әсасән (нәтичә 3) аларыг ки, $\lambda\leqslant 0$ олдугда (26), (27) мәсәләсинин тривиал олмајан һәлли јохдур. Буна көрә дә (26), (27) мәсәләсинин анчаг $\lambda>0$ олдугда тривиал олмајан һәлли ола биләр. Ајдындыр ки, $\lambda>0$ олдугда (26) тәнлијинин үмуми һәлли

$$x=c_1\cos\sqrt{\lambda}t+c_2\sin\sqrt{\lambda}t$$

шәклиндәдир вә (27) шәртләриндән биринчисинә әсасән аларыг ки, $c_1=0$. Демәли (26), (27) мәсәләсинин һәлли

$$x=c_2\sin\sqrt{\lambda}t$$

анлесиндән сечилмәлидир. Дикәр тәрәфдән (27) шәртләринин икинчисиндән алырыг ки,

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

олмалыдыр. Бурадан ајдындыр ки, (26), (27) мәсәләсинин тривиал олмајан һәллинин варлығы үчүн $c_2 \neq 0$ олмалыдыр вә λ параметрини елә сечмәк лазымдыр ки,

$$\sin \sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

олсун. Бунун үчүн

$$\sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

олмалыдыр. Демәли,

$$\lambda = k^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

олдугда (26), (27) мәсәләсинин тривиал олмајан һәлли вар.

Беләликлә, $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$ әдәдләри (26), (27) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри, $x_k(t) = c_k \sin kt$ исә ујғун мәхсуси функсијалары олур, бурада c_k ихтијари сабитдир. Бурадан көрүнүр ки, (26), (27) мәсәләсинин сонсуз сајда мәхсуси әдәдләри вә мәхсуси функсијалары вар.

Ајдындыр ки, $x_1(t) = c_1 \sin t$ $(c_1 \neq 0)$ мәхсуси функсијасы $[0, \pi]$ парчасынын анчаг уч нөгтәләриндә, $x_2 = c_2 \sin 2t$ $(c_2 \neq 0)$ мәхсуси функсијасы $[0, \pi]$ парчасында үч нөгтәдә (уч нөгтәләр дә дахил олмагла) сыфра чеврилир вә с. $x_l(t) = c_l \sin lt$ $(c_l \neq 0)$ мәхсуси функсијасы $[0, \pi]$ парчасында $l + 1$ нөгтәдә сыфра чеврилир.

Көстәрмәк олар ки, $k \neq m$ олдугда

$$\int_0^{\pi} x_k(t)\, x_m(t)\, dt = 0, \quad k, m = 1, 2, \ldots$$

Бу заман дејирләр ки, (26), (27) мәсәләсинин ики мүхтәлиф мәхсуси әдәдинә ујғун олан мәхсуси функсијалар *ортогоналдыр*.

Бундан башга, $x_k(t) = c_k \sin kt$ мәхсуси функсијасында $c_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ гәбул етсәк, асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\int_0^{\pi} x_k^2(t)\, dt = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Онда $x_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt$ мәхсуси функсијасына *нормаллашдырылмыш* мәхсуси функсија дејилир.

Ајдындыр ки, нормаллашдырылмыш

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2t, \ \ldots, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt, \ \ldots$$

мәхсуси функсијалары ортогоналдырлар. Белә мәхсуси функсијалар системинә (26), (27) мәсәләсинин ортонормал мәхсуси функсијалар системи дејилир.

Ујғун анлајышлар даһа үмуми олан (24), (25) мәсәләси үчүн дә доғрудур.

Теорем 9. *Тутаг ки, λ_1, λ_2 әдәдләри (24), (25) мәсәләсинин мүхтәлиф мәхсуси әдәдләри, $x(t, \lambda_1)$, $x(t, \lambda_2)$ исә ујғун мәхсуси функсијаларыдыр. Онда*

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t, \lambda_1)\, x(t, \lambda_2)\, dt = 0.$$

Исбаты. Шәртә көрә $[\alpha, \beta]$ парчасында

$$\ddot{x}(t, \lambda_1) + \{\lambda_1 - q(t)\}\, x(t, \lambda_1) = 0,$$

$$\ddot{x}(t, \lambda_2) + \{\lambda_2 - q(t)\}\, x(t, \lambda_2) = 0$$

ејниликләри өдәнир. Бу ејниликләрдән биринчисини $x(t, \lambda_2)$-јә, икинчисини $x(t, \lambda_1)$-ә вуруб тәрәф-тәрәфә чыхсаг,

$$x(t, \lambda_2)\, \ddot{x}(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_1)\, \ddot{x}(t, \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\, x(t, \lambda_1)\, x(t, \lambda_2) = 0$$

ејнилијини аларыг. Бу ејнилији α-дан β-ја гәдәр интегралласаг

$$x(t, \lambda_2)\, \ddot{x}(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_1)\, \ddot{x}(t, \lambda_2) = (x(t, \lambda_2)\, \dot{x}(t, \lambda_1) - \\ - x(t, \lambda_1)\, \dot{x}(t, \lambda_2))^{\cdot}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x(\beta, \lambda_2)\, \dot{x}(\beta, \lambda_1) - x(\beta, \lambda_1)\, \dot{x}(\beta, \lambda_2) - [x(\alpha, \lambda_2)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_1) - \\ - x(\alpha, \lambda_1)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_2)] + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\alpha}^{\beta} x(t, \lambda_1)\, x(t, \lambda_2)\, dt = 0 \qquad (28)$$

бәрабәрлијини аларыг.

Сәрһәд шәртләринин биринчисинә әсасән

$$a_{11}\, x(\alpha, \lambda_1) + a_{12}\, \dot{x}(\alpha, \lambda_1) = 0,$$

$$a_{11}\, x(\alpha, \lambda_2) + a_{12}\, \dot{x}(\alpha, \lambda_2) = 0.$$

Шәртә көрә $a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0$ олдуғундан, бурадан алырыг ки,

$$x(\alpha, \lambda_1)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_2) - x(\alpha, \lambda_2)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_1) = 0$$

олмалыдыр. Ејни гајда илә сәрһәд шәртләринин икинчисинә әсасән көстәрмәк олар ки,

$$x(\beta, \lambda_2)\, \dot{x}(\beta, \lambda_1) - x(\beta, \lambda_1)\, \dot{x}(\beta, \lambda_2) = 0.$$

Онда (28) бәрабәрлији

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)x(t,\lambda_2)\,dt=0 \qquad (29)$$

шәклинә дүшүр. Бурадан теоремин доғрулуғу алыныр.

Исбат олунан теорем көстәрир ки, (24), (25) *мәсәләсинин ики мүхтәлиф мәхсуси әдәдинә ујғун олан мәхсуси функсијалары ортогоналдыр.*

Теорем 10. *(24), (25) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри һәгигидир.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $\lambda_1=u+iv$, $v\neq 0$ әдәди (24), (25) мәсәләсинин мәхсуси әдәди, $x(t,\lambda_1)$ исә ујғун мәхсуси функсијадыр. Шәртә көрә $q(t)$ һәгиги функсија, a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22} һәгиги әдәдләр олдуғундан, $\bar{\lambda}_1=u-iv$ әдәди дә мәхсуси әдәддир вә ујғун мәхсуси функсија $x(t,\bar{\lambda}_1)=\bar{x}(t,\lambda_1)$ олур. Онда $\lambda_1\neq\bar{\lambda}_1$ олдуғундан (29) бәрабәрлијиндән алырыг:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)\bar{x}(t,\lambda_1)\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}|x(t,\lambda_1)|^2\,dt=0.$$

Бурадан $x(t,\lambda_1)\equiv 0$ олдуғу алыныр ки, бу да λ_1 әдәдинин мәхсуси әдәд олмасы шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Инди исә (25) сәрһәд шәртләри

$$x(\alpha)=0,\quad x(\beta)=0 \qquad (30)$$

шәклиндә олан һал үчүн (24), (30) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләринин варлығыны өјрәнәк.

(24) тәнлијинин $x(\alpha)=0$, $\dot{x}(\alpha)=1$ шәртләрини өдәјән һәллини $x=\varphi(t,\lambda)$ илә ишарә едәк.

Лемма 1. *Тутаг ки, t_0 $(\alpha<t_0<\beta)$ нөгтәси $x=\varphi(t,\lambda_0)$ һәллинин сыфырыдыр. Онда кафи гәдәр кичик $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\sigma>0$ әдәди тапмаг олар ки, $|\lambda-\lambda_0|<\sigma$ шәртини өдәјән λ-лар үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ интервалында јеканә сыфыры вар.*

Исбаты. Сыфырларын садә олмасы һаггында теоремә әсасән (теорем 2), $\varphi(t_0,\lambda_0)=0$, $\varphi_t(t_0,\lambda_0)\neq 0$. Мүәјјәнлик үчүн $\varphi_t(t_0,\lambda_0)>0$ олан һала бахаг. Онда, $\varphi_t(t,\lambda_0)$ кәсилмәз олдуғундан, кифајәт гәдәр кичик $\varepsilon>0$ үчүн $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ интервалында да $\varphi_t(t,\lambda_0)>0$ олур. Бурадан алыныр ки,

$$\varphi(t_0-\varepsilon,\lambda_0)<0,\ \varphi(t_0+\varepsilon,\lambda_0)>0.$$

Һәллин параметрә нәзәрән кәсилмәзлији һаггында теоремә әсасән $\varphi(t,\lambda)$, $\varphi_t(t,\lambda)$ функсијалары t вә λ-ја нәзәрән кәсилмәздирләр. Одур ки, сечилмиш $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\sigma>0$ әдәди тапмаг олар ки, $|\lambda-\lambda_0|<\sigma$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәлли $\varphi(t_0-\varepsilon,\lambda)<0$, $\varphi(t_0+\varepsilon,\lambda)>0$ шәртләрини өдәјәр вә $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$

интервалында $\varphi_t(t,\lambda)>0$ олар. Демәли, $|\lambda-\lambda_0|<\sigma$ шәртини өдәјән λ-лар үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәлли $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ интервалында артан функсијадыр вә интервалын учларында мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр. Онда Коши теореминә әсасән $\varphi(t,\lambda)$ функсијасынын $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ интервалында јеканә сыфыры вар. Лемма исбат олунду.

Исбат олунан лемма көстәрир ки, $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин сыфырларыны $t(\lambda)$ илә ишарә етсәк, $t=t(\lambda)$ функсијасы кәсилмәздир.

Нәтичә. *Тутаг ки, $t_1,t_2,\ldots,t_m$ нөгтәләри $\varphi(t,\bar{\lambda})$ һәллинин $\alpha<t_1<t_2<\ldots<t_m\leqslant\beta$ шәртини өдәјән сыфырларыдыр. Әкәр $t_m=\beta$ оларса, елә $\rho>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\lambda\in(\bar{\lambda},\bar{\lambda}+\rho)$ үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин (α,β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар.*

Исбаты. Леммаја әсасән, кифајәт гәдәр кичик $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\rho_1>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\lambda\in(\bar{\lambda},\bar{\lambda}+\rho_1)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин $(t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon),\ldots,(t_{m-1}-\varepsilon,\ t_{m-1}+\varepsilon)$ интервалларынын һәр бириндә јеканә сыфыры вар.

Леммаја вә Штурм теореминә әсасән $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин $(t_m-\varepsilon,t_m)$ $(t_m=\beta)$ интервалында да јеканә сыфыры вар.

Демәли, $\lambda\in(\bar{\lambda},\bar{\lambda}+\rho_1)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин (α,β) интервалында сыфырларынын сајы m-дән аз дејил. $|\varphi(t,\bar{\lambda})|$ функсијасынын

$$[\alpha+\varepsilon,t_1-\varepsilon],[t_1+\varepsilon,t_2-\varepsilon],\ldots,[t_{m-1}+\varepsilon,t_m-\varepsilon] \qquad (31)$$

парчаларында алдығы гијмәтләрин ән кичијини d илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, $d>0$ вә $0<\sigma<d$ шәртини өдәјән ихтијари $\sigma>0$ әдәди үчүн елә $\rho_2>0$ әдәди вар ки, $t\in[\alpha,\beta]$, $\lambda\in(\bar{\lambda},\ \bar{\lambda}+\rho_2)$ олдугда

$$|\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\bar{\lambda})|<\sigma \qquad (32)$$

шәрти өдәнир.

$\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$ ишарә едәк. Онда $\lambda\in(\bar{\lambda},\bar{\lambda}+\rho)$ үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәлләри (32) бәрабәрсизлијини өдәдијиндән (31) парчаларынын һәр бириндә

$$|\varphi(t,\lambda)|\geqslant d-\sigma>0.$$

Демәли, $\lambda\in(\bar{\lambda},\bar{\lambda}+\rho)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин бу парчаларда сыфыры јохдур.

Беләликлә, $\lambda\in(\bar{\lambda},\bar{\lambda}+\rho)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин (α,β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар вә λ артдыгча бу сыфырлар сола доғру сүрүшүрләр.

Теорем 11. (24), (30) *мәсәләсинин артан истигамәтдә дүзүлмүш сонсуз сајда $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\ldots$ мәхсуси әдәдләри вар вә λ_m мәхсуси әдәдинә ујғун олан $x_m(t)$ мәхсуси функсијасынын (α,β) интервалында m сајда сыфыры вар.*

Исбаты. Штурм теоремindән алынан 3-чү нәтичәјә әсасән $\lambda - q(t) \leqslant 0$, $t \in [\alpha, \beta]$ шәртини өдәјән λ-лар үчүн (24) тәнлијинин $\varphi(t, \lambda)$ һәлләринин (α, β) интервалында сыфыры јохдур.

Тутаг ки, $\max\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |q(t)| = c$. Онда $\lambda - c > 0$ олдугда

$$\ddot{y} + (\lambda - c) y = 0 \tag{33}$$

тәнлијинин $y(\alpha) = 0$ шәртини өдәјән һәлләри

$$y(t, \lambda) = A \sin\left[\sqrt{\lambda - c}\,(t - \alpha)\right]$$

шәклиндәдир, бурада A ихтијари сабитдир. Ајдындыр ки, λ
мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда $y(t, \lambda)$ һәллинин сыфырла-
рынын сајы сонсуз олараг артыр. Дикәр тәрәфдән, $\lambda - q(t) \geqslant$
$\geqslant \lambda - c$ олдуғундан, Штурм теореминә әсасән, (24) тәнлији-
нин $\varphi(t, \lambda)$ һәлләринин дә (α, β) интервалында сыфырларынын
сајы λ мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда сонсуз артыр.

Һәр һансы m тәбии әдәди көтүрүб λ параметринин елә гиј-
мәтләринә бахаг ки, бу гијмәтләр үчүн $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин (α, β)
јарыминтервалында јерләшән дүз m сајда сыфыры олсун. Белә λ-лар чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәдини λ_m илә ишарә
едәк.

Көстәрәк ки, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында дүз m
сајда сыфыры вар.

Доғрудан да, тутаг ки, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интерва-
лында $m - 1$ сајда сыфыры вар. Онда бу һәллин m-чи сыфы-
ры β олмалыдыр вә леммадан алынан нәтичәјә әсасән елә $\rho > 0$
әдәди вар ки, $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_m + \rho)$ үчүн $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин (α, β) ин-
тервалында дүз m сајда сыфыры олар. Бу исә λ_m-ин тә'јининә
зиддир. Демәли, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында сыфыр-
ларынын сајы m-дән аз дејил.

Тутаг ки, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында $m + l$
$(l \geqslant 1)$ сыфыры вар. Бу һәллин $(m + l)$-чи сыфыры үчүн
$t_{m+l}(\lambda_m) < \beta$ олур. Һәллин сыфырлары λ-дан кәсилмәз асылы
олдуғундан λ_m-ин елә кичик $(\lambda_m - \rho_1, \lambda_m + \rho_1)$ $(\rho_1 > 0)$ әтрафы
вар ки, бу әтрафда да $t_{m+l}(\lambda) < \beta$ шәрти өдәнир, бурада $t_{m+l}(\lambda)$
илә $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин $(m + l)$-чи сыфыры ишарә олунмушдур.
Бу исә јенә λ_m-ин тә'јининә зиддир. Демәли, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәлли-
нин (α, β) интервалында m сајда сыфыры вар.

Көстәрәк ки, $\varphi(\beta, \lambda_m) = 0$. Әксини фәрз едәк, тутаг ки,
$\varphi(\beta, \lambda_m) \neq 0$. Онда $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин λ-дан кәсилмәз асылылығына әсасән, елә $\rho_2 > 0$ әдәди вар ки, $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_m + \rho_2)$ үчүн
$\varphi(\beta, \lambda) \neq 0$ олур. Онда леммаја әсасән, белә λ-лар үчүн $\varphi(t, \lambda)$
һәллинин (α, β) интервалында m сајда сыфыры вар. Бурадан
да, λ_m-ин дәгиг јухары сәрһәд олдуғуну нәзәрә алсаг, зид-
дијјәт алырыг. Демәли, $\varphi(\beta, \lambda_m) = 0$ олмалыдыр.

Беләликлә, λ_m әдәди (24), (30) мәсәләсинин мәхсуси әдәди,
$x_m(t) = \varphi(t, \lambda_m)$ исә уйғун мәхсуси функсијасы олур вә бу

функсијанын (α, β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар. m
ихтијари тәбии әдәд олдуғундан теорем исбат олунду.

§ 5. МӘХСУСИ ӘДӘДЛӘРИН ВӘ МӘХСУСИ ФУНКСИЈАЛАРЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Бу параграфда (24), (25) Штурм—Лиувилл мәсәләсинин мәхсуси әдәдләринин вә мәхсуси функсијаларынын асимптотик ифадәләри тапылыр. Үмумилији позмадан, (25) сәрһәд шәртләриндә $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ гәбул едәк вә $a_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$ олан һала бахаг. Онда (25) шәртләрини

$$\begin{cases} \dot{x}(0) - h x(0) = 0, \\ \dot{x}(\pi) + H x(\pi) = 0 \end{cases} \tag{25'}$$

шәклиндә јазмаг олар.

(24) тәнлијинин

$$x(0, \lambda) = 1, \quad \dot{x}(0, \lambda) = h$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини $x = \omega(t, \lambda)$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, бу һәлл (25′) сәрһәд шәртләриндән биринчисини өдәјир.

Мәгсәдимиз λ параметринин бөјүк гијмәтләри үчүн мәхсуси әдәдләри өјрәнмәкдир. Одур ки, $\lambda = \mu^2$ гәбул едиб (24) тәнлијини

$$\ddot{x} + \mu^2 x = q(t) x$$

шәклиндә јазаг. Бу тәнлијин сағ тәрәфинә мә'лум ифадә кими бахараг сабитләрин вариасијасы үсулуну тәтбиг етсәк, аларыг ки, $\omega(t, \lambda)$ функсијасы

$$\omega(t, \lambda) = \cos \mu t + \frac{h}{\mu} \sin \mu t + \frac{1}{\mu} \int_0^t q(s) \sin \mu (t - s)\, \omega(s, \lambda)\, ds \tag{34}$$

интеграл тәнлијинин һәллидир.

Лемма 2. $\lambda > 0$ *олдугда* λ *вә* t*-дән асылы олмајан елә* M *әдәди вар ки,*

$$|\omega(t, \lambda)| \leqslant M.$$

Исбаты. Һәр бир $\lambda > 0$ үчүн $M_\lambda = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |\omega(t, \lambda)|$ ишарә едәк. Шәртә көрә $\omega(t, \lambda)$ функсијасы (24) тәнлијинин һәлли олдуғундан M_λ әдәди сонлудур. Онда (34) мүнасибәтиндән ајдындыр ки,

$$|\omega(t, \lambda)| \leqslant 1 + \frac{|h|}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^\pi |q(t)|\, M_\lambda\, dt$$

бәрабәрсизлиjи доғрудур. Бурадан

$$M_\lambda \le 1 + \frac{|h|}{\mu} + \frac{M_\lambda}{\mu}\int_0^\pi |q(t)|dt$$

бәрабәрсизлиjи алыныр. Тутаг ки, $\mu > \int_0^\pi |q(s)|ds.$

Онда сонунҹу бәрабәрсизликдән

$$M_\lambda \le \frac{\mu+|h|}{\mu-\int_0^\pi|q(t)|dt} = 1 + \frac{\int_0^\pi |q(t)|dt}{\mu - \int_0^\pi|q(t)|dt} + \frac{|h|}{\mu-\int_0^\pi|q(t)|dt}.$$

Бурадан, аjдындыр ки, $\mu > 2\int_0^\pi|q(t)|dt$ оларса,

$$M_\lambda < 2 + |h| \left(\int_0^\pi |q(t)|dt\right)^{-1}.$$

Бу бәрабәрсизлиjин сағ тәрәфи λ вә t-дән асылы олмадығындан алырыг ки, $\mu > 2\int_0^\pi|q(t)|dt$ олдугда M_λ әдәдләри jухарыдан мәhдуддур. $0<\mu\le 2\int_0^\pi|q(t)|dt$ олдугда исә M_λ әдәдләринин мәhдудлуғу $\omega(t,\lambda)$ функсиjасынын λ параметринә нәзәрән кәсилмәз олмасындан алыныр. Одур ки, $M = \sup_\lambda M_\lambda$ ишарә етсәк, M сонлу әдәд олар. Лемма исбат олунду.

Леммадан алыныр ки,

$$\omega(t,\lambda) = \cos\mu t + O\left(\frac{1}{\mu}\right)^{*}. \qquad (35)$$

Инди λ параметрини елә сечәк ки, $\omega(t,\lambda)$ функсиjасы (25') шәртләриндән икинҹисини дә өдәсин (аjдындыр ки, λ параметринин белә гиjмәтләри (24), (25') мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри олур). Бунун үчүн (34) еjнилиjинин t-jә нәзәрән төрәмәсини тапыб (35) мүнасибәтини дә нәзәрә алаг. Онда

* Бурада $f(x)=O((g(x))$ ишарәси, $x = a$ нөгтәсинин мүәjjән әтрафында тә'jин олунан $f(x)$ вә $g(x)$ функсиjалары үчүн $x\ne a$ олдугда $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбәтинин x дәjишәни a-jа jахынлашдыгда мәhдуд олдуғуну көстәрир.

$$\omega_t'(t,\lambda) = -\mu\sin\mu t + h\cos\mu t + O(1) \qquad (36)$$

мүнасибәтини аларыг.

Алынмыш (35), (36) мүнасибәтләрини (25') шәртләриндән икинҹисиндә jазсаг, мәхсуси әдәдләри тә'jин етмәк үчүн

$$-\mu\sin\mu\pi + (h+H)\cos\mu\pi + O(1) = 0 \qquad (37)$$

тәнлиjини аларыг.

$$\varphi(\mu) = -\mu\sin\mu\pi + (h+H)\cos\mu\pi + O(1)$$

ишарә едәк. Аjдындыр ки, $\varphi(\mu)$ функсиjасы $(-\infty,+\infty)$ интервалында кәсилмәздир вә кифаjәт гәдәр бөjүк n-ләр үчүн $\left[n-\frac12, n+\frac12\right]$ парчасынын учларында мүхтәлиф ишарәли гиjмәтләр алыр. Бурадан Коши теореминә әсасән алырыг ки, $\varphi(\mu)$ функсиjасынын $\left(n-\frac12, n+\frac12\right)$ интервалында heч олмаса бир сыфыры вар. Бу исә көстәрир ки, (37) тәнлиjинин кифаjәт гәдәр бөjүк μ-ләр үчүн сонсуз саjда hәгиги көкләри вар. Аjдындыр ки, бу көкләр $\sin\mu\pi = 0$ тәнлиjинин көкләринә jахын олмалыдыр. Одур ки, бөjүк μ-ләр үчүн (37) тәнлиjинин көкләрини

$$\mu_n = n + \sigma_n \qquad (38)$$

шәклиндә көстәрмәк олар; бурада σ_n-ләр

$$-(n+\sigma_n)\sin\sigma_n\pi + (h+H)\cos\sigma_n\pi + O(1) = 0$$

мүнасибәтиндән тә'jин олунур. Бу бәрабәрлик исә $\sigma_n = O\left(\frac1n\right)$ олдугда доғрудур. Бу ифадәни (38)-дә jеринә jазсаг, (24), (25') мәсәләсинин мәхсуси әдәдләринин квадрат көкләри үчүн

$$\mu_n = n + O\left(\frac1n\right) \qquad (39)$$

асимптотикасыны аларыг.

Көстәрәк ки, $q(t)$ функсиjасынын мәhдуд төрәмәси варса, (37) дүстуруну дәгигләшдирмәк олар. Бунун үчүн $\omega(t,\lambda)$ функсиjасынын (34) ифадәсини вә бурадан алынан

$$\omega_t'(t,\lambda) = -\mu\sin\mu t + h\cos\mu t + \int_0^t q(s)\cos\mu(t-s)\,\omega(s,\lambda)ds$$

төрәмәсини (25') сәрhәд шәртләринин икинҹисиндә jеринә jазыб группалашдыраг:

$$(-\mu + B)\sin\mu\pi + A\cos\mu\pi = 0, \qquad (40)$$

$$A = h + H + \int_0^\pi\left(\cos\mu s + \frac{H}{\mu}\sin\mu s\right)q(s)\,\omega(s;\lambda)ds,$$

$$B=\frac{hH}{\mu}+\int_0^{\pi}\left(\sin\mu s+\frac{H}{\mu}\right)q(s)\omega(s,\lambda)ds.$$

Бурада $\omega(t,\lambda)$ функсиіасынын (35) ифадәсини іеринә іазсаг

$$A=h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\cos 2\mu t dt+O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

$$B=\frac{hH}{\mu}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\sin 2\mu t dt+O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

олар. $q(t)$ функсиіасынын мәһдуд төрәмәси олдуғундан һиссә-һиссә интеграллламагла аларыг ки,

$$\int_0^{\pi}q(t)\cos 2\mu t dt=\frac{1}{2\mu}q(\pi)\sin 2\mu\pi-\frac{1}{2\mu}\int_0^{\pi}\dot q(t)\sin 2\mu t dt=O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\int_0^{\pi}q(t)\sin 2\mu t dt=-\frac{1}{2\mu}\left[q(\pi)\cos 2\mu\pi-q(0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\mu}\int_0^{\pi}\dot q(t)\cos 2\mu t dt=O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Беләликлә, A вә B әдәдләри үчүн

$$A=h+H+h_1+O\left(\frac{1}{\mu}\right),\ B=O\left(\frac{1}{\mu}\right),\ h_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt$$

мүнасибәтләри доғрудур. Бу гиіләтләри (40) тәнлиіиндә нәзәрә алыб ону

$$\operatorname{tg}\mu\pi=\frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\mu+O\left(\frac{1}{\mu}\right)}$$

шәклиндә іазаг. Бурада $\mu_n=n+\sigma_n$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\operatorname{tg}\sigma_n\pi=\frac{h+H+h_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Демәли, кафи гәдәр бөіүк n-ләр үчүн

$$\pi\sigma_n=\frac{H+h+h_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

олмалыдыр. Одур ки,

$$\mu_n=n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ c=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)dt\right). \qquad (41)$$

Мәхсуси әдәдләр үчүн алынмыш (41) асимптотик дүстурундан истифадә едәрәк $x_n(t)=\omega(t,\lambda_n)$ мәхсуси функсиіасынын асимптотик ифадәсини тапаг. Бунун үчүн $\omega(t,\lambda)$ функсиіасынын (35) ифадәсини (34)-дә интеграл алтында іеринә іазаг вә $q(t)$ функсиіасынын мәһдуд төрәмәсини варлығыны нәзәрә алаг. Онда

$$\omega(t,\lambda)=\cos\mu t+\frac{h}{\mu}\sin\mu t+\frac{1}{\mu}\int_0^t q(s)\cos\mu s\sin\mu(t-s)ds+$$

$$+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)=\cos\mu t+\frac{h}{\mu}\sin\mu t+\frac{\sin\mu t}{2\mu}\int_0^t q(s)ds+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

олар. Бурада $\mu=\mu_n$ көтүрүб (41) ифадәсини нәзәрә алсаг

$$x_n(t)=\omega(t,\lambda_n)=\cos nt-\frac{ct}{n}\sin nt+\frac{h}{n}\sin nt+$$

$$+\frac{\sin nt}{2n}\int_0^t q(s)ds+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Сонунчу мүнасибәтдә

$$\beta(t)=-ct+h+\frac{1}{2}\int_0^t q(s)ds \text{ гәбул етсәк}$$

$$x_n(t)=\cos nt+\frac{\beta(t)}{n}\sin nt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (42)$$

Беләликлә, (24), (25′) Штурм—Лиувилл мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри вә мәхсуси функсиіалары үчүн (41) вә (42) асимптотик дүстурлары доғрудур.

Геід едәк ки, (25) сәрһәд шәртләриндә a_{12}, b_{22} әдәдләриндән бири вә іа һәр икиси сыфыр олан һалларда да асимптотик дүстурлар алмаг олар.

§ 6. ГЕІРИ-ХӘТТИ СӘРҺӘД МӘСӘЛӘСИ

Тутаг ки,

$$\ddot x=f(t,x) \qquad (43)$$

тәнлиіинин

$$x(\alpha)=A,\ x(\beta)=B \qquad (44)$$

сәрһәд шәртләрини өдәіән һәллини тапмаг тәләб олунур, бурада $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$, A, B верилмиш һәгиги әдәдләрдир.

Бу мәсәләнин һәлли

$$x = y + \frac{B-A}{\beta-\alpha} t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta - \alpha} \qquad (45)$$

әвәзләмәси илә

$$\ddot{y} = F(t, y) \qquad (43')$$

тәнлијинин

$$y(\alpha) = 0, \ y(\beta) = 0 \qquad (44')$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир; бурада

$$F(t, y) = f\left(t, y + \frac{B-A}{\beta-\alpha} t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta-\alpha}\right).$$

Грин дүстурундан истифадә едәрәк көстәрәк ки, бахылан мәсәләнин һәллинин тапылмасы, мүәјјән интеграл тәнлијин һәллинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (бах: § 6 теорем 7)

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -\dfrac{(t-\alpha)(\beta-\tau)}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq t \leq \tau, \\ -\dfrac{(\tau-\alpha)(\beta-t)}{\beta-\alpha}, & \tau \leq t \leq \beta \end{cases}$$

функсијасы $\ddot{y} = 0$ тәнлијинин (44') сәрһәд шәртләрини өдәјән Грин функсијасыдыр. (43') тәнлијинин сағ тәрәфинә мә'лум функсија кими бахсаг, бу тәнлијин (44') сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси, Грин дүстуруна әсасән,

$$y(t) = \int_\alpha^\beta G(t, \tau) F(\tau, y(\tau)) \, d\tau$$

интеграл тәнлијинин һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Алынан интеграл тәнликдә (45) әвәзләмәсини нәзәрә алсаг, (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин һәлли үчүн

$$x(t) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) \, d\tau \qquad (46)$$

интеграл тәнлијини аларыг; бурада

$$\varphi_0(t) = \frac{B-A}{\beta-\alpha} t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta - \alpha}.$$

Сәккизинчи теоремин исбат гајдасы илә асанлыгла көстәрмәк олар ки, (46) тәнлијинин һәр бир кәсилмәз һәлли (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин һәллидир.

Теорем 12. *Тутаг ки, $f(t, x)$ функсијасы $D = \{\alpha \leq t \leq \beta; -\infty < x < +\infty\}$ золағында кәсилмәздир вә*

а) $|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$,

б) $K(\beta - \alpha)^2 < 8$

шәртләри өдәнир. Онда (43) тәнлијинин (44) сәрһәд шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Исбаты. $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз олан функсијалар чохлуғуну $C[\alpha, \beta]$ илә ишарә едәк вә бу чохлугда

$$A(\varphi(t)) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t, \tau) f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau$$

операторуна бахаг.

Грин функсијасы вә $f(t, x)$ функсијасы кәсилмәз олдуғундан һәр бир $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$ функсијасы үчүн

$$\psi(t) \equiv A(\varphi(t)) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t, \tau) f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau$$

функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир. Демәли, A оператору $C[\alpha, \beta]$ чохлуғунда тә'сир едир.

Теоремин а) шәртинә әсасән ихтијари ики $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C[\alpha, \beta]$ функсијалары үчүн

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\varphi_1(t))| \leq K \int_\alpha^\beta |G(t, \tau)| \, |\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)| \, d\tau \leq$$

$$\leq K \sup_{\alpha \leq \tau \leq \beta} |\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)| \int_\alpha^\beta |G(t, \tau)| \, d\tau \qquad (47)$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Грин функсијасынын ифадәсинә әсасән

$$\int_\alpha^\beta |G(t, \tau)| \, d\tau = \int_\alpha^t |G(t, \tau)| \, d\tau + \int_t^\beta |G(t, \tau)| \, d\tau =$$

$$= \frac{(\beta - t)(t - \alpha)^2}{2(\beta - \alpha)} + \frac{(t - \alpha)(\beta - t)^2}{2(\beta - \alpha)}.$$

Көстәрмәк олар ки,

$$H(t) = \frac{(\beta - t)(t - \alpha)^2}{2(\beta - \alpha)} + \frac{(t - \alpha)(\beta - t)^2}{2(\beta - \alpha)}$$

функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында ән бөјүк гијмәтини $t = \frac{\alpha + \beta}{2}$ нөгтәсиндә алыр вә

$$H\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{8}.$$

Она көрә дә

$$\int_\alpha^\beta |G(t, \tau)| \, d\tau \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{8}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Бу бәрабәрсизлији (47)-дә нәзәрә алсаг,

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\varphi_1(t))| \leqslant \frac{K(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|. \qquad (48)$$

Бурадан, теоремин б) шәртинә әсасән алырыг ки, A оператору $C[\alpha, \beta]$ чохлуғунда сыхан оператордур. Онда сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән (II фәсил § 8) алырыг ки, (46) интеграл тәнлијинин $C[\alpha, \beta]$ чохлуғунда јеканә һәлли вар. Еквивалентлијә әсасән, бу һәлл һәм дә (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин һәллидир. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, $f(t, x)$ функсијасы гапалы $D_R = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta;\ -R \leqslant x \leqslant R\}$ областында теоремин шәртләрини өдәјир вә*

$$\sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi_0(t)| + \frac{(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{D_R} |f(t, x)| \leqslant R. \qquad (49)$$

Онда (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин јеканә һәлли вар.

Исбаты. $C[\alpha, \beta]$ чохлуғунда $\sup\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi(t)| \leqslant R$ шәртини өдәјән $\varphi(t)$ функсијалары чохлуғуну $\Phi = \{\varphi(t)\}$ илә ишарә едәк вә јухарыда тә'јин олунан A операторуна Φ чохлуғунда бахаг.

Ихтијари $\varphi(t) \in \Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(t))| \leqslant |\varphi_0(t)| + \int_\alpha^\beta |G(t, \tau)|\,|f(\tau, \varphi(\tau))|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi_0(t)| + \frac{(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{D_R} |f(t, x)|$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Бурадан, (49) шәртинә әсасән алырыг ки, $|A(\varphi(t))| \leqslant R$. Јә'ни A оператору Φ чохлуғунда тә'сир едир.

Дикәр тәрәфдән, теоремин а) шәртинә көрә ихтијари $\varphi(t)$, $\psi(t) \in \Phi$ үчүн (48) бәрабәрсизлији өдәнир вә б) шәртинә әсасән A оператору Φ чохлуғунда сыхандыр.

Беләликлә, Φ чохлуғу вә A оператору үчүн сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләри өдәнир. Она көрә дә (46) интеграл тәнлијинин Φ чохлуғунда јеканә һәлли вар. Нәтичә исбат олунду.

Гејд едәк ки, теоремин шәртләри өдәнмәдикдә сәрһәд мәсәләсинин һәлли олмаја да биләр. Буну көстәрмәк үчүн

$$\ddot{x} = 1 - x,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$$

сәрһәд мәсәләсинә бахаг. Бу мәсәләдә

$$K = 1,\ K(\beta - \alpha)^2 = \pi^2 > 8.$$

Ајдындыр ки, $x = c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1$ аиләси $\ddot{x} = 1 - x$ тәнлијинин үмуми һәллидир вә бу аилә ичәрисиндә $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ шәртини өдәјән функсија јохдур.

Инди

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \qquad (50)$$

тәнлијинин

$$x(\alpha) = 0,\ x(\beta) = 0 \qquad (51)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә бахаг.

Јухарыдакы мүһакимәләрә әсасән алырыг ки, (50) тәнлијинин (51) сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлли һәм дә

$$x(t) = \int_\alpha^\beta G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\,d\tau$$

тәнлијинин һәллидир. Бурадан

$$\dot{x}(t) = \int_\alpha^\beta G_t(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau))\,d\tau$$

олдуғундан, (50), (51) сәрһәд мәсәләсинин һәллинин тапылмасы

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \int_\alpha^\beta G(t, \tau) f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))\,d\tau, \\ \varphi_2(t) = \int_\alpha^\beta G_t(t, \tau) f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))\,d\tau \end{cases} \qquad (52)$$

интеграл тәнликләр системинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Теорем 13. *Тутаг ки, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы $\Pi = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta;\ -\infty < x_i < +\infty,\ i = 1, 2\}$ золағында кәсилмәздир вә*

а) $|f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2)| \leqslant K_1 |x_1 - y_1| + K_2 |x_2 - y_2|$,

б) $\dfrac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} + \dfrac{K_2(\beta-\alpha)}{2} < 1$

шәртләри өдәнир. Онда (50) тәнлијинин (51) сәрһәд шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Исбаты. Теоремин исбат етмәк үчүн көстәрәк ки, (52) интеграл тәнликләр системинин јеканә кәсилмәз һәлли вар.

Бу мәгсәдлә компонентләри $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз олан $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијалар чохлуғуну $C_2[\alpha, \beta]$ илә ишарә едәк. Һәр бир $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in C_2[\alpha, \beta]$ вектор-функсијасына

$$\|\varphi\| = \max\left\{\sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi_1(t)|,\ \frac{\beta-\alpha}{4} \sup_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |\varphi_2(t)|\right\}$$

әдәдини гаршы гојаг. Бу әдәдә $\varphi(t)$ вектор функсијасынын *нормасы* дејилир.

Әкәр $C_2[\alpha, \beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\{\varphi^n(t)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы вә $\varphi(t)$ вектор-функсијасы үчүн

$\lim\limits_{n\to\infty} \| \varphi^n(t) - \varphi(t) \| = 0$ оларса, дејирләр ки, $\{\varphi^n(t)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы норма мә'нада $\varphi(t)$ вектор-функсијасына јығылыр. Норманын тә'јининдән ајдындыр ки, бу вектор-функсијалар ардычыллығынын компонентләриндән дүзәлдилмиш $\{\varphi_1^n(t)\}$, $\{\varphi_2^n(t)\}$ ардычыллыглары үјғун олараг $\varphi(t)$ вектор-функсијасынын компонентләри олан $\varphi_1(t)$ $\varphi_2(t)$ функсијаларына $[\alpha,\beta]$ парчасында мүнтәзәм јығылырлар. Она көрә $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда норма мә'нада јығылан һәр бир ардычыллығын лимити дә бу чохлуға дахилдир. $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш һәр бир $\varphi(t)=(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијасына, компонентләри

$$\psi_1(t)=\int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))\,d\tau,$$

$$\psi_2(t)=\int_\alpha^\beta G_1(t,\tau) f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))\,d\tau$$

дүстурлары илә тә'јин олунан $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))$ вектор-функсијасыны гаршы гојаг. Онда $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда бир оператор тә'јин олунур. Бу оператору A илә ишарә едәк. Операторун тә'јининә көрә $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ вектор-функсијасына һәмин чохлуға дахил олан $A(\varphi(t))=(A(\varphi_1(t)), A(\varphi_2(t)))$ вектор-функсијасы гаршы гојулур.

Көстәрәк ки, бу оператор $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда сыхандыр. Истәнилән ики $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$, $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))$ вектор-функсијалары үчүн

$$A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t)) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau)[f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)) - f(\tau,\psi_1(\tau),\psi_2(\tau))]\,d\tau,$$

$$A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t)) = \int_\alpha^\beta G_1(t,\tau)[f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)) - f(\tau,\psi_1(\tau),\psi_2(\tau))]\,d\tau$$

бәрабәрликләри өдәндијиндән, теоремин а) шәртинә әсасән

$$|A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t))| \leqslant \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|\,d\tau \Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t)-\psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t)-\psi_2(t)|\Big];$$

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t))| \leqslant \int_\alpha^\beta |G_1(t,\tau)|\,d\tau \Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t)-\psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t)-\psi_2(t)|\Big].$$

Грин функсијасынын ифадәсинә әсасән

$$\int_\alpha^\beta |G_1(t,\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

олдуғуну көстәрмәк олар. Демәли,

$$|A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t))| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t)-\psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t)-\psi_2(t)|\Big],$$

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t))| \leqslant \frac{\beta-\alpha}{2}\Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t)-\psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t)-\psi_2(t)|\Big].$$

Бурадан, $C_2[\alpha,\beta]$-дә норманын тә'јининә әсасән

$$\|A(\varphi)-A(\psi)\| = \max\Big\{\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |A(\varphi_1(t))-A(\psi_1(t))|,\ \frac{\beta-\alpha}{4}\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|A(\varphi_2(t))-A(\psi_2(t))|\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\beta-\alpha)}{8}\Big[K_1\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_1(t)-\psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_2(t)-\psi_2(t)|\Big] =$$

$$= \frac{K_1(\beta-\alpha)}{8}\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_1(t)-\psi_1(t)| + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\times$$

$$\times\frac{\beta-\alpha}{4}\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_2(t)-\psi_2(t)| \leqslant \Big[\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8}+\frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\Big]\|\varphi-\psi\|.$$

Беләликлә, $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\varphi(t)$, $\psi(t)$ вектор-функсијалары үчүн

$$\|A(\varphi)-A(\psi)\| \leqslant \Big[\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8}+\frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\Big]\|\varphi-\psi\| \quad (53)$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Бурадан теоремин б) шәртинә әсасән алырыг ки, A оператору $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда сыхандыр.

Демәли, (52) интеграл тәнликләр системинин јеканә кәсилмәз һәлли вар. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, $f(t,x_1,x_2)$ функсијасы гапалы $\Pi_R=\{\alpha\leqslant t\leqslant\beta;\ -R_1\leqslant x_1\leqslant R_1;\ -R_2\leqslant x_2\leqslant R_2\}$ областында кәсилмәздир, теоремин а), б) шәртләри өдәнир вә*

$$M(\beta-\alpha)^2\leqslant 8R_1,\quad M(\beta-\alpha)\leqslant 2R_2,\quad M=\sup_{\Pi_R}|f(t,x_1,x_2)|.$$

Онда (50), (51) сәрһәд мәсәләсинин јеканә һәлли вар.

Исбаты. $C_2[\alpha, \beta]$ чохлуғундан компонентләри $\sup\limits_{\alpha\leq t\leq\beta} |\varphi_1(t)| \leq R_1$, $\sup\limits_{\alpha\leq t\leq\beta} |\varphi_2(t)| \leq R_2$ шәртини өдәјән $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијалар чохлуғуну Φ_2 илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, Φ_2 чохлуғунун норма мә'нада јығылан һәр бир вектор-функсијалар ардычыллығынын лимити дә бу чохлуға дахилдир.

Көстәрәк ки, теоремин исбаты заманы тә'јин олунан A оператору Φ_2 чохлуғунда тә'сир едир вә бурада сыхандыр.

Доғрудан да, һәр бир $\varphi(t) \in \Phi_2$ үчүн

$$A(\varphi_1(t)) = \int_\alpha^\beta G(t, \tau) f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))\, d\tau,$$

$$A(\varphi_2(t)) = \int_\alpha^\beta G_1(t, \tau) f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))\, d\tau$$

олдуғундан,

$$|A(\varphi_1(t))| \leq \int_\alpha^\beta |G(t, \tau)| \, |f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))| \, d\tau \leq \frac{M(\beta-\alpha)^2}{8},$$

$$|A(\varphi_2(t))| \leq \int_\alpha^\beta |G_1(t, \tau)| \, |f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))| \, d\tau \leq \frac{M(\beta-\alpha)}{2}.$$

Бурадан нәтиҹәнин сонунҹу шәртинә әсасән

$$\sup_{\alpha\leq t\leq\beta} |A(\varphi_1(t))| \leq R_1, \quad \sup_{\alpha\leq t\leq\beta} |A(\varphi_2(t))| \leq R_2.$$

Демәли, $A(\varphi(t)) = (A(\varphi_1(t)), A(\varphi_2(t)))$ вектор-функсијасы Φ_2 чохлуғуна дахил олур, ја'ни A оператору Φ_2 чохлуғунда тә'сир едир. Бундан башга, Φ_2 чохлуғундан көтүрүлмүш ихтијари $\varphi(t)$ $\psi(t)$ вектор-функсијалары үчүн (53) бәрабәрсизлији доғрудур. Она көрә A оператору Φ_2 чохлуғунда сыхан операторудур. Сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән (52) интеграл тәнликләр системинин Φ_2 чохлуғунда јеканә һәлли вар. Нәтиҹә исбат олунду.

§ 7. БЕССЕЛ ТӘНЛИЈИ ВӘ БЕССЕЛ ФУНКСИЈАЛАРЫ

а) *Бессел тәнлији.* Бир чох ријази физика мәсәләләринин һәллиндә Бессел тәнлији адланан

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \nu^2)x = 0 \qquad (54)$$

тәнлијиндән истифадә олунур; бурада ν параметрдир вә тәнлијин индекси адланыр. Бессел тәнлији ν параметринин анҹаг бә'зи гијмәтләриндә квадратура илә һәлл олунур.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\nu = \frac{1}{2}$ олдугда алынан

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x = 0 \qquad (55)$$

тәнлији $x = t^{-\frac{1}{2}}y$ $(t > 0)$ әвәзләмәси илә

$$\ddot{y} + y = 0$$

тәнлијинә кәтирилир. Бу тәнлијин $y_1 = \sin t$, $y_2 = \cos t$ хәтти асылы олмајан һәлләри үчүн $x_1 = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $x_2 = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ функсијалары $(0, +\infty)$ интервалында (55) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләри олур.

Ајдындыр ки,

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots, \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots$$

ајрылышларындан истифадә етсәк, бу һәлләри

$$x_1 = t^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \cdots\right), \quad x_2 = t^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right)$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Демәли, (55) тәнлијинин тапылмыш һәлләри $t^{\frac{1}{2}}$, $t^{-\frac{1}{2}}$ функсијалары илә, јығылан гүввәт сыраларынын һасили кими көстәрилир. Она көрә көзләмәк олар ки (54) тәнлијинин дә $t^\nu \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t^{-\nu} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ шәклиндә һәлләри вар.

Тәнликдә анҹаг ν^2 иштирак етдијиндән, үмумилији позмадан, $\nu \geq 0$ гәбул едәк вә онун һәллини

$$x = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \qquad (56)$$

шәклиндә ахтараг. Формал олараг (56) сырасыны (54) тәнлијиндә јазыб t-нин дәрәҹәләри үзрә груплашдырсаг вә ејни дәрәҹәләрин әмсалларыны сыфра бәрабәр етсәк,

$$(2\nu + 1)a_1 = 0, \quad k(2\nu + k)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots$$

ҹәбри тәнликләрини аларыг. Бурадан,

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu + k)}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Бу дүстурлардан ајдындыр ки,

$$a_{2m+1} = 0, \quad a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + m)m!}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Беләликлә,

$$a_0 t^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{2^{2m}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\,m!} \qquad (57)$$

сырасы (54) тәнлијинин формал һәлли олур.

Гејд едәк ки, ν там әдәд олмадыгда, мәнфи t-ләр үчүн t^{ν}, үмумијјәтлә, хәјали гијмәтләр алыр. Она көрә дә ν там әдәд олмадыгда (57) сырасына $(0, +\infty)$ интервалында бахылыр.

Даламбер әламәтинә әсасән, (57) сырасы һәр бир $t>0$ үчүн мүтләг јығылыр. Она көрә дә ихтијари $a_0 \neq 0$ үчүн (57) сырасы $(0, +\infty)$ интервалында (54) тәнлијинин һәлли олур.

Бу һәллдә $a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$ көтүрмәклә алынан

$$J_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\,m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}$$

функсијасына *биринчи нөв ν индексли Бессел функсијасы* дејилир. Бурада $\Gamma(\mu)$ илә гамма-функсија ишарә олунмушдур. Мә'лумдур ки,

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mu-1}\,dt \quad (0<\mu<+\infty).$$

Бурадан һиссә-һиссә интеграламагла

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$$

дүстуруну аларыг. Истәнилән k тәбии әдәди үчүн, бу дүстуру k дәфә ардычыл тәтбиг етсәк,

$$\Gamma(\mu+k+1) = (\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+k)\,\Gamma(\mu+1). \qquad (58)$$

Ајдындыр ки, $\Gamma(1)=1$ вә (58) дүстуруна әсасән $\Gamma(k+1)=k!$. Бу дүстурлара әсасән $J_{\nu}(t)$ Бессел функсијасыны

$$J_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Еіни гајда илә (54) тәнлијинин $t^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \ (b_0 \neq 0)$ шәклиндә һәллини дә гура биләрик вә бу сыраны да гамма-функсија васитәсилә ифадә етмәк олар. Бунун үчүн әввәлҹә гамма-функсијаны мәнфи μ-ләр үчүн тә'јин едәк.

Тутаг ки, $\mu \in (-1, 0)$. Онда $\mu+1>0$. Белә μ-ләр үчүн гамма-функсијаны

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu}\Gamma(\mu+1)$$

дүстуру илә тә'јин едәк. Әкәр $\mu \in (-2, -1)$ оларса $\mu+2>0$ вә белә μ-ләр үчүн гамма-функсијаны

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu(\mu+1)}\Gamma(\mu+2)$$

дүстуру илә тә'јин едәк вә с. Бу гајда илә истәнилән k тәбии әдәди үчүн $\mu \in (-k, -(k-1))$ олдугда гамма-функсијаны

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+k-1)}\Gamma(\mu+k), \quad k=1, 2, \ldots$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Тә'јин олунма гајдасындан ајдындыр ки, там олмајан мәнфи μ-ләр үчүн дә (58) дүстуру доғрудур вә $\lim_{\mu\to -k}\Gamma(\mu)=\infty$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Она көрә дә $\Gamma(-k)=\infty$, $k=0, 1, 2, \ldots$ гәбул олунур. Әлавә олараг гејд едәк ки, $\Gamma(\mu)$ функсијасы үчүн

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \qquad (59)$$

дүстуру доғрудур.

Ајдындыр ки, (54) тәнлијиндә ν әвәзинә $-\nu$ јаздыгда тәнлик дәјишмир. Она көрә дә там олмајан ν-ләр үчүн тәнлијин $t^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \ (b_0 \neq 0)$ шәклиндә һәллини $J_{\nu}(t)$-нин ифадәсиндә ν әвәзинә $-\nu$ јазмагла алмаг олар. Онда (54) тәнлијинин

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu}$$

һәлли алынар.

Бу гајда илә гурулан $J_{-\nu}(t)$ функсијасына $-\nu$ *индексли биринчи нөв Бессел функсијасы* дејилир.

Там олмајан ν-ләр үчүн $J_{\nu}(t)$ вә $J_{-\nu}(t)$ функсијаларынын ајрылышларында t-нин мүхтәлиф дәрәҹәләри иштирак едир. Она көрә там олмајан ν-ләр үчүн $J_{\nu}(t)$, $J_{-\nu}(t)$ функсијалары (54) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләри олурлар вә онун үмуми һәлли

$$x = c_1 J_{\nu}(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$$

шәклиндәдир; бурада c_1, c_2 ихтијари сабитләрдир.

Инди ν там әдәд олан һала бахаг. Тутаг ки, $\nu = n$ (бурада n там әдәддир). Онда $m-n+1 \leq 0$ олдугда $\Gamma(m-n+1)=\infty$ олдуғундан, $J_{-n}(t)$-нин ифадәси ашағыдакы шәклә дүшүр:

$$J_{-n}(t) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}.$$

Бурада $m = n + l$ əвəзләмəси апарсаг,

$$J_{-n}(t) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{n+l}\frac{1}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n} =$$

$$= (-1)^n\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}.$$

Jə'ни $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$. Демәли, там ν-ләр үчүн $J_n(t)$, $J_{-n}(t)$ функсиjалары Бессел тәнлиjинин хәтти асылы һәлләри олур вә онун үмуми һәллини бу һәлләрин хәтти комбинасиjасы кими көстәрмәк олмаз.

Там ν-ләр үчүн Бессел тәнлиjинин үмуми һәлли мүхтәлиф гаjдаларла гурулур. Бу гаjдалардан бири, мә'лум $J_n(t)$ һәллинә вә Остроградски-Лиувилл-Jакоби дүстуруна әсасланыр. Һәмин дүстура әсасән, Бессел тәнлиjинин үмуми һәллинин тапылмасы

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x}{J_n(t)}\right] = \frac{c_2}{J_n^2(t)}\, e^{-\int\frac{dt}{t}}$$

тәнлиjинин интегралланмасына кәтирилир. Бурадан

$$x = c_1 J_n(t) + c_2 J_n(t)\int\frac{dt}{t\, J_n^2(t)}.$$

Икинчи үсул. Бессел тәнлиjинин $J_n(t)$ һәлли илә хәтти асылы олмаjан һәллини гурмагдан ибарәтдир. Бу мәгсәдлә $0<\varepsilon<1$ шәртини өдәjән ихтиjари ε әдәди үчүн

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + [t^2 - (n-\varepsilon)^2]\,x = 0 \qquad (60)$$

тәнлиjинә бахаг. Бурада $n-\varepsilon$ там әдәд олмадыгындан тәнлиjин $J_{n-\varepsilon}(t)$, $J_{-(n-\varepsilon)}(t)$ кими хәтти асылы олмаjан һәлләри вар вә аjдындыр ки,

$$Y_{n-\varepsilon}(t) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(t) - J_{n-\varepsilon}(t)}{\varepsilon}$$

функсиjасы да (60) тәнлиjинин һәллидир. Көстәрәк ки, сонлу $\lim_{\varepsilon\to 0} Y_{n-\varepsilon}(t) = Y_n(t)$ вар вә $Y_n(t)$ лимит функсиjасы $\nu = n$ үчүн (54) тәнлиjинин һәллидир. Бунун үчүн $J_{n-\varepsilon}(t)$, $J_{-(n-\varepsilon)}(t)$ функсиjаларынын ифадәләриндән истифадә едәрәк $Y_{n-\varepsilon}(t)$-ни ачыг шәкилдә jазаг:

$$Y_{n-\varepsilon}(t) = (-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon} -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n-\varepsilon} =$$

$$= (-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon} +$$

$$+ (-1)^n\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon} -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n-\varepsilon}.$$

Икинчи топланандa m əвəзинə $n+m$ jазсаг,

$$Y_{n-\varepsilon}(t) = (-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{F_m(\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}$$

олар; бурада

$$F_m(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\varepsilon} -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Jухарыда көстәрдик ки, $m=0, 1, \ldots, n-1$ олдугда $\Gamma(m-n+1)=\infty$. Одур ки, белә m-ләр үчүн $\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma(m-n+\varepsilon+1)=\infty$ вә $\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon$ ифадәси ε сыфра jахынлашдыгда $\infty\cdot 0$ шәкилли гејри-мүәjјәнлик тәшкил едир. Бу гејри-мүәjјәнлиjи ачмаг үчүн $\frac{1}{\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}$ ифадәсинин ε сыфра jахынлашдыгда лимитини һесаблаjаг. (59) дүстуруна әсасән

$$\Gamma(m-n+\varepsilon+1) = \Gamma(1-(n-\varepsilon-m)) = \frac{\pi}{\Gamma(n-\varepsilon-m)\sin(n-\varepsilon-m)\pi}$$

олдуғундан, Лопитал гаjдасыны тәтбиг етсәк,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma(n-\varepsilon-m)\sin(n-\varepsilon-m)\pi}{\pi\varepsilon} =$$

$$= -\Gamma(n-m)\cos(n-m)\pi = (-1)^{n-m+1}\Gamma(n-m).$$

Онда

$$\lim_{\varepsilon\to0}(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon} = -\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(m+1)}.$$

Инди $\frac{F_m(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ифадәсинин лимитини һесаблаjаг. Лопитал гаjдасына әсасән

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{F_m(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0}F'_m(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0}\Big\{-\frac{\Gamma'(m+\varepsilon+1)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma^2(m+\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\varepsilon} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\varepsilon}\ln\frac{t}{2} - \frac{\Gamma'(m+n-\varepsilon+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m+n-\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\varepsilon} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\varepsilon}\ln\frac{t}{2}\Big\} = \frac{2}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\ln\frac{t}{2} -$$

$$-\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma^2(m+1)} - \frac{\Gamma'(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m+n+1)}.$$

Бу ифадәләри нәзәрә алсаг,

$$Y_n(t) = -\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\Big\{2\ln\frac{t}{2} -$$

$$-\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} - \frac{\Gamma'(m+n+1)}{\Gamma(m+n+1)}\Big\}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}.$$

Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәз асылылығы һаггында теоремә әсасән алырыг ки, $Y_n(t)$ функсиасы $\nu=n$ үчүн (54) тәнлиjинин һәллидир.

$Y_n(t)$ функсиjасына *икинчи нөв Бессел функсиjасы* деjилир. Бу функсиjанын ифадәсиндә $\ln t$ топлананы олдуғундан, $J_n(t)$ илә хәтти асылы деjил. Она көрә дә $\nu=n$ олдугда (54) тәнлиjинин үмуми һәлли

$$x = c_1 J_n(t) + c_2 Y_n(t)$$

шәклиндә верилир.

б) *Бессел функсиjалары арасында әлагә.* $J_\nu(t)$ функсиjасынын ифадәсинә әсасән алынан

$$t^\nu J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{2m+2\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)2^{2m+\nu}}$$

мүнасибәтини диференсиаллаjаг:

$$\frac{d}{dt}[t^\nu J_\nu(t)] = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m+2\nu)t^{2m+2\nu-1}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)2^{2m+\nu}}.$$

Бурадан, $\Gamma(m+\nu+1)=(m+\nu)\Gamma(m+\nu)$ олдуғундан алырыг ки,

$$\frac{d}{dt}[t^\nu J_\nu(t)] = t^\nu J_{\nu-1}(t). \qquad (61)$$

Охшар гаjда илә көстәрмәк олар ки,

$$\frac{d}{dt}[t^{-\nu}J_\nu(t)] = -t^{-\nu}J_{\nu+1}(t) \qquad (62)$$

дүстуру доғрудур.

Алынан дүстурлары ачыг шәкилдә jазаг:

$$t^\nu J'_\nu(t) + \nu t^{\nu-1}J_\nu(t) = t^\nu J_{\nu-1}(t),$$

$$t^{-\nu}J'_\nu(t) - \nu t^{-\nu-1}J_\nu(t) = -t^{-\nu}J_{\nu+1}(t).$$

Бу дүстурларын биринчисини t^ν-jә, икинчисини $t^{-\nu}$-jә ихтисар едиб тәрәф-тәрәфә чыхсаг, истәнилән ν үчүн

$$J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t}J_\nu(t) \qquad (63)$$

дүстуру алынар. (63) дүстурундан истифадә едәрәк көстәрәк ки, $\nu=\frac{2k+1}{2}$, $k=0, 1, 2, \dots$ олдугда $J_\nu(t)$, $J_{-\nu}(t)$ функсиjалары елементар функсиjаларла ифадә олунурлар.

Бунун үчүн әввәлчә $k=0$ көтүрәк. Бу заман $\nu=\frac{1}{2}$ олур вә уjғун (55) тәнлиjинин хәтти асылы олмаjан һәлләри $x_1=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $x_2=\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$. Бу һәлләрин jухарыда көстәрилән аjрылышларына әсасән $J_{\frac{1}{2}}(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{t}}$, $J_{-\frac{1}{2}}(t)=\frac{\cos t}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}}$.

Дикәр тәрәфдән, (59) дүстуруна әсасән $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ олдуғундан

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Демәли, $J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t$, $J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$. Онда $\nu=\frac{1}{2}$ көтүрмәклә (63) дүстурундан алырыг ки,

$$J_{\frac{5}{2}}(t)=\frac{1}{t}J_{\frac{1}{2}}(t)-J_{-\frac{1}{2}}(t)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin t-t\cos t}{t\sqrt{t}}.$$

Бу гајда илә ардычыл олараг $J_{\frac{6}{2}}(t)$, $J_{\frac{7}{2}}(t)$ вә с. функсијаларыны елементар функсијаларла ифадә етмәк олар.

в) *Бессел функсијаларынын сыфырлары.* Бессел тәнлијиндә $x=\frac{y}{\sqrt{t}}$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\ddot{y}+\left[1+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)t^{-2}\right]y=0 \qquad (64)$$

тәнлији алынар. Әвәзләмәдән ајдындыр ки, бу тәнлијин һәлләринин $(0, +\infty)$ интервалындакы сыфырлары (көкләри) илә (54) тәнлијинин һәлләринин һәмин интервалдакы сыфырлары ејнидир. Тутаг ки, $\frac{1}{4}-\nu^2\geqslant 0$. Онда (64) тәнлијини

$$\ddot{z}+z=0$$

тәнлији илә мүгајисә етсәк, Штурм теореминә әсасән аларыг ки, (64) тәнлијинин һәр бир һәллинин $(0, +\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфыры вар.

Тутаг ки, $\frac{1}{4}-\nu^2<0$. Бу һалда (64) тәнлијини, $\alpha>\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}$ шәртини өдәјән α әдәди үчүн

$$\ddot{u}+\left[1-\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^{-2}\right]u=0$$

тәнлији илә мүгајисә едәк.

Бурадан ајдындыр ки, (64) тәнлијинин һәр бир һәллинин $(\alpha, +\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфыры вар.

Беләликлә, аларыг ки, истәнилән $\nu\geqslant 0$ үчүн Бессел функсијаларынын һәр бирини $(0, +\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфыры вар.

г) *Бессел функсијаларынын ортогоналлыг хассәси.* $J_\nu(t)$ функсијасы (54) тәнлијинин һәлли олдуғундан истәнилән $\lambda\geqslant 0$ үчүн $J_\nu(\lambda t)$ функсијасы

$$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(\lambda^2t^2-\nu^2)x=0 \qquad (65)$$

тәнлијинин һәллидир.

Тутаг ки, $J_\nu(\lambda_1 t)$, $J_\nu(\lambda_2 t)$ функсијалары (65) тәнлијинин $\lambda=\lambda_1$ вә $\lambda=\lambda_2$ гијмәтләринә ујғун һәлләридир. Јә'ни

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}J_\nu(\lambda_1 t)+t\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_1 t)+\left(\lambda_1^2t^2-\nu^2\right)J_\nu(\lambda_1 t)=0,$$

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}J_\nu(\lambda_2 t)+t\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_2 t)+\left(\lambda_2^2t^2-\nu^2\right)J_\nu(\lambda_2 t)=0$$

ејниликләри өдәнир. Бу ејниликләрин биринчисини $J_\nu(\lambda_2 t)$-јә, икинчисини исә $J_\nu(\lambda_1 t)$-јә вуруб тәрәф-тәрәфә чыхаг. Онда

$$\frac{d}{dt}\left\{t\left[J_\nu(\lambda_2 t)\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_1 t)-J_\nu(\lambda_1 t)\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_2 t)\right]\right\}=$$
$$=t\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)J_\nu(\lambda_1 t)J_\nu(\lambda_2 t)$$

ејнилији алынар. Бурадан, интегралламагла

$$t\left[J_\nu(\lambda_2 t)\frac{d}{dt}J(\lambda_1 t)-J_\nu(\lambda_1 t)\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_2 t)\right]\Big|_0^1=$$
$$=\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_1 t)J_\nu(\lambda_2 t)dt$$

бәрабәрлијини аларыг. Дикәр тәрәфдән $\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda t)=\lambda J_\nu'(\lambda t)$ вә $\nu\geqslant 0$ олдуғундан, бу бәрабәрлији

$$\lambda_1 J_\nu'(\lambda_1)J_\nu(\lambda_2)-\lambda_2 J_\nu(\lambda_1)J_\nu'(\lambda_2)=\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_1 t)J_\nu(\lambda_2 t)dt$$

шәклиндә јазмаг олар.

Хүсуси һалда, λ_1 вә λ_2 әдәдләри $J_\nu(t)$ функсијасынын мүхтәлиф сыфырлары олдуғда, бурадан

$$\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_1 t)J_\nu(\lambda_2 t)dt=0$$

бәрабәрлији алыныр. Бу хассәјә Бессел функсијаларынын *ортогоналлыг хассәси* дејилир.

ғ) *Бессел функсијаларынын бә'зи интеграл көстәрилишләри.* Бир чох мәсәләләрин һәллиндә Бессел функсијаларынын интеграл көстәрилишләриндән истифадә олунур. Бу көстәрилишләрдән ән садәси Пуассон көстәрилишидир.

Мә'лумдур ки, ихтијари $\rho>-1$ вә $\mu>-1$ әдәдләри үчүн

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\rho\varphi\sin^\mu\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\mu+2}{2}\right)}$$

дүстуру доғрудур. Бу дүстурда $\rho=2\nu$, $\mu=2m$ көтүрсәк,

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+m+1)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\sin^{2m}\varphi\,d\varphi \qquad (66)$$

олар. Бурадан $\Gamma(\nu+m+1)$-и тә'јин едиб, $J_\nu(t)$ функсијасынын ифадәсиндә јеринә јазсаг, аларыг

$$J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} \frac{2}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi \sin^{2m}\varphi \, d\varphi.$$

Дикәр тәрәфдән, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (58) дүстуруна әсасән, асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,(2m)!\,2^{-2m}.$$

Она көрә дә

$$J_\nu(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, 2^{2m}}{(2m)!} \times$$

$$\times \left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi \sin^{2m}\varphi \, d\varphi.$$

Интеграллa чәмләмәнин јеринин дәјишмәјин гануни олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J_\nu(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (t\sin\varphi)^{2m}}{(2m)!} \, d\varphi$$

олар. Бу мүнасибәти исә

$$\cos(t\sin\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (t\sin\varphi)^{2m}}{(2m)!}$$

ајрылышына әсасән

$$J_\nu(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi \, d\varphi$$

шәклиндә јазмаг олар.

Алынмыш дүстура *Пуассон дүстуру* дејилир.

Гејд едәк ки, Пуассон дүстурундакы интеграл $\nu > -\frac{1}{2}$

олдуғда истәнилән t үчүн јығылыр вә $|\cos(t\sin\varphi)| \leqslant 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $J_\nu(t)$ Бессел функсијасыны

$$|J_\nu(t)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{|t|}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi \, d\varphi$$

шәклиндә гијмәтләндирмәк олар.

Хүсуси һалда, (66) дүстурунда $m = 0$ көтүрдүкдә

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \sqrt{\pi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi \, d\varphi$$

олдуғундан, сонунчу бәрабәрсизлији

$$|J_\nu(t)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{|t|}{2}\right)^{\nu}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Там индексли $J_n(t)$ Бессел функсијасынын башга шәкилдә интеграл көстәрилишини верәк. Бунун үчүн

$$e^z = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$$

ајрылышында $z = \frac{ut}{2}$, $z = -\frac{t}{2u}$ $(u \neq 0)$ көтүрүб, алынан

$$e^{\frac{ut}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l t^l}{2^l l!}, \quad e^{-\frac{t}{2u}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m u^{-m}}{2^m m!}$$

сырaларынын һасилинә бахаг:

$$e^{\frac{t}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{l+m} u^{l-m}}{l!\, m!\, 2^{l+m}}.$$

Бурада $l = m + n$ гәбул едиб, $m < -n$ үчүн $\Gamma(m+n+1) = \infty$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$e^{\frac{t}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{n+2m} u^n}{(m+n)!\, m!\, 2^{n+2m}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2m} \right] u^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\, u^n.$$

Алынан бәрабәрликдә $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ олдуғуну нәзәрә алыб, ону

$$e^{\frac{t}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[u^n + (-1)^n u^{-n}\right] J_n(t)$$

шәклиндә јазаг. Бу бәрабәрликдә $u = e^{i\varphi}$ гәбул етсәк, Ејлер дүстуруна әсасән, $u - u^{-1} = 2i\sin\varphi$ олдуғундан,

$$e^{it\sin\varphi} = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}\right] J_n(t)$$

олар. Бурада $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\cos(t\sin\varphi) + i\sin(t\sin\varphi) = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\{[1+(-1)^n]\cos n\varphi +$$

$$+ i[1-(-1)^n]\sin n\varphi\} J_n(t) = J_0(t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(t)\cos 2m\varphi +$$

$$+ 2i\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(t)\sin(2m+1)\varphi .$$

мүнасибәти алынар. Ики комплекс әдәдин бәрабәрлијинә әсасән бурадан

$$\cos(t\sin\varphi) = J_0(t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(t)\cos 2m\varphi,$$

$$\sin(t\sin\varphi) = 2\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(t)\sin(2m+1)\varphi.$$

Бу бәрабәрликләрин биринчисинин һәр тәрәфини $\cos n\varphi$-јә, икинчисинин һәр тәрәфини $\sin n\varphi$-јә вуруб, φ-јә нәзәрән $[0, \pi]$ парчасында интеграллаcаг, асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\int_0^{\pi}\cos(t\sin\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \begin{cases}\pi J_n(t), & n=0 \text{ вә ја } n \text{ чүт олдугда},\\ 0, & n \text{ тәк олдугда},\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\sin(t\sin\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi = \begin{cases}0, & n \text{ чүт олдугда},\\ \pi J_n(t), & n \text{ тәк олдугда}.\end{cases}$$

Бурадан тәрәф-тәрәфә топламагла аларыг ки, истәнилән n үчүн

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi$$

дүстуру доғрудур.

Алынмыш дүстурун сағ тәрәфиндәки интеграла *Бессел интегралы* дејилир.

Чалышмалар

1. $\ddot{x} + 24\sin t \cdot x = 0$ тәнлијинин ихтијари һәллинин ики гоншу сыфры арасындакы мәсафәни ашағыдан гијмәтләндирин.

Чаваб: $h \geqslant 0{,}5$.

2. Лиувилл әвәзләмәси васитәсилә

$$(1+t^2)^2\ddot{x} + 2t(1+t^2)\dot{x} + x = 0$$

тәнлијини һәлл един.

Чаваб: $x = \frac{c_1 + c_2 t}{\sqrt{1+t^2}}$.

3. Һансы $q(t)$ функсијалары үчүн

$$(1+t)\ddot{x} + \dot{x} + q(t)x = 0$$

тәнлији Лиувилл әвәзләмәси илә сабит әмсаллы тәнлијә кәтирилә биләр?

Чаваб: $q(t) = \frac{a}{1+t}$; a—сабитдир

4. $t^2\ddot{x} + x = 0$ тәнлијинин ихтијари һәллинин $[0{,}01,\ 0{,}1]$ парчасындакы сыфырлары арасындакы мәсафәни вә сыфырларынын сајыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $\frac{\pi}{100} < h < \frac{\pi}{10}$, $3 < N_h < 33$.

5. Тутаг ки, $t_1, t_2, \ldots (0 < t_1 < t_2 < \cdots)$ нөгтәләри

$$(1+t^2)\ddot{x} + t^2 x = 0$$

тәнлијинин ихтијари һәллинин сыфырларыдыр.

$$\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = \pi$$

олдуғуну исбат един.

6. Биринчи тәртиб төрәмәнин әмсалыны јох етмәклә ашағыдакы сәрһәд мәсәләләрини һәлл един:

а) $\ddot{x} + \frac{2}{1+t}\dot{x} - x = 0$; $x(0) = 1$, $x(1) = 0$.

Чаваб: $(e^2 - 1)(1+t)x = e^{2-t} - e^t$.

б) $(1+t^2)^2\ddot{x} - 4t(1+t^2)\dot{x} + (4t^4 + 14t^2 + 2)x = 0$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Чаваб: $x = \frac{16}{16+\pi^2}(1+t^2)\sin 2t$.

7. Ашағыдакы мәсәләләр үчүн Грин функсијасыны гурун:

a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = f(t)$,

$x(0) + \dot{x}(0) = 0$, $x(1) = 0$.

Ҹаваб: $G(t, \tau) = \begin{cases} 0{,}5(1-\tau)(1-3t)e^{2(t-\tau)}; & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0{,}5(1-3\tau)(1-t)e^{2(t-\tau)}, & \tau < t \leqslant 1. \end{cases}$

5) $\dot{x} + x = f(t)$,

$x(0) + \dot{x}(\pi) = 0$, $\dot{x}(0) - x(\pi) = 0$.

Ҹаваб: $G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + t - \tau\right); & 0 \leqslant t < \tau, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t - \tau\right); & \tau < t \leqslant \pi. \end{cases}$

8. $\ddot{x} + \lambda x = 0$,

$x(0) + \dot{x}(0) = 0$, $x(\pi) + \dot{x}(\pi) = 0$

сәрһәд мәсәләсинин мәхсуси әдәдләрини вә ортонормал мәхсуси функсијалары системини тапын.

Ҹаваб: $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$

$$x_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1+k^2)}}\,(k\cos kt - \sin kt).$$

IX ФӘСИЛ

АВТОНОМ СИСТЕМЛӘР

§ 1. АВТОНОМ СИСТЕМЛӘРИН ҺӘЛЛӘРИНИН ХАССӘЛӘРИ

а) *Тә'рифләр вә һәндәси изаһ.* Мә'лумдур ки, сағ тәрәфи сәрбәст дәјишәндән асылы олмајан

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

нормал системинә *автоном* вә *ја стасионар* систем дејилир.

Тутаг ки, $f(x)$ вектор-функсијасынын $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын верилмиш G областында кәсилмәздирләр, һәр бир $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in G$ нөгтәси вә истәнилән t_0 үчүн (1) системинин

$$x(t_0) = x^0 \tag{2}$$

башланғыч шәртини өдәјән јеканә, дәваметдирилмәјән $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ һәлли вар.

Бу һәллин тә'јин олундуғу (α, β) интервалындан көтүрүлмүш бүтүн t-ләр үчүн $M(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ нөгтәләри чохлуғуна, һәмин һәллә ујғун олан *трајекторија* дејилир. Трајекторијаны t илә ишарә едәҹәјик. Ајдындыр ки, $x = \varphi(t)$ трајекторијанын параметрик шәкилдә тәнлији олур.

G областынын һәр бир $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсинә, бу нөгтәдән чыхан $f(x^0) = (f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, f_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$ векторуну гаршы гојсаг, (1) системи G областында *векторлар мејданы* тә'јин едәр.

Дикәр тәрәфдән, (1) системинин (2) шәртини өдәјән $x = \varphi(t)$ һәлли үчүн

$$\dot{\varphi}(t_0) = f(\varphi(t_0)) = f(x^0)$$

олдуғундан, төрәмәнин физики мә'насына әсасән алырыг ки, $t = t_0$ анында мадди нөгтә x^0 нөгтәсиндә јерләшир вә $v = \frac{d\varphi}{dt}$ сүр'әт вектору мејданын һәмин нөгтәдәки вектору илә үст-үстә дүшүр. Буна көрә дә (1) системинин тә'јин етдији векторлар мејданына *сүр'әтләр мејданы* да дејилир. (1) системинин һәллинин трајекторија кими, системин өзүнүн исә векторлар мејданы кими изаһ олундуғу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасына *фаза фәзасы*, *трајекторијалара фаза трајекторијалары*, $f(x)$ векторуна исә *фаза сүр'әти* дејилир.

б) *Һәллин хассәләри.* Автоном системләрин һәлләринин бә'зи хассәләри илә таныш олаг.

Теорем 1. *Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин (α, β) интервалында тә'јин олунмуш, давамедирилмәјән һәлли, s исә ихтијари сабитдир. Онда $x = \varphi(t+s)$ вектор-функсијасы һәмин системин $(\alpha - s, \beta - s)$ интервалында һәллидир.*

Исбаты. $x = \varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин һәлли олдуғундан,

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)), \ t \in (\alpha, \beta)$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликдә t-ни $t + s$ илә әвәз етсәк,

$\dot{\varphi}(t+s) = \frac{d\varphi(t+s)}{dt}$ олдуғундан,

$$\dot{\varphi}(t+s) = f(\varphi(t+s)), \ t \in (\alpha - s, \beta - s)$$

ејнилијини аларыг. Бу исә теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Теорем 2. *Тутаг ки, (1) системинин һәр һансы ики $x = \varphi^1(t)$, $x = \varphi^2(t)$ һәлләри $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ шәртини*

өдәјир. Онда $\varphi^2(t) = \varphi^1(t+s)$; бурада $s = t_1 - t_2$. Башга сөзлә десәк, ортаг нөгтәси олан трајекторијалар үст-үстә дүшүр.

Исбаты. Биринчи хассәјә әсасән, $x = \varphi^1(t+s)$ һәлл олдуғундан, $s = t_1 - t_2$ гәбул етсәк,

$$\varphi^1(t_2+s) = \varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2).$$

Демәли, $x=\varphi^1(t+s)$ вә $x=\varphi^2(t)$ һәлләри $t=t_2$ анында ејни башланғыч шәртини өдәјир. Одур ки, һәллин јеканәлијинә әсасән

$$\varphi^1(t+s) = \varphi^2(t)$$

олмалыдыр.

Теорем 3. *Тутаг ки, $x=\varphi(t,x^0)$ вектор-функсијасы (1) системинин $x(0)=x^0$ шәртини өдәјән һәлли, s исә ихтијари әдәддир. Онда*

$$\varphi(t,\varphi(s,x^0)) = \varphi(t+s,x^0)$$

ејнилији өдәнир.

Бу хассәјә автоном системләрин һәлләринин *груп хассәси* дејилир.

Исбаты. Гејд олунмуш s үчүн $x^1=\varphi(s,x^0)$ ишарә едәк. Онда $\psi^1(t) = \varphi(t,x^1)$ вектор-функсијасы (1) системинин $\psi^1(0) = x^1$ шәртини өдәјән һәлли олар.

Биринчи хассәјә әсасән, һәмин s үчүн $\psi^2(t) = \varphi(t+s,x^0)$ вектор-функсијасы (1) системинин $\psi^2(0)=\varphi(s,x^0)=x^1$ шәртини өдәјән һәллидир. Демәли, $\psi^1(t)$ вә $\psi^2(t)$ вектор-функсијалары (1) системинин ејни башланғыч шәртини өдәјән һәлләридир. Јеканәлијә әсасән $\varphi(t,x^1)=\varphi(t+s,x^0)$ олмалыдыр. Бурадан да теоремин исбаты алыныр.

Тутаг ки, $x=\varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин $(-\infty,+\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш һәллидир. Истәнилән $t\in(-\infty,+\infty)$ вә мүәјјән s әдәди үчүн $\varphi(t+s)=\varphi(t)$ оларса, s әдәдинә $x=\varphi(t)$ һәллинин периоду (дөврү) дејилир. Бу һәллин периодлары чохлуғуну F илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, $0\in F$. Демәли, F чохлуғу бош дејил.

F чохлуғунун ашағыдакы хассәләри вар:

1. *Әкәр $s\in F$ исә, $-s\in F$.*

Доғрудан да, $s\in F$ олдуғундан

$$\varphi(t+s)=\varphi(t),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

ејнилији өдәнир. Бурада t әвәзинә $t-s$ јазсаг, $\varphi(t)=\varphi(t-s)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ ејнилијини аларыг. Ја'ни $-s\in F$.

2. *Тутаг ки, $s_1,s_2\in F$. Онда $s_1+s_2\in F$.*

Хассәнин доғрулуғу

$$\varphi(t+s_1+s_2)=\varphi((t+s_1)+s_2)=\varphi(t+s_1)=\varphi(t)$$

мүнасибәтләриндән ајдындыр.

3. *F чохлуғу гапалыдыр.*

Доғрудан да, тутаг ки, $s_n\in F$ вә $\{s_n\}$ ардычыллығы s_0 әдәдинә јығылыр. Онда $\varphi(t)$ һәлли кәсилмәз олдуғундан,

$$\varphi(t+s_0)=\varphi(t+\lim_{n\to\infty}s_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(t+s_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(t)=\varphi(t),$$

ја'ни $s_0\in F$.

4. *F чохлуғунда сыфырдан фәргли елемент варса, бу чохлуг ја бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу илә үст-үстә дүшүр, јахуд да бу чохлугда ән кичик мүсбәт T әдәди вар вә бу заман F чохлуғунун елементләри T әдәдинин там мисилләриндән ибарәтдир.*

Хассәнин доғрулуғуну көстәрәк. F чохлуғунда сыфырдан фәргли елемент олдуғундан, 1-чи хассәјә әсасән бу чохлугда мүсбәт әдәд вар. Тутаг ки, F чохлуғунда ән кичик мүсбәт елемент јохдур. Онда F чохлуғуна дахил олан вә сыфра јығылан мүсбәт $\{s_n\}$ ардычыллығы вар. 2-чи хассәјә әсасән ихтијари m там әдәди үчүн $ms_n\in F$. Ајдындыр ки, истәнилән s_0 әдәди үчүн елә m_n там әдәди вар ки, $|m_ns_n - s_0|<s_n$ олар. Лакин $\lim_{n\to\infty} s_n=0$ олдуғундан, бурадан аларыг ки, $\{m_ns_n\}$ ардычыллығы s_0 әдәдинә јығылыр. Она көрә дә s_0 әдәди F чохлуғунун лимит нөгтәсидир. Онда 3-чү хассәјә әсасән $s_0\in F$ вә s_0 ихтијари олдуғундан, бурадан аларыг ки, F чохлуғу һәгиги әдәдләр чохлуғу илә үст-үстә дүшүр.

Гапалылыг хассәсинә әсасән, F чохлуғу һәгиги әдәдләр чохлуғу илә үст-үстә дүшмәдикдә, бу чохлугда ән кичик мүсбәт T әдәди вар. Тутаг ки, s әдәди $\varphi(t)$ һәллинин ихтијари периодудур. Онда елә m там әдәди вар ки, $|s-mT|<T$ олур. Әкәр $s\neq mT$ оларса, 2-чи хассәјә әсасән аларыг ки, $|s-mT|$ мүсбәт әдәди дә $\varphi(t)$ һәллинин периодудур. Бу исә $|s-mT|<T$ шәртинә зиддир. Демәли, $s=mT$ олмалыдыр.

Теорем 4. *Тутаг ки, $x=\varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин (α,β) интервалында тә'јин олунмуш һәллидир вә онун l трајекторијасы өзү-өзүнү кәсир, ја'ни $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1<t_2$, $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$. Онда $x=\varphi(t)$ һәллини бүтүн һәгиги оха давам етдирмәк олар вә бу заман $x=\tilde\varphi(t)$ давамы үчүн ашағыдакы ики һалдан бири мүмкүндүр:*

а) $\tilde\varphi(t)\equiv a$, $a=\text{const}$, *ја'ни $x=\tilde\varphi(t)$ һәлли (1) системинин таразлыг вәзијјәтидир;*

б) *елә $T>0$ әдәди вар ки, истәнилән $t\in(-\infty,+\infty)$ үчүн $\tilde\varphi(t+T)=\tilde\varphi(t)$, лакин $0\leq\tau_1<\tau_2<T$ шәртини өдәјән ихтијари τ_1,τ_2 үчүн $\tilde\varphi(\tau_1)\neq\tilde\varphi(\tau_2)$, ја'ни $x=\tilde\varphi(t)$ һәллинин ән кичик T периоду вар.*

Исбаты. $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1<t_2$, $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$ шәртинә вә 2-чи теоремә әсасән $\varphi(t)=\varphi(t+s)$, $t\in(\alpha-s,\beta-s)$ олар; бурада $s=t_2-t_1$.

Ајдындыр ки,

$$x = \begin{cases} \varphi(t+s), & \alpha - s < t \leqslant \alpha \\ \varphi(t), & \alpha < t < \beta \end{cases}$$

вектор-функсијасы $(\alpha - s, \beta)$ интервалында (1) системинин һәллидир вә она $x = \varphi(t)$ һәллинин (α, β) интервалындан $(\alpha - s, \beta)$ интервалына давамы кими бахмаг олар. Бурада $s > 0$ олдуғундан, бу гајда илә һәлли $(-\infty, \beta)$ интервалына давам етдирмәк олар. Давамы $x = \tilde{\varphi}(t)$ илә ишарә едәк. Дикәр тәрәфдән $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t - s)$ бәрабәрлијинин көмәјилә $x = \tilde{\varphi}(t)$ һәллини $(-\infty, \beta)$ интервалындан $(-\infty, +\infty)$ интервалына давам етдирмәк олар.

Даваметдирмә гајдасындан ајдындыр ки, $s = t_2 - t_1 > 0$ әдәди $x = \tilde{\varphi}(t)$ һәллинин периодудур. Бу һәллин периодлары чохлуғуну $\tilde{F}$ илә ишарә едәк вә ашағыдакы һаллара бахаг:

1) Тутаг ки, $\tilde{F}$ чохлуғу һәгиги охла үст-үстә дүшүр. Онда сыфра јығылан мүсбәт $\{s_n\}$ периодлар ардычыллығы вар вә 2-чи хассәјә әсасән, истәнилән t үчүн $\left[\frac{t}{s_n}\right]s_n$ әдәди дә период олар. ($[z]$ илә z-ин там һиссәси ишарә олунмушдур). Јә'ни $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}\left(t - \left[\frac{t}{s_n}\right]s_n\right)$. Дикәр тәрәфдән, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{t - \left[\frac{t}{s_n}\right]s_n\right\} = 0$ олдуғундан,

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}\left(t - \left[\frac{t}{s_n}\right]s_n\right) = \tilde{\varphi}(0).$$

Бурадан алырыг ки, $\tilde{F}$ чохлуғу һәгиги охла үст-үстә дүшдүкдә $\tilde{\varphi}(t)$ сабит вектордур, јә'ни $x = \tilde{\varphi}(t)$ һәлли (1) системинин таразлыг вәзијјәтидир.

2) $\tilde{F}$ чохлуғунда ән кичик мүсбәт T әдәди вар. Көстәрәк ки, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < T$ шәртини өдәјән истәнилән τ_1, τ_2 үчүн $\tilde{\varphi}(\tau_1) \neq \tilde{\varphi}(\tau_2)$. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $0 \leqslant \tau_1^0 < \tau_2^0 < T$ шәртини өдәјән елә τ_1^0, τ_2^0 әдәдләри вар ки, $\tilde{\varphi}(\tau_1^0) = \tilde{\varphi}(\tau_2^0)$. Онда, $s^0 = \tau_2^0 - \tau_1^0$ гәбул етсәк, 2-чи теоремә әсасән $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t + s^0)$ олар, јә'ни $s^0 \in \tilde{F}$. Бу исә T-нин $\tilde{F}$ чохлуғунда ән кичик мүсбәт әдәд олмасына зиддир. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. ***Автоном системләрин үч нөв трајекторијалары ола биләр; 1) таразлыг вәзијјәтләри, 2) өзү-өзүнү кәсмәјән вә ја ачыг трајекторијалар; 3) гапалы трајекторијалар вә ја тсикләр.***

§ 2. МҮСТӘВИ ҮЗӘРИНДӘ ТРАЈЕКТОРИЈАЛАРЫН ЛИМИТ ВӘЗИЈЈӘТЛӘРИ

Бу параграфда

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \qquad (4)$$

автоном системинин трајекторијалары арашдырылыр; бурада $P(x, y), Q(x, y)$ функсијалары xOy мүстәвисинин G областында кәсилмәздирләр вә областын истәнилән гапалы, мәһдуд алт һиссәсиндә Липшис шәртини өдәјирләр. Гојулан шәртләр дахилиндә һәр бир $(x_0, y_0) \in G$ вә истәнилән t_0 үчүн (4) системинин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртләрини өдәјән даваметдирилмәјән јеканә һәлли вар.

Тутаг ки, $\varphi^0(t) = (\varphi_1^0(t), \varphi_2^0(t))$ вектор-функсијасы (4) системинин $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ шәртләрини өдәјән периодик һәллидир*. Бу һәллин xOy мүстәвисиндә трајекторијасыны l_0 илә ишарә едәк.

Ајдындыр ки, l_0 трајекторијасы гапалы әјри верир вә мүстәвини ики һиссәјә бөлүр l_0 әјриси илә әһатә олунмуш дахили һиссә вә харичи һиссә. Бурадан вә (4) системинин һәллинин јеканәлијиндән алырыг ки, l_0 үзәриндә олмајан нөгтәдән башлаган трајекторија ја тамамилә l_0 гапалы хәттинин дахилиндә, јахуд да тамамилә харичи һиссәсиндә јерләшир. Доғрудан да, тутаг ки, $(x_1, y_1) \in \bar{l}_0$ нөгтәси үчүн (4) системинин $x(0) = x_1$, $y(0) = y_1$ шәртләрини өдәјән $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы l_0 әјрисини $t = t_1$ анында $p = (p_1, p_2)$ нөгтәсиндә кәсир. Јә'ни $\psi(t_1) = p$, $p \in l_0$.

Дикәр тәрәфдән елә $t = t_2$ аны вар ки, $\varphi^0(t_2) = p$. Биринчи теоремә әсасән $\varphi(t) = \varphi^0(t + t_2 - t_1)$ вектор-функсијасы (4) системинин һәллидир.

Фәрзијјәјә көрә $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$ олур. Һәллин јеканәлијинә әсасән, $\varphi(t), \psi(t)$ һәлләри үст-үстә дүшүрләр. Бурадан, $\varphi(t)$ һәллинин трајекторијасы l_0 олдуғундан, алырыг ки, $\psi(t)$ һәллинин дә трајекторијасы l_0 олмалыдыр. Бу исә $\psi(0) = (x_1, y_1) \bar{\in} l_0$ шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\psi(t)$ һәллинин трајекторијасы l_0 трајекторијасыны кәсә билмәз.

Тутаг ки, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијасы (4) системинин $(0, +\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш һәлли, l^+ исә бу һәллин трајекторијасыдыр. Мүәјјән $p = (p_1, p_2)$ нөгтәси үчүн

* Периодик һәлл дедикдә, таразлыг вәзијјәти олмајан вә (4) системини өдәјән периодик вектор-функсија başa дүшүлүр.

$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n) = p$, ($\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_1(t_n) = p_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_2(t_n) = p_2$) шәртләрини өдәјән $\{t_n\}$, ($t_n \in (0, +\infty)$) ардычыллығы варса, *p нөгтәсинә $\varphi(t)$ һәллинин* (l^+ трајекторијасынын) *ω-лимит нөгтәси дејилир*.

Бу һәллин ω-лимит нөгтәләри чохлуғуну $\Omega(l^+)$ илә ишарә едәк.

Тутаг ки, $\psi(t)$ вектор-функсијасы (4) системинин $(-\infty, 0)$ интервалында тә'јин олунан һәлли, l^- исә бу һәллин трајекторијасыдыр. Мүәјјән $q = (q_1, q_2)$ нөгтәси үчүн $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(t_n) = q$ шәртләрини өдәјән $\{t_n\}$ ($t_n \in (-\infty, 0)$) ардычыллығы варса, *q нөгтәсинә $\psi(t)$ һәллинин α-лимит нөгтәси* дејилир. Бу һәллин α-лимит нөгтәләри чохлуғуну $A(l^-)$ илә ишарә едәк.

Тә'рифдән ајдындыр ки, (4) системинин $(-\infty, +\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш $\varphi(t)$ һәллинин трајекторијасыны l илә ишарә етсәк, бу һәллин лимит нөгтәләри чохлуғу $A(l) \cup \Omega(l)$ олар.

Әкәр (4) системинин $\varphi^0(t)$ периодик һәллинин һәр бир нөгтәси бу һәлдән фәргли мүәјјән $\psi(t)$ һәллинин лимит нөгтәси оларса, $\varphi^0(t)$ һәллинә лимит тсикл дејилир.

Инди $\Omega(l^+)$ чохлуғунун бә'зи хассәләрини көстәрәк. Гејд едәк ки, ујғун тәклифләри $A(l^-)$ чохлуғу үчүн дә исбат етмәк олар.

Теорем 5. *$\Omega(l^+)$ чохлуғу гапалыдыр.*

Исбаты. Тутаг ки, $p^k \in \Omega(l^+)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ вә $\lim\limits_{k\to\infty} p^k = p$. Онда ω-лимит нөгтәсинин тә'рифинә әсасән һәр бир p^k нөгтәси үчүн елә $\{t_n^{(k)}\}$ ардычыллығы вар ки, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(k)} = +\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n^{(k)}) = p^k$. Демәли, һәр бир k нөмрәси үчүн елә n_k нөмрәси вар ки, $n_k > k$ олдугда $\| \varphi(t_{n_k}^{(k)}) - p^k \| < \frac{1}{k}$. Бурадан, $t_k = t_{n_k}^{(k)}$ көтүрсәк,

$$\| \varphi(t_k) - p \| \leqslant \| \varphi(t_k) - p^k \| + \| p^k - p \| < \frac{1}{k} + \| p^k - p \|$$

олдуғундан, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k) = p$, јә'ни $p \in \Omega(l^+)$. Бу исә теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Теорем 6. *Тутаг ки, $\varphi(t, p^0)$ вектор-функсијасы (4) системинин $\varphi(0, p^0) = p^0$ шәртини өдәјән вә $(0, +\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш һәлли, l^+ исә онун трајекторијасыдыр. Әкәр $\Omega(\tilde{l}^+)$ чохлуғу бош дејилсә, истәнилән*

$p = (p_1, p_2) \in G \cap \Omega(l^+)$ нөгтәси үчүн (4) системинин $\varphi(0, p) = p$ шәртини өдәјән вә даваметдирилмәјән $\varphi(t, p)$, $t \in (\alpha, \beta)$ һәллинин трајекторијасы тамамилә $\Omega(l^+)$ чохлуғунда јерләшир, јә'ни

$$\varphi(t, p) \in \Omega(l^+), \ t \in (\alpha, \beta).$$

Исбаты. $p \in \Omega(l^+)$ олдуғундан, елә $\{t_n\}$ ардычыллығы вар ки, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n, p^0) = p$. Автоном системләрин һәлләринин груп хассәсинә әсасән (теорем 3), бурадан алырыг ки,

$$\varphi(t, p) = \varphi(t, \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p^0)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t, \varphi(t_n, p^0)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t + t_n, p^0).$$

Бу көстәрир ки, һәр бир $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн $\varphi(t, p)$ нөгтәси l^+ трајекторијасынын ω-лимит нөгтәсидир, јә'ни $\varphi(t, p) \in \Omega(l^+)$, $t \in (\alpha, \beta)$. Теорем исбат олунду.

Бу теорем көстәрир ки, мүәјјән һәллин лимит нөгтәләри чохлуғу бош дејилсә, о өзүндә там бир трајекторија сахлајыр.

Теорем 7. *$\Omega(l^+)$ чохлуғунун бош олмасы үчүн*

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t)| = +\infty \qquad (5)$$

шәртинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Исбаты. Тутаг ки, (5) шәрти өдәнир. Онда $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ шәртини өдәјән истәнилән $\{t_n\}$ ардычыллығы үчүн $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(t_n)| = +\infty$ олдуғундан, $\Omega(l^+)$ бош чохлугдур.

Тутаг ки, $\Omega(l^+)$ бош чохлугдур, лакин (5) шәрти өдәнмир. Онда елә $R > 0$ әдәди тапмаг олар ки, мәркәзи координат башланғычында вә радиусу R олан гапалы $\bar{H}_R$ даирәси, кифајәт гәдәр бөјүк t-ләр үчүн l^+ трајекторијасынын нөгтәләриндән өз дахилиндә сахлајар. Башга сөзлә десәк, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ шәртини өдәјән елә $\{t_n\}$ ардычыллығы вар ки, $\varphi(t_n) \in \bar{H}_R$, $n = 1, 2, \ldots$ олур. Демәли, $\{\varphi(t_n)\}$ ардычыллығы мәһдуддур. Онда бу ардычыллыгдан јығылан $\{\varphi(t_{n_k})\}$ алт ардычыллығы сечмәк олар. Тутаг ки, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_{n_k}) = p$, $p \in \bar{H}_R$. Бурадан алырыг ки, $p \in \Omega(l^+)$. Бу исә $\Omega(l^+)$ чохлуғунун бош олмасы шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Гејд едәк ки, јухарыда исбат олунан теоремләр үмуми шәкилдә верилмиш (1) системи ($n > 2$) үчүн дә доғрудур.

Мүәјјән L дүз хәтт парчасынын һәр бир (x, y) нөгтәсиндә $|P(x, y)| + |Q(x, y)| > 0$ шәрти өдәнирсә вә $(P(x, y), Q(x, y))$

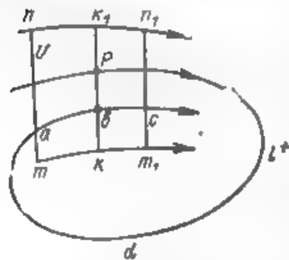
вектору бу дүз хәтт парчасына паралел дејилсә, белә L дүз хәтт парчасына (4) *системинин трансверсалы* дејилир.

Теорем 8. *Тутаг ки,* $\varphi(t)=(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ *вектор-функсијасы* $(0, +\infty)$ *интервалында (4) системинин һәллидир вә* $l^+ \cap \Omega(l^+)$ *чохлуғу бош дејил. Онда* l^+ *трајекторијасы ја гапалы әјридир (тсиклдир), јахуд да тарразлыг нөгтәсидир.*

Исбаты. Тутаг ки, $p=(p_1, p_2)\in l^+ \cap \Omega(l^+)$ вә $P(p_1, p_2)=0$, $Q(p_1, p_2)=0$. Онда мүәјјән $t=t_1$ аны вар ки, $\varphi(t_1)=p$ олур. Бурадан алыныр ки, $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ вә $x=p_1$, $y=p_2$ функсијалары (4) системинин $x(t_1)=p_1$, $y(t_1)=p_2$ шәртләрини өдәјән һәллидир. Јеканәлијә әсасән $\varphi_1(t)\equiv p_1$, $\varphi_2(t)\equiv p_2$, $t\in(0, +\infty)$. Јә'ни бу һалда l^+ трајекторијасы анҹаг p нөгтәсиндән ибарәтдир.

Тутаг ки, $p=(p_1, p_2)\in l^+ \cap \Omega(l^+)$ вә $|P(p_1, p_2)|+|Q(p_1, p_2)|>0$. Мәркәзи p нөгтәсиндә олан L трансверсалыны кечирәк. Үмумилији позмадан L үзәриндә $P(x, y)>0$ олдуғуну гәбул едәк. Онда t артдыгҹа l^+ трајекторијасынын L илә кәсишмә нөгтәләринә уј ғун анларда $\dot\varphi_1(t)=P(\varphi_1(t), \varphi_2(t))>0$ олдуғундан, трајекторија L парчасыны һәмишә ејни истигамәтдә кәсмәлидир.

Ајдындыр ки, p нөгтәсинин мүәјјән U әтрафы вар ки, бу әтрафда $|P(x, y)|+|Q(x, y)|>0$ шәрти өдәнир. Хүсуси һалда, бу әтрафы ашағыдакы кими көтүрмәк олар: l^+ трајекторијасынын p нөгтәсини дахилиндә сахлајан кичик l_p гөвсү көтүрәк. Бу гөвсүн уҹ нөгтәләриндән L трансверсалына паралел чәкилмиш кичик mn, m_1n_1 дүз хәтт парчалары илә ики һәллин mm_1, nn_1 гөвсләри арасында галан һиссәни U илә ишарә едәк (шәкил 15).



Шәкил 15.

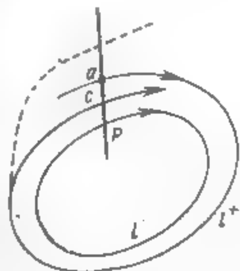
Бурадан ајдындыр ки, l_p гөвсүнү вә mn, m_1n_1 дүз хәтт парчаларыны елә көтүрмәк олар ки, $(x, y)\in U$ үчүн $|P(x, y)|+|Q(x, y)|>0$ олсун. Шәртә көрә $p\in l^+ \cap \Omega(l^+)$ олдуғундан, l^+ трајекторијасы мүәјјән $t=t_2$ анында p нөгтәсиндән кечир. Көстәрәк ки, l^+ трајекторијасы L трансверсалыны t-нин t_2-дән бөјүк олан сонсуз сајда гијмәтләриндә кәсәр. Доғрудан да, p нөгтәси лимит нөгтәси олдуғундан, елә $t'>t_2$ аны вар ки, һәмин анда l^+ трајекторијасы U әтрафыны кәсир. Һәллин јеканәлијинә әсасән l^+ трајекторијасы mm_1 вә nn_1 гөвсләрини кәсиб U әтрафына кечә билмәз. Тутаг ки, l^+ трајекторијасы mn дүз хәтт парчасыны a нөгтәсиндә кәсир. Онда һәллин јеканәлијинә вә јухарыда апарылан мүһакимәләрә әсасән, l^+ һәм дә m_1n_1 парчасыны мүәјјән c нөгтәсиндә кәсәр. Демәли, l^+ трајекторијасы L трансверсалыны $t_3>t_2$ анында мүәјјән b нөгтәсиндә кәсмәлидир. Көстәрәк ки, b нөгтәси p илә үст-үстә дүшүр.

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, b, p нөгтәләри үст-үстә дүшмүрләр вә b нөгтәси L трансверсалынын pk һиссәсиндә јерләшир. Онда pab гөвсү вә bp дүз хәтт парчасындан ибарәт олан әјри müstәвини ики һиссәјә бөлүр. Бу әјринин дахилиндә галан һиссәни S илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, l^+ трајекторијасынын $t>t_3$ анларына ујғун олан һиссәси pdb гөвсүнү вә bp парчасыны кәсә билмәдијиндән, тамамилә S-дә јерләшәр. Бу исә p нөгтәсинин l^+ трајекторијасынын лимит нөгтәси олмасына зиддир. Демәли, b нөгтәси p илә үст-үстә дүшмәлидир. Јә'ни l^+ гапалы трајекторијадыр. Аналожи мүһакимәни b нөгтәси L трансверсалынын pk_1 һиссәсиндә јерләшдикдә дә апармаг олар. Теорем исбат олунду.

Лемма. *Тутаг ки,* $\Omega(l^+)$ *бош дејил вә гапалы* $\bar l$ *трајекторијасы үчүн* $\Omega(l^+)\subset \bar l$. *Онда ја* $l^+=\bar l$, *јахуд да* t *мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда* l^+ *трајекторијасы спиралвари* $\bar l$ *трајекторијасына јахынлашыр.*

Исбаты. 6-чы теоремә әсасән $\bar l\subset \Omega(l^+)$. Тутаг ки, p нөгтәси $\bar l$ трајекторијасы үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари нөгтәдир. Бу нөгтәдә (4) системинин L трансверсалыны кечирәк. Онда $p\in\Omega(l^+)$ олдуғундан, l^+ трајекторијасы мүәјјән $t=t'$ анында L трансверсалыны бир a нөгтәсиндә кәсәр. Әкәр $a=p$ оларса, 8-чи теоремә әсасән $l^+=\bar l$.

Тутаг ки, $a\neq p$ вә мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, a нөгтәси L трансверсалынын $\bar l$ гапалы трајекторијасындан харичдә галан һиссәдә јерләшир. Онда t_1-дән бөјүк анларын бириндә l^+ трајекторијасы L-и јенидән бир c нөгтәсиндә кәсәр вә бу заман $\|c-p\|<\|a-p\|$ олар (шәкил 16). Доғрудан да, $c=a$ оларса, l^+ гапалы тсикл әмәлә кәтирәр вә p нөгтәсинә јахынлаша билмәз. Ајдындыр ки, c нөгтәси pa дүз хәтт парчасындан кәнарда јерләшәрсә (јә'ни трајекторија гырыг хәтлә көстәрилән кими оларса), p нөгтәси l^+ тра-



Шәкил 16.

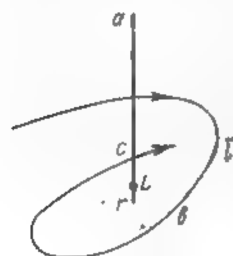
јекторијасынын лимит нөгтәси ола билмәз. Демәли, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда l^+ траіекторијасы L трансверсалыны сонсуз дәфә кәсәрәк p нөгтәсинә јахынлашыр. Башга һаллар да ујғун гајда илә арашдырылыр. Бурадан, p нөгтәси $\overline{l}$ үзәриндә ихтијари нөгтә олдуғундан, лемма исбат олунду.

Теорем 9. *Тутаг ки $t = 0$ анында G областынын мүәјјән нөгтәсиндән башланан l^+ трајекторијасы бүтүн $t > 0$ үчүн G областынын гапалы мәһдуд һиссәсиндә јерләшир вә $p = (p_1, p_2) \in \Omega(l^+)$ олдугда $|P(p_1, p_2)| + |Q(p_1, p_2)| > 0$. Онда $\Omega(l^+)$ чохлуғу бир гапалы $\overline{l}$ трајекторијасындан ибарәтдир вә бу заман ја $l^+ = \overline{l}$, јахуд да t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда l^+ трајекторијасы спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр.*

Исбаты. l^+ трајекторијасы G областынын гапалы мәһдуд һиссәсиндә јерләшдијиндән, 7-чи теоремә әсасән $\Omega(l^+)$ бош дејил. Онда 6-чы теоремә әсасән $\Omega(l^+)$ өзүндә там бир трајекторија сахлајыр. Бу трајекторијаны $\overline{l}$ илә ишарә едәк.

Тутаг ки, $l^+ \cap \Omega(l^+)$ бош дејил. Онда $|P(p_1, p_2)| + |Q(p_1, p_2)| > 0$, $p = (p_1, p_2) \in \Omega(l^+)$ шәртини нәзәрә алсаг, 8-чи теоремә әсасән, l^+ гапалы трајекторија олур. Јә'ни $l^+ = \overline{l}$.

Тутаг ки, $l^+ \cap \Omega(l^+)$ бош чохлугдур. Көстәрәк ки, $\overline{l}$ гапалыдыр. Бунун үчүн $\Omega(\overline{l}) \subset \overline{l}$ олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир. Ихтијари $r \in \Omega(\overline{l})$ нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдә (4) системинин L трансверсалыны чәкәк. Тутаг ки, l трајекторијасы L трансверсалыны $t = t_1$ вә $t = t_2$ анларында, ујғун олараг, a вә c нөгтәләриндә кәсир (шәкил 17). Онда $\overline{l}$ трајекторијасынын $t > t_2$ анларына ујғун олан һиссәси гапалы $abca$ областында јерләшир. Бу трајекторијанын бүтүн нөгтәләри l^+ үчүн лимит нөгтәси олдуғундан, 6-чы теоремә әсасән, мүәјјән андан сонра l^+ трајекторијасынын һиссәси $abca$ областында јерләшир. Бу исә a нөгтәсинин l^+ үчүн лимит нөгтәси олмасына зиддир. Демәли, $\Omega(\overline{l}) \subset \overline{l}$ вә 8-чи теоремә әсасән $\overline{l} = \Omega(\overline{l})$ (јә'ни $\overline{l}$ гапалыдыр). Дикәр тәрәфдән, $\overline{l}$ трајекторијасы l^+ трајекторијасынын лимит нөгтәләри чохлуғу олдуғундан, $\overline{l} = \Omega(l^+)$. Онда леммаја әсасән, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда l^+

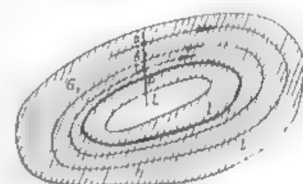


Шәкил 17.

спиралвари $\overline{l}$-јә јахынлашыр. Башга мүмкүн һалларда да $\overline{l}$-нин гапалы олдуғуну ујғун мүһакимәләрлә көстәрмәк олар. Теорем исбат олунду.

Теорем 10. *Тутаг ки, $\overline{l}$ гапалы трајекторијадыр вә онун јахын әтрафында башга гапалы трајекторијалар јохдур, јә'ни $\overline{l}$ изолә олунмуш тсиклдир. Онда $\overline{l}$ трајекторијасына јахын нөгтәләрдән чыхан һәр бир трајекторија, t мүсбәт вә ја мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр.*

Исбаты. Адындыр ки, $\overline{l}$ трајекторијасы үзәриндәки нөгтәләрдә $|P(x, y)| + |Q(x, y)| > 0$. Шәртә көрә $P(x, y), Q(x, y)$ функсијалары кәсилмәз олдуғундан, $\overline{l}$ трајекторијасыны дахилиндә сахлајан елә кичик G_1 золағы гурмаг олар ки, бу золагда $\overline{l}$-дән фәргли тсикл олмаз вә $|P(x, y)| + |Q(x, y)| > 0$ олар. $\overline{l}$ трајекторијасы үзәриндә ихтијари p нөгтәси көтүрүб һәмин нөгтәдә (4) системинин L трансверсалыны гураг (шәкил 18). Бу трансверсал үзәриндә p-дән фәргли вә G_1 золағында олан a нөгтәси көтүрәрәк t_0 анында бу нөгтәдән кечән трајекторијаны l илә ишарә едәк. Тутаг ки, l трајекторијасы мүәјјән $t_1 > t_0$ анында L трансверсалыны b нөгтәсиндә кәсир. Адындыр ки, $b \neq a$. Әкс һалда l трајекторијасы да G_1 золағында тсикл тәшкил едәрди.

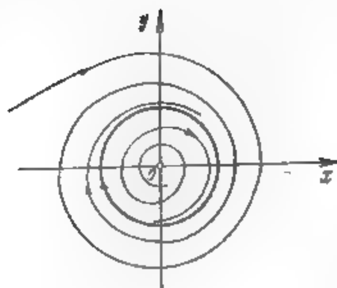


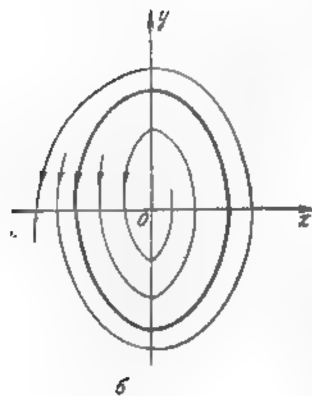
Шәкил 18.

Тутаг ки, $\|b - p\| < \|a - p\|$. Онда l трајекторијасы t_1-дән сонракы һәр һансы анда L парчасыны pb һиссәсиндә мүәјјән c нөгтәсиндә кәсәр вә бу заман $\|c - p\| < \|b - p\|$, олар. Беләликлә, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда l трајекторијасы спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр.

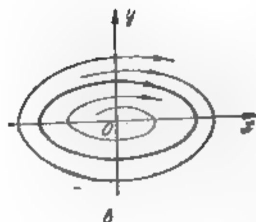
Адындыр ки, $\|b - p\| > \|a - p\|$ олан һалы, t әвәзинә $-t$ јазмагла бахылан һала кәтирмәк олар. Демәли бу һалда, l мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда l трајекторијасы спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр. Теорем исбат олунду.

Бу теорем көстәрир ки, изолә олунмуш тсикл үч шәкилдә ола биләр. 1) *дајаныглы тсикл, јә'ни белә тсиклә јахын нөгтәләрдән башланан трајекторијаларын һамысы t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда она (һәмин тсиклә) јахынлашыр (шәкил 19, а). 2) дајаныгсыз тсикл, јә'ни t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда бүтүн трајекторијалар бу тсиклдән узаглашыр (шәкил 19, б). 3) јарымдајаныглы тсикл, јә'ни t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда тсиклдән бир тә-*





б



в

Шәкил 19.

рәфдә (дахилдә вә ја харичдә) јерләшән нөгтәләрдән башланан трајекторијалар һәмин тсиклә јахынлашыр, дикәр тәрәфдә јерләшән нөгтәләрдән башланан трајекторијалар бу тсиклдән узаглашыр (шәкил 19, в).

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

системинә бахаг

Ајдындыр ки, $x=0$, $y=0$ системин јеканә таразлыг вәзијјәтидир вә онун $\varphi_1(t) = \sin(t+c)$, $\varphi_2(t) = \cos(t+c)$ (c—ихтијари сабитдир) периодик һәллинин трајекторијасы $x^2 + y^2 = 1$ чеврәсидир. Тутаг ки, $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ системин ихтијари һәллидир. Бу һәлл үчүн

$$\frac{d}{dt}[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] = 2\psi_2^2(t)[1 - \psi_1^2(t) - \psi_2^2(t)]$$

ејнилији доғрудур. Бурадан ајдындыр ки, $\psi_1^2(0) + \psi_2^2(0) > 1$ оларса, истәнилән $t > 0$ үчүн $\frac{d}{dt}[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] < 0$. Демәли, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы $x^2 + y^2 = 1$ трајекторијасына јахынлашыр. Ејниликдән ајдындыр ки, $\psi_1^2(0) + \psi_2^2(0) < 1$ оларса, истәнилән $t>0$ үчүн $\frac{d}{dt}[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] > 0$. Јә'ни t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы јенә дә $x^2 + y^2 = 1$ трајекторијасына јахынлашыр.

Беләликлә, $x^2 + y^2 = 1$ чеврәсинин һәм дахилиндән, һәм дә харичиндән башланан трајекторијалар t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда һәмин чеврәјә јахынлашырлар. Демәли, $x^2 + y^2 = 1$ чеврәси системин дајаныглы тсиклидир (шәкил 19, a).

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{2}{3}y + x\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right), \\ \dot{y} = \frac{3}{2}x + y\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right) \end{cases}$$

системинин $\varphi_1(t) = 2\cos(t+c)$, $\varphi_2(t) = 3\sin(t+c)$ (c—ихтијари сабитдир) периодик һәлли вар вә ујғун трa'екторија $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ еллипсидир. Системин истәнилән $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәлли үчүн

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi_1^2(t)}{4} + \frac{\psi_2^2(t)}{9}\right] = 2\left[\frac{\psi_1^2(t)}{4} + \frac{\psi_2^2(t)}{9}\right]\left[\frac{\psi_1^2(t)}{4} + \frac{\psi_2^2(t)}{9} - 1\right]$$

ејнилији доғрудур вә ајдындыр ки, $\frac{1}{4}\psi_1^2(0) + \frac{1}{9}\psi_2^2(0) > 1$ оларса, t артдыгча $\frac{1}{4}\psi_1^2(t) + \frac{1}{9}\psi_2^2(t)$ артыр, $\frac{1}{4}\psi_1^2(0) + \frac{1}{9}\psi_2^2(0) < 1$ оларса, t артдыгча $\frac{1}{4}\psi_1^2(t) + \frac{1}{9}\psi_2^2(t)$ азалыр. Демәли һәр ики һалда $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ тсиклиндән узаглашыр, јә'ни бу тсикл дајаныгсыздыр (шәкил 19б).

Мисал 3. Ајдындыр ки, (0, 0) нөгтәси

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = -0{,}5x + y(1 - 0{,}25x^2 - y^2) \end{cases}$$

системинин таразлыг нөгтәси, $\varphi_1(t) = 2\sin(t+c)$, $\varphi_2(t) = \cos(t+c)$ исә периодик һәллидир. Бу һәллә ујғун олан $0{,}25x^2 + y^2 = 1$ трајекторијасы изолә олунмуш тсиклдир.

Системин истәнилән $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәлли үчүн

$$\frac{d}{dt}[0{,}25\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] = 2\psi_2^2(t)[1 - 0{,}25\psi_1^2(t) - \psi_2^2(t)]$$

олдуғундан, ајдындыр ки, $0{,}25x^2 + y^2 = 1$ тсикли јарымдајаныгдыр (шәкил 19 $в$).

§ 3. МҮСТӘВИ ҮЗӘРИНДӘ МӘХСУСИ НӨГТӘЛӘРИН ТӘСНИФАТЫ

Бу параграфда

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \qquad (4)$$

шәклиндә системин мәхсуси нөгтәләринин тәснифаты верилир вә траjекторијаларын мәхсуси нөгтә әтрафында гурулушу өјрәнилир; бурада $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсијалары xOy мүстәвисинин мүәјјән G областында тә'јин олунмушдур.

а) *Мәхсуси нөгтә.* Тутаг ки, 1) $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсијалары (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән U әтрафында ($U \subset G$) кәсилмәздир; 2) һәр бир $(x_1, y_1) \in U$ вә истәнилән t_0 үчүн (4) системинин $x(t_0) = x_1$, $y(t_0) = y_1$ шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар; 3) $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәси (4) системинин *ади вә ја регулјар нөгтәси* адланыр.

Ајдындыр ки, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәсинин мүәјјән $U \subset G$ әтрафында $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсијалары x, y дәјишәнләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирсә вә $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$ исә, (x_0, y_0) нөгтәси (4) системинин ади нөгтәси олур.

Тутаг ки, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәси (4) системинин ади нөгтәсидир вә $P(x_0, y_0) \neq 0$. Онда (4) системинин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртләрини өдәјән вә (α, β) $(\alpha < t_0 < \beta)$ интервалында тә'јин олунмуш давамәтдирилмәјән $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ һәлли үчүн, елә $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ $(\alpha_1 < t_0 < \beta_1)$ интервалы тапмаг олар ки, бу интервалда $P(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$. Бурадан вә $\dot{\varphi}(t) = P(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in (\alpha_1, \beta_1)$ ејнилијинә әсасән алырыг ки, $x = \varphi(t)$ бәрабәрлији t_0 нөгтәсинин јахын әтрафында јеканә кәсилмәз диференсиалланан $t = T(x)$ функсијасы тә'јин едир вә $t_0 = T(x_0)$. Тутаг ки, бу функсија (a, b) интервалында тә'јин олунмушдур. Онда $y = \psi(T(x)) \equiv f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \qquad (6)$$

тәнлијинин $y(T(x_0)) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли олур.

Тәрсинә, тутаг ки, $y = f(x)$ функсијасы үчүн $P(x, f(x)) \neq 0$, $x \in (a, b)$, $f(x_0) = y_0$ $(a < x_0 < b)$ шәртләри өдәнир вә $y = f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында (6) тәнлијинин һәллидир. Онда $x = t$, $y = f(t)$ функсијалары (4) системинин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ $(t_0 = x_0)$ шәртләрини өдәјән вә (a, b) интервалында тә'јин олунмуш һәллидир.

Демәли, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәси (4) системинин ади нөгтәси вә $P(x_0, y_0) \neq 0$ исә, системин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси көстәрилән мә'нада (6) тәнлијинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир.

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәси (4) системинин ади нөгтәси вә $Q(x_0, y_0) \neq 0$ исә, бу системин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (7)$$

тәнлијинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир.

Гејд едәк ки, (4) системинин ади нөгтәләри һәм дә (6) вә (7) тәнликләринин *ади нөгтәләри* адланыр. Ади олмајан нөгтәјә (4) системинин (демәли, һәм дә (6), (7) тәнликләринин) *мәхсуси нөгтәси* дејилир. Мәхсуси нөгтәнин мүәјјән әтрафында бу нөгтәдән башга бүтүн нөгтәләр ади нөгтә оларса, belә мәхсуси нөгтәјә *изолә олунмуш* (тәчрид олунмуш) *мәхсуси нөгтә* дејилир.

Тутаг ки, ади нөгтәнин тә'рифиндәки 1) вә 2) шәртләри өдәнир, лакин $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәси (4) системинин мәхсуси нөгтәси олур. Бу параграфда белә изолә олунмуш мәхсуси нөгтә әтрафында (4) системинин траjекторијаларынын јерләшмәси тәдгиг олунур.

б) *Каноник форма.* Әввәлчә ики тәртибли, сабит әмсаллы хәтти бирчинс

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y, \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \qquad (8)$$

системинә бахаг вә фәрз едәк ки,

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \qquad (9)$$

Онда (0, 0) нөгтәси (8) системинин вә демәли, һәм дә

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y}$$

тәнлијинин изолә едилмиш мәхсуси нөгтәси олур.

Гејд едәк ки, (8) системи сабит әмсаллы хәтти бирчинс системдир вә онун һәллини елементар функсијалар васитәсилә ифадә етмәк олар. Лакин мәгсәд (0, 0) нөгтәси әтрафында траjекторијаларын јерләшмәсини өјрәнмәкдән ибарәт олдуғундан, (8) системи

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \gamma x + \sigma y, \end{cases} \quad (\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0) \qquad (10)$$

әвәзләмәси васитәсилә

$$\text{(I)} \begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi, \\ \dot{\eta} = \mu\eta \end{cases} \quad (\lambda \neq 0, \mu \neq 0); \qquad \text{(II)} \begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi, \\ \dot{\eta} = \lambda(\xi + \eta); \end{cases} \quad (\lambda \neq 0);$$

$$(III)\ \begin{cases}\dot\xi = \lambda\xi + \mu\eta,\\ \dot\eta = -\mu\xi + \lambda\eta,\end{cases}\ (\lambda \neq 0,\ \mu < 0);\qquad (IV)\ \begin{cases}\dot\xi = \mu\eta,\\ \dot\eta = -\mu\xi,\end{cases}\ (\mu < 0)$$

шәкилли системләрдән биринә кәтириләрәк һәлл едилир.

Ајдындыр ки, $a_2 = b_1 = 0$ олдугда (8) системи (I) шәклиндәдир. Она көрә дә $a_2 \neq 0$ гәбул едәк вә (8) системинин көстәрилән шәкилләрдән биринә кәтирилмәси мәсәләсинә бахаг. (Ујғун мүһакимәләри $b_1 \neq 0$ олдугда да апармаг олар.)

Әвәзләмәдән алырыг ки,

$$\dot\xi = \alpha\dot x + \beta\dot y,\quad \dot\eta = \gamma\dot x + \sigma\dot y$$

Бурада $\dot x$, $\dot y$ әвәзинә (8) системинин сағ тәрәфләрини јазаг. Онда алынан системин (I) шәкилли систем олмасы үчүн

$$\begin{cases}\alpha(a_1x + b_1y) + \beta(a_2x + b_2y) = \lambda(\alpha x + \beta y),\\ \gamma(a_1x + b_1y) + \sigma(a_2x + b_2y) = \mu(\gamma x + \sigma y)\end{cases}\qquad (11)$$

олмалыдыр. Алынмыш ејниликләрдә x вә y-ин әмсалларыны бәрабәрләшдирсәк, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases}(a_1 - \lambda)\alpha + a_2\beta = 0,\\ b_1\alpha + (b_2 - \lambda)\beta = 0,\end{cases}\qquad (12)$$

$$\begin{cases}(a_1 - \mu)\gamma + a_2\sigma = 0,\\ b_1\gamma + (b_2 - \mu)\sigma = 0\end{cases}\qquad (13)$$

системләрини аларыг. Бу системләрин сыфырдан фәргли һәлләринин варлығы үчүн λ вә μ әдәдләри

$$\rho^2 - (a_1 + b_2)\rho + a_1b_2 - a_2b_1 = 0\qquad (14)$$

тәнлијинин көкләри олмалыдыр.

Гејд едәк ки, (9) шәртинә әсасән, (14) тәнлијинин һәр ики көкү сыфырдан фәрглидир. Бу тәнлијин дискриминантыны D илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, $D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1$.

Тутаг ки, $D > 0$. Онда (14) тәнлијинин ики һәгиги мүхтәлиф λ, μ көкләри вар. (12) вә (13) системләринин бу көкләрә ујғун олан

$$\alpha = a_2,\ \beta = \lambda - a_1,\ \gamma = a_2,\ \sigma = \mu - a_1\qquad (15)$$

һәлләрини көтүрәк. Онда $\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0$ вә (10) әвәзләмәләри васитәсилә (8) системи (I) шәклинә кәтирилир.

Тутаг ки, $D < 0$. Онда (14) тәнлијинин $\lambda = \rho_1 + i\rho_2$, $\mu = \rho_1 - i\rho_2$ $(\rho_2 < 0)$ комплекс гошма көкләри вар. Бу көкләр үчүн (12) вә (13) системләринин (15) дүстурлары илә верилән һәлләри вә алынан (I) системиндә ξ, η дәјишәнләри комплекс гошма олурлар. Онда $\xi = u - iv$, $\eta = u + iv$ әвәзләмәси апармагла

$$\dot u - i\dot v = (\rho_1 + i\rho_2)(u - iv),\quad \dot u + i\dot v = (\rho_1 - i\rho_2)(u + iv)$$

системини аларыг. Бурадан u вә v һәгиги дәјишәнләри үчүн

$$\begin{cases}\dot u = \rho_1 u + \rho_2 v,\\ \dot v = -\rho_2 u + \rho_1 v\end{cases}\qquad (16)$$

системи алынар. Ајдындыр ки, $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 < 0$ олдугда (16) системи (III) шәклиндә, $\rho_1 = 0$ олдугда исә (IV) шәклиндә системдир.

Тутаг ки, $D = 0$. Онда $\lambda = \mu = \frac{a_1 + b_2}{2}$ вә бу көкләр үчүн (12), (13) системләри ејни системә чеврилдијиндән, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ әдәдләрини $\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0$ шәрти дахилиндә тапмаг мүмкүн дејил. Она көрә дә, (8) системинин (10) әвәзләмәләри васитәсилә (II) шәклинә кәтирилмәси мәсәләсинә бахаг. Бу заман, јухарыда көстәрилән гајда илә (12) системи вә

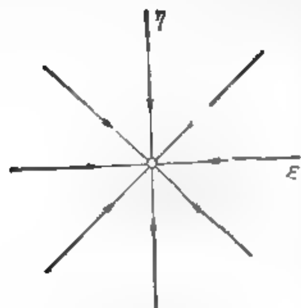
$$\begin{cases}(a_1 - \lambda)\gamma + a_2\sigma = \lambda\alpha,\\ b_1\gamma + (b_2 - \lambda)\sigma = \lambda\beta\end{cases}\quad \left(D = 0,\ \lambda = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)\right)\qquad (17)$$

системи алыныр. Ајдындыр ки, $\alpha = a_2\ (a_2 \neq 0)$, $\beta = \lambda - a_1 = \frac{1}{2}(b_2 - a_1)$, $\gamma = 0$, $\sigma = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$ әдәдләри (12) вә (17) системләринин һәллидир. Дикәр тәрәфдән, $D = (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)$ олдуғундан, (9) шәртинә әсасән, $\left[\frac{1}{2}(a_1 + b_2)\right]^2 = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ вә $a_2 \neq 0$ гәбул етдијимиз үчүн $\alpha\sigma - \beta\gamma = \frac{1}{2}a_2(a_1 + b_2) \neq 0$.

Беләликлә, (8) системи (10) гејри-махсуси чевирмәси васитәсилә һәмишә, (I), (II), (III), (IV) каноник системләриндән биринә кәтирилир вә (0, 0) нөгтәси бу системләр үчүн изолә едилмиш махсуси нөгтә олур.

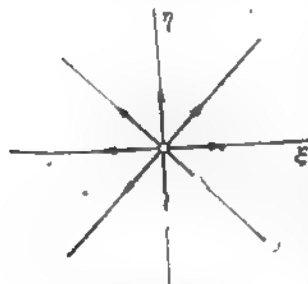
Гејд едәк ки, (10) чевирмәси һәндәси олараг дүзбучаглы xOy координат системиндән, үмумијјәтлә, чәпбучаглы $\xi O\eta$ координат системинә кечмәк демәкдир. Бу заман, координат башланғычы ејни галмагла, координат охларынын истигамәти вә миграс дәјишә биләр. Лакин әсас мәгсәд (8) системинин трајекторијаларынын (0, 0) нөгтәси әтрафында вәзијјәти һаггында тәсәввүр әлдә етмәкдән ибарәт олдуғундан, график-ләрин чәкилишинин садә олмасы үчүн $\xi O\eta$ координат системини дә дүзбучаглы систем гәбул едәчәјик.

в) *Садә һал үчүн махсуси нөгтәнин Пуанкаре тәснифаты.* Әввәлчә (I) системинин мүмкүн олан (*А*) $\lambda = \mu < 0$, (*Б*) $\lambda = \mu > 0$, (*В*) $\mu < \lambda < 0$, (*Г*) $0 < \mu < \lambda$, (*Ғ*) $\lambda < 0 < \mu$ һалларыны арашдыраг. (*А*) һалында һәлл $\xi = c_1e^{\lambda t}$, $\eta = c_2e^{\lambda t}$ шәклиндәдир вә $\lim\limits_{t\to\infty}(\xi^2 + \eta^2) = 0$. Демәли, трајекторија $t = 0$ анында (c_1, c_2) нөгтәсиндән кечән вә t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда (0, 0) нөгтәсинә јахынлашан ачыг јарымдүзхәтдир. Бу һалда (0, 0) махсуси нөгтәси



Шәкил 20

дајанычлы дүзкүн дүјүн нөгтәси адланыр (шәкил 20). (*Б*) һалында $\xi = c_1 e^{\lambda t}$, $\eta = c_2 e^{\lambda t}$ һәлли үчүн $\lim_{t \to -\infty} (\xi^2 + \eta^2) = 0$ шәрти өдәнир. Демәли, трајекторијалар t мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда $(0, 0)$ нөгтәсинә јахынлашан ачыг јарымдүзхәтләрдир. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәси *дајаныгсыз дүзкүн дүјүн нөгтәси* адланыр (шәкил 21). (*В*) һалында һәлл $\xi = c_1 e^{\lambda t}$, $\eta = c_2 e^{\mu t}$ шәклиндәдир. Ајдындыр ки, $\lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = 0$ вә $c_1 \neq 0$ олдугда $\lim_{t \to +\infty} \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = 0$. Беләликлә, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда трајекторијалар координат башланғычына јахынлашырлар вә лимит вәзијјәтиндә $O\xi$ охуна тохунурлар. Ајдындыр ки, $c_1 = c_2 = 0$ олдугда трајекторија $\xi = 0$, $\eta = 0$ таразлыг вәзијјәтидир. $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ олдугда, c_2-нин мүсбәт вә ја мәнфи олмасындан асылы олараг $\xi = 0$, $\eta = c_2 e^{\mu t}$ һәллинин трајекторијасы $O\eta$ охунун ачыг мүсбәт вә ја ачыг мәнфи јарымһиссәси олур. $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ олдугда исә $\xi = c_1 e^{\lambda t}$, $\eta = 0$ һәллинин трајекторијасы $O\xi$ охунун ачыг мүсбәт вә ја ачыг мәнфи јарымһиссәси олур. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәси *дајаныглы дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси адланыр* (шәкил 22). (*Г*) һалы (*В*) һалына охшар гајда илә арашдырылыр. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәси *дајаныгсыз дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси адланыр* (шәкил 23). (*Ғ*) һалында һәллин ифадәси (*В*) һалындакы кимидир, лакин бу һалда $\lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 0$ вә $c_2 > 0$ олдугда $\lim_{t \to \infty} \eta(t) = +\infty$, $c_2 < 0$ олдугда исә $\lim_{t \to \infty} \eta(t) = -\infty$. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәси *јәһәрвари мәхсуси нөгтә адланыр* (шәкил 24).

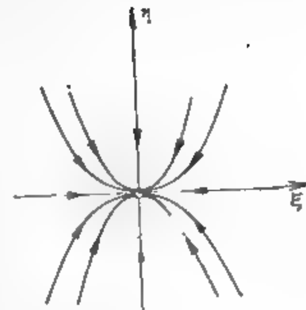


Шәкил 21.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (II) системинин $\xi(0) = c_1$, $\eta(0) = c_2$ шәртини өдәјән һәлли $\xi(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $\eta(t) = (c_2 + \lambda c_1 t) e^{\lambda t}$ шәклиндәдир. Бу һәллин трајекторијаларыны (A_1) $\lambda < 0$, ($Б_1$) $\lambda > 0$ һаллары үчүн арашдыраг.

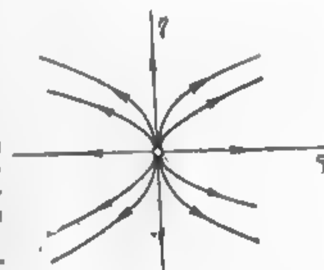
Ајдындыр ки, (A_1) һалында

$\lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = 0$ вә $c_1 \neq 0$ олдугда $\lim_{t \to +\infty} \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\eta(t)}{\xi(t)} = -\infty$. Демәли, һәлләрин трајекторијалары, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда $(0, 0)$ нөгтәсинә јахынлашырлар вә лимит вәзијјәтиндә $O\eta$ охуна тохунурлар. Хүсуси һалда $c_1 = 0$ оларса, $c_2 > 0$ олдугда трајекторија $O\eta$ охунун ачыг мүсбәт јарымһиссәси, $c_2 < 0$ олдугда исә ачыг мәнфи јарымһиссәсидир. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәси дајаныглы дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси олур (шәкил 25).



Шәкил 22.

Гејд едәк ки, ($Б_1$) һалында трајекторијалар (A_1) һалындакы кими јерләширләр, лакин t артдыгча нөгтәнин трајекторија бојунча һәрәкәт истигамәти дәјишир. Бу һалда $(0, 0)$ мәхсуси нөгтәси дајаныгсыз дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси олур (шәкил 26).



Шәкил 23.

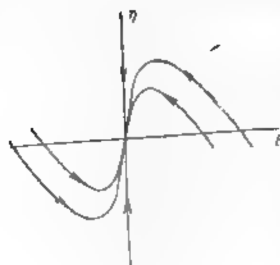
Галан (III), (IV) системләринин арашдырмаг үчүн $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$ әвәзләмәси апараг. Онда садә чевирмәләрдән сонра (III), (IV) системләри ујғун олараг

$$(\text{III}') \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\mu, \\ \dfrac{dr}{dt} = \lambda r, \quad (\lambda \neq 0, \ \mu < 0), \end{cases}$$

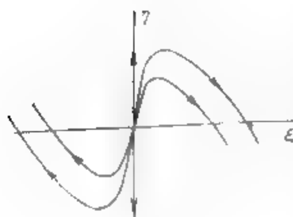
$$(\text{IV}') \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\mu, \\ \dfrac{dr}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\mu < 0)$$

шәклиндә системләрә кәтирилир.

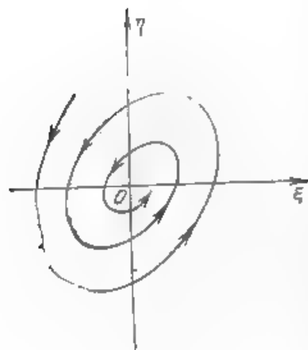
Шәкил 24.



Шәкил 25



Шәкил 26



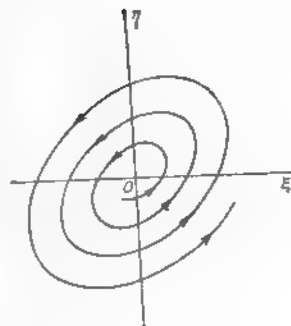
Шәкил 27.

Ајдындыр ки, $\theta=-\mu t+c_1$, $r=c_2e^{\lambda t}$ $(c_2>0)$ функсијалары (III′) системинин һәллидир вә полјар координат системиндә ујғун трајекторија $r=ce^{\frac{\lambda}{\mu}\theta}$ $(c=c_2e^{\frac{\lambda}{\mu}c_1})$ шәклиндәдир. Бурадан ајдындыр ки, $\lambda<0$ исә, θ мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда (III′) системинин трајекторијалары спиралвари (0, 0) нөгтәсинә јахынлашыр. Бу исә о демәкдир ки, $\lambda<0$ оларса, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда (III) системинин трајекторијалары спиралвари (0, 0) нөгтәсинә јахынлашырлар. Бу һалда (0, 0) нөгтәси *дајаныглы фокус нөгтәси адланыр.* (шәкил 27). Әкәр $\lambda>0$ оларса, θ артдыгча (III′) системинин трајекторијалары спиралвари (0, 0) нөгтәсиндән узаглашыр. Она көрә дә, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда (III) системинин трајекторијалары (0, 0) нөгтәсиндән узаглашыр. Бу һалда (0, 0) нөгтәси *дајаныгсыз фокус нөгтәси адланыр.* (шәкил 28).

(IV′) системинин һәлләри $\theta=-\mu t+c_1$, $r=c_2$ $(c_2>0)$ шәклиндәдир. Демәли, трајекторијалар мәркәзи (0, 0) нөгтәсиндә олан чевrәләр аилэсидир, јә'ни тсиклләрдән ибарәтдир. Бу һалда (0, 0) *махсуси нөгтәси мәркәз адланыр* (шәкил 29).

Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг.

Теорем 11. *Тутаг ки, (8) системиндә (9) шәрти өдәнир. Онда (0, 0) нөгтәси (8) системинин изолә едилмиш махсуси нөгтәсидир вә* $D=(a_1-b_2)^2+4a_2b_1=0$ *вә ја* $D>0$, $\Delta=a_1b_2-a_2b_1>0$ *оларса, (0, 0) нөгтәси дүјүн нөгтәси;* $D>0$, $\Delta<0$ *оларса, (0, 0) нөгтәси јәһәрвари нөгтә;* $D<0$, $a_1+b_2\neq0$ *оларса, (0, 0) фокус нөгтәси;* $D<0$, $a_1+b_2=0$ *оларса, (0, 0) нөгтәси мәркәз олур.*



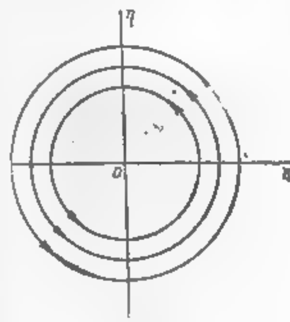
Шәкил 28

г). *Үмуми һалда махсуси нөгтәләрин тәснифаты.* Үмумилији позмадан, (0, 0) нөгтәсинин (4) системинин махсуси нөгтә олдуғуну фәрз етмәк олар. Әкс һалда координат башланғычыны паралел кочүрмәклә буна наил ола биләрик. Бу һалда ашағыдакы теорем доғрудур.

Теорем 12. *Тутаг ки, (4) системиндә 1)* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *функсијалары (0, 0) нөгтәсинин мүәјјән U әтрафында Липшис шәртини өдәјир, 2) һамысы бирдән сыфыр олмајан* a_1, b_1, a_2, b_2 *әдәдләри вар ки,* $P(x,y)=a_1x+b_1y+\varphi(x,y)$, $Q(x,y)=a_2x+b_2y+\psi(x,y)$, *бурада* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *функсијалары U әтрафында кәсилмәздирләр вә* $\varphi(x,y)=o(r)$, $\psi(x,y)=O(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, јә'ни $\lim\limits_{r\to0}\frac{\varphi(x,y)}{r}=0$, $\lim\limits_{r\to0}\frac{\psi(x,y)}{r}=0$, һәм дә $D=(a_1-b_2)^2+4a_2b_1=0$ *олдугда сонунчу шәрт мүәјјән* $\varepsilon>0$ *үчүн* $\varphi(x,y)=O(r^{(1+\varepsilon)})$, $\psi(x,y)=O(r^{(1+\varepsilon)})$ *шәрти илә әвәз олунур;* 3) $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq0$. *Онда (0, 0) нөгтәси*

$$\begin{cases}\dot{x}=a_1x+b_1y+\varphi(x,y),\\ \dot{y}=a_2x+b_2y+\psi(x,y)\end{cases}\qquad(18)$$

системинин изолә едилмиш махсуси нөгтәси олур вә $D=(a_1-b_2)^2+4a_2b_1=0$ *вә ја* $D>0$ *вә* $\Delta>0$ *олдугда дүјүн нөгтәси;* $D>0$ вә $\Delta<0$ *олдугда јәһәрвари нөгтә;* $D<0$ *вә* $a_1+b_2\neq0$ *олдугда фокус;* $D<0$ *вә* a_1+b_2 0 *олдугда мәркәз вә ја фокус олур.*



Шәкил 29.

Теоремдән ајдындыр ки, (14) тәнлијинин көкләринин һәгиги һиссәләри сыфырдан фәргли олдугда $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$

функсијалары мәхсуси нөгтәнин тәснифатында рол ојнамырлар, јә'ни бу һалда (0, 0) изолә едилмиш мәхсуси нөгтәси әтрафында (18) системинин трајекторијалары (8) системинин трајекторијалары кими јерләшир. Лакин (14) тәнлијинин көкләринин һәгиги һиссәләри сыфыр олдугда, (0, 0) нөгтәсинин (8) системи үчүн мәркәз мәхсуси нөгтә олмасына бахмајараг, (1) системи үчүн мәркәз олмаја биләр.

Мисал 1

$$\begin{cases} \dot x = y + 2y^3, \\ \dot y = -x - 2x^3 \end{cases}$$

системиндә $D = -4 < 0$, $a_1 + b_2 = 0$ олдуғундан (0, 0) нөгтәси үјғун хәтти бирҹинс систем үчүн мәркәз мәхсуси нөгтәдир. Системин трајекторијалары

$$(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0$$

тәнлијинин интеграл әјриләридир. Бурадан алырыг ки, трајекторијалар $x^2 + x^4 + y^2 + y^4 = c^2$ шәклиндәдир. Демәли, трајекторијалар координат башланғычыны дахилиндә сахлајан тсикллардир. Она көрә дә (0, 0) нөгтәси бахылан систем үчүн мәркәз олур.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot x = y + x(x^2 + y^2), \\ \dot y = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

системиндә $D < 0$, $a_1 + b_2 = 0$ вә (0, 0) нөгтәси үјғун хәтти бирҹинс систем үчүн мәркәз олур. Системдә $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ əвәзләмәси апарсаг,

$$\frac{d\theta}{dt} = -1, \quad \frac{dr}{dt} = r^3$$

системини аларыг. Бурадан $\theta = -t + c_1$, $r = \sqrt{\frac{1}{c_2 - 2t}}$. Үјғун трајекторијалар $r = \sqrt{\frac{1}{2\theta + c}}$ $(2\theta + c > 0)$ шәклиндәдир вә ајдындыр ки, θ мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда бу трајекторијалар координат башланғычына јахынлашырлар. Демәли, бахылан системин трајекторијалары t мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда спиралвари (0, 0) нөгтәсинә јахынлашарлар. Јә'ни (0, 0) нөгтәси бахылан системин дајаныгсыз фокус нөгтәсидир.

Чалышмалар

1. Ашағыдакы системләрин трајекторијаларыны гурмалы вә $x^2 + y^2 = 1$ лимит тсиклинин дајаныглығыны араштырмалы.

а) $\begin{cases} \dot x = y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot y = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$ *Ҹаваб*: дајаныглы.

б) $\begin{cases} \dot x = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot y = x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$ *Ҹаваб*: дајаныгсыз.

в) $\begin{cases} \dot x = y + x(x^2 + y^2 - 1)^2, \\ \dot y = -x. \end{cases}$ *Ҹаваб*: јарымдајаныглы.

2. Ашағыдакы системләрдә (0, 0) мәхсуси нөгтәсинин тәснифатыны верин вә һәмин нөгтә әтрафында трајекторијалары гурун:

а) $\begin{cases} \dot x = x - 2y, \\ \dot y = x - y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: мәркәз.

б) $\begin{cases} \dot x = x - 2y, \\ \dot y = 2x - 3y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: дајаныглы дүзкүн дүјүн.

в) $\begin{cases} \dot x = 2x + y, \\ \dot y = 3x + y \end{cases}$ *Ҹаваб*: јәһәрвари.

г) $\begin{cases} \dot x = 3x - y, \\ \dot y = x + 2y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: дајаныгсыз фокус.

д) $\begin{cases} \dot x = -2x + 5y, \\ \dot y = -x + y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: дајаныглы фокус.

е) $\begin{cases} \dot x = 3x - 2y, \\ \dot y = -5x + 4y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: дајаныгсыз дүзкүн олмајан дүјүн.

ж) $\begin{cases} \dot x = -3x + 2y, \\ \dot y = -5x + 3y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: мәркәз.

з) $\begin{cases} \dot x = -3x + y, \\ \dot y = -4x + 2y. \end{cases}$ *Ҹаваб*: јәһәрвари.

3. Ашағыдакы системләрин мәхсуси нөгтәләрини тә'јин един вә тәснифатыны верин:

а) $\begin{cases} \dot x = 13 - x^2 - y^2, \\ \dot y = (x - 3)(x + 2y - 8). \end{cases}$ *Ҹаваб*: (3, 2), (1,2, 3,4) — јәһәрвари нөгтәләр, (3, −2) — фокус, (2, 3) — дүјүн.

б) $\begin{cases} \dot x = 2x + y - xy, \\ \dot y = x + 2y - y^2. \end{cases}$ *Ҹаваб*: (0,0), (3, 3) — дүјүн нөгтәләри, (−1, 1) — јәһәрвари.

X ФӘСИЛ

БИРТӘРТИБЛИ ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛИ ТӘНЛИК АНЛАЈЫШЫ. КОШИ МӘСӘЛӘСИ

Сәрбәст дәјишәнләр $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqslant 2)$, ахтарылан функсија $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вә онун $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ хүсуси төрәмәләри арасында верилмиш

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1)$$

мүнасибәтинә *биртәртибли хүсуси төрәмәли диференсиал тәнлик* дејилир; бурада $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n)$ функсијасы $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$ дәјишәнләри фәзасынын һәр һансы G_{n+1} областында тә'јин олунмушдур.

Тутаг ки, $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијасынын $x_1, x_2, \dots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G_n областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар вә һәр бир $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n$ үчүн

1) $\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \in G_{n+1}$,

2) $F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0.$

Онда $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијасына G_n областында (1) тәнлијинин *һәлли* дејилир.

Ади диференсиал тәнликләрдә олдуғу кими (1) тәнлијинин һәлләринин тапылмасы мәсәләсинә онун *интегралланмасы* дејилир.

Ахтарылан функсијанын өзү вә төрәмәләри хәтти дахил олан

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} +$$
$$+ X_0(x_1, x_2, \dots, x_n)z = Y(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2)$$

тәнлијинә *хәтти тәнлик* дејилир. Хүсуси һалда, бу тәнликдә

$$X_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0, \ Y(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$$

олдугда белә тәнлијә *хәтти бирчинс тәнлик* дејилир. Анчаг ахтарылан функсијанын төрәмәләринә нәзәрән хәтти олан

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + P_n(x_1, x_2, \dots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} =$$
$$= R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \qquad (3)$$

тәнлијинә, *квазихәтти тәнлик* дејилир.

Тутаг ки, (1) тәнлији $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ төрәмәсинә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right). \qquad (4)$$

Бу тәнлијин

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \qquad (5)$$

шәртини өдәјән $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси* дејилир, бурада x_n^0 верилмиш әдәд, $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ исә верилмиш функсијадыр. Бу мәсәләјә һәм дә (1) тәнлији үчүн Коши мәсәләси дејилир.

Һәндәси изаһ вермәк үчүн, сәрбәст дәјишәнләрин сајы ики олан һала бахаг. Бу һалда сәрбәст дәјишәнләри x, y илә ишарә едиб (1) тәнлијини

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6)$$

шәклиндә јазаг. Ајдындыр ки, бу тәнлијин $z = \varphi(x, y)$ һәллинин графики x, y, z дәјишәнләри фәзасында бир сәтһ тәсвир едир. Һәмин сәтһә (6) тәнлијинин *интеграл сәтһи* дејилир.

Гејд едәк ки, $z = \varphi(x, y)$ функсијасынын кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олдуғундан, интеграл сәтһ һамар сәтһ олур.

Хүсуси һалда, (6) тәнлији $\frac{\partial z}{\partial x}$ төрәмәсинә нәзәрән һәлл олундугда, һәмин тәнлијин

$$\varphi(x^0, y) = g(y)$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг, һәндәси олараг, $x = x^0$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән $z = g(y)$ әјрисиндән кечән интеграл сәтһини тапмаг демәкдир.

Бә'зән (6) тәнлијинин, параметрик шәкилдә верилмиш

$$x = \varphi(s), \ y = \psi(s), \ z = h(s), \ s \in (\alpha, \beta) \qquad (7)$$

әјрисиндән кечән интеграл сәтһинин тапылмасы тәләб олунур. Белә мәсәләјә *үмумиләшмиш Коши мәсәләси* дејилир.

Бу мүһакимәләрә ујғун олараг, (1) тәнлијинин $z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ һәллинин $x_1, x_2, \dots, x_n, z$ дәјишәнләри фәзасында тәсвир етдији „сәтһә" һәмин тәнлијин интеграл сәтһи дејилир.

Бу фәсилдә хәтти вә квазихәтти хүсуси төрәмәли биртәртибли тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри араштырылыр.

Мисал 1. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ хәтти бирчинс тәнлијинә бахаг. Ајдындыр ки, $z=x^2-y^2$ һиперболик параболоиди бу тәнлијин интеграл сәтһидир вә $z(0,y)=-y^2$ шәртини өдәјир, јә'ни бу сәтһ $x=0$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән $z=-y^2$ параболасындан кечән интеграл сәтһидир.

Көстәрәк ки, истәнилән диференсиалланан $\Phi(u)$ функсијасы үчүн $z=\Phi(x^2-y^2)$ функсијасы да бахылан тәнлијин һәллидир. Доғрудан да, $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\Phi'(x^2-y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\Phi'(x^2-y^2)$ олдуғундан,

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=(2xy-2xy)\Phi'(x^2-y^2)\equiv 0.$$

Мисал 2. $a_1\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+a_2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=b$ тәнлијинин $z=\varphi(x)+\psi(y)$ шәклиндә һәллини тапаг; бурада a_1, a_2, b верилмиш әдәдләрдир вә $a_1^2+a_2^2>0$. Белә һәлл үчүн

$$a_1[\varphi'(x)]^2+a_2[\psi'(y)]^2=b$$

ејнилији өдәнмәлидир. Биринчи топланан анчаг x-дән, икинчи топланан анчаг y-дән асылы олдуғундан $\varphi'(x)=m$, $\psi'(y)=n$ олмалыдыр вә m, n әдәдләри $a_1m^2+a_2n^2=b$ шәртини өдәмәлидир. Бурада $a_2\neq 0$ гәбул етсәк, $n=\sqrt{\frac{b-a_1m^2}{a_2}}$ вә бахылан гејри-хәтти тәнлијин $z=mx+\sqrt{\frac{b-a_1m^2}{a_2}}\,y+c$ шәклиндә һәллини тапарыг. Бурада m, c ихтијари сабитләрдир.

Мисал 3. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$a_1\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+\dots+a_n\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^2=b,\ a_i=\text{const},\ i=1,2,\dots,n;$$

$$a_1^2+\dots+a_n^2>0,\ n>2$$

тәнлијинин $z=m_1x_1+\dots+m_nx_n+c$ шәклиндә һәлли вар; бурада $m_1,\dots,m_n$ әдәдләри $a_1m_1^2+\dots+a_nm_n^2=b$ шәртини өдәјән ихтијари әдәдләрдир, c исә ихтијари сабитдир. Демәли, тәнлијин тапылан һәлли n сајда ихтијари сабитдән асылыдыр.

Кәтирилән мисаллар көстәрир ки, ади диференсиал тәнликләрдән фәргли олараг, биртәртибли хүсуси төрәмәли тәнликләрин сәрбәстлик дәрәчәси, үмумијјәтлә, сонсуздур.

§ 2. БИРТӘРТИБЛИ ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛИ ХӘТТИ БИРЧИНС ТӘНЛИК

а) *Үмуми һәллин гурулмасы.* Тутаг ки,

$$\lambda[z]\equiv X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots+X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \qquad (8)$$

хәтти бирчинс тәнлији верилмишдир, бурада $X_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $i=1,2,\dots,n$ функсијалары мүәјјән G_n областында кәсилмәздирләр вә бу областын һеч бир нөгтәсиндә һамысы бирдән сыфра чеврилмир.

Јухарыда (IV фәсил, § 2, д) бәнди) ади диференсиал тәнликләр системини араштыраркән көстәрдик ки, (8) тәнлијинин интегралланмасы мәсәләси илә

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)} \qquad (9)$$

симметрик системинин интегралланмасы мәсәләси арасында әлагә вар. Даһа доғрусу, көстәрдик ки, $\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасы (9) системинин диференсиалланан интегралы исә $z=\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасы (8) тәнлијинин һәллидир вә тәрсинә, $z=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасы (8) тәнлијинин һәлли исә, $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасы (9) системинин диференсиалланан интегралыдыр.

(9) симметрик системинә (8) тәнлијинин *характеристик системи* дејилир.

Характеристик системин һәр бир һәллинә (8) тәнлијинин *характеристикалары* вә ја *характеристик әјриләри*, онун һәр бир диференсиалланан интегралына исә, тәнлијин *интегралы* дејилир.

Ајдындыр ки, (9) системи $n-1$ тәртибли нормал системә еквивалентдир. Одур ки, бу системин $n-1$ сајда функсионал асылы олмајан интегралы вар. Демәли, (8) тәнлијинин дә $n-1$ сајда функсионал асылы олмајан интегралы вар. (8) тәнлијинин G_n областында функсионал асылы олмајан $n-1$ сајда

$$\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\ \dots,\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (10)$$

интегралларына, онун һәмин областда *фундаментал интеграллар системи* дејилир.

Теорем 1. *Тутаг ки, (10) функсијалары системи G_n областында (8) тәнлијинин фундаментал интеграллар системидир вә $\Phi(u_1,u_2,\dots,u_{n-1})$ һәмин функсијаларын гијмәтләри чохлуғуну дахилиндә сахлајан областда мә'јин олунмуш ихтијари кәсилмәз диференсиалланан функсијадыр. Онда (8) тәнлијинин G_n областында үмуми һәлли*

$$z=\Phi\left(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) \qquad (11)$$

дүстуру илә верилир.

Исбаты. Әввәлчә көстәрәк ки, (11) дүстуру илә тә'јин олунан

$$z=\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\equiv\Phi\left(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)$$

функсијасы (8) тәнлијинин G_n областында һәллидир. Доғрудан да, (10) функсијалары (8) тәнлијинин һәлләри олдуғундан

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j},\quad j=1, 2, \dots, n$$

мүнасибәтинә әсасән

$$X[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]=\sum_{j=1}^{n}X_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}X_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\left[\sum_{j=1}^{n}X_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\right]=0$$

олар. Бу исә көстәрир ки, истәнилән диференсиалланан $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ функсијасы үчүн (11) дүстуру илә тә'јин олунан функсија (8) тәнлијинин һәллидир.

Көстәрәк ки, (8) тәнлијинин G_n областында тә'јин олунмуш һәр һансы $z=\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ һәллини, $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ функсијасыны сечмәклә (11) дүстурундан алмаг олар. Ајдындыр ки, $z=\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијасы вә (10) функсијалары G_n областында (8) тәнлијинин һәлләри олдуғундан, бу областда

$$\begin{aligned}
&X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0,\\
&X_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&X_1\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}=0
\end{aligned}\qquad (12)$$

ејниликләри өдәнир.

Һәр бир $(x_1, x_2, \dots, x_n)\in G_n$ нөгтәси үчүн (12) бәрабәрликләринә $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мәчһулларына нәзәрән n сајда хәтти бирчинс чәбри тәнликләр системи кими бахаг. Шәртә көрә G_n областынын һеч бир нөгтәсиндә $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијаларынын һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, һәр бир $(x_1, x_2, \dots, x_n)\in G_n$ нөгтәси үчүн (12) системинин сыфырдан фәргли һәлли вар. Буна көрә дә Кронекер-Капелли теореминә әсасән G_n областында

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}=\begin{vmatrix}
\frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\\
\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}
\end{vmatrix}=0$$

олмалыдыр. Јакобианлар һаггында теоремә әсасән бурадан алырыг ки, (бах IV фәсил, § 2) $\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ функсијалары арасында функсионал асылылыг вар. Јә'ни $u_1, u_2, \dots, u_n$ дәјишәнләри фәзасынын һеч бир алт областында ејниликлә сыфыр олмајан вә кәсилмәз диференсиалланан елә $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ функсијасы вар ки, G_n областында

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)\equiv F\left(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right)\equiv 0 \qquad (13)$$

шәрти өдәнир.

Көстәрәк ки, G_n областынын һәр бир нөгтәсиндә $\frac{D(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ јакобианынын биринчи сәтир елементләринин минорларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәргландир. Доғрудан да, үмумилији позмадан фәрз етмәк олар ки, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\in G_n$ нөгтәсиндә $X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)\neq 0$. Онда (9) симметрик системиндә x_n-ә сәрбәст дәјишән, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ дәјишәнләринә исә онун функсијалары кими бахсаг, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында һәмин системи

$$\begin{cases}
\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}
\end{cases}\qquad (14)$$

нормал системинә кәтирмәк олар вә $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијалары бу нормал системин функсионал асылы олмајан, диференсиалланан интеграллардыр. Одур ки, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсинин әтрафында (бах: IV фәсил, § 2)

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Јакобианлар һаггында теоремә әсасән, бурадан алырыг ки, (13) тәнлији ψ-јә нәзәрән һәлл олунандыр

$$\psi = \Psi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Шәртә көрә $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функсијасы кәсилмәз диференсиалланан олдуғундан, $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ функсијасы да кәсилмәз диференсиалланандыр. Теорем исбат олунду.

Мисал 4.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} - (x_2 + 2x_3)\frac{\partial z}{\partial x_2} + (3x_2 + 4x_3)\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0$$

тәнлијинин үмуми һәллини тапаг.

Тәнлијин характеристик системи

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-(x_2 + 2x_3)} = \frac{dx_3}{3x_2 + 4x_3}$$

шәклиндәдир вә ону

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2 + dx_3}{2(x_2 + x_3)} = \frac{3dx_2 + 2dx_3}{3x_2 + 2x_3}$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан алынан

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d(x_2 + x_3)}{2(x_2 + x_3)}, \quad \frac{dx_1}{1} = \frac{d(3x_2 + 2x_3)}{3x_2 + 2x_3}$$

системини һәлл етсәк,

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)e^{-2x_1},$$
$$\psi_2(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + 2x_3)e^{-x_1}$$

интегралларыны аларыг. Дикәр тәрәфдән,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} e^{-2x_1} & e^{-2x_1} \\ 3e^{-x_1} & 2e^{-x_1} \end{vmatrix} = -e^{-3x_1} \neq 0$$

олдуғундан, бу интеграллар фундаментал интеграллар системи тәшкил едир. Онда, теоремә әсасән, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$z = \Phi\left((x_2 + x_3)e^{-2x_1},\ (3x_2 + 2x_3)e^{-x_1}\right)$$

олар; бурада $\Phi(u_1, u_2)$ ихтијари диференсиалланан функсијадыр.

б) *Үмуми һәллин варлығы.* **Үмуми һәллин варлығы һаггында теореми исбат етмәк үчүн**

$$\frac{\partial z}{\partial t} + f_1(t, x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + f_m(t, x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial z}{\partial x_m} = 0 \quad (15)$$

шәклиндә тәнлијә бахаг вә фәрз едәк ки, $f_i(t, x_1, \ldots x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары $m+1$ өлчүлү фәзанын мүәјјән G_{m+1} областында тә'јин олунмушлар.

Гејд едәк ки, (8) шәклиндә олан тәнлији һәр бир $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ нөгтәсинин мүәјјән этрафында (15) шәклиндә тәнлијә кәтирмәк олар. Бундан башга X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ әмсалларындан бири G_n областынын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәргли оларса, бу заман (8) тәнлијини бүтүн областда (15) шәкилли тәнлијә кәтирмәк олар.

Теорем 2. *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары G_{m+1} областында кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$ хүсуси төрәмәләри вар. Онда мүәјјән $G'_{m+1} \subset G_{m+1}$ алт областында (15) тәнлијинин фундаментал интеграллар системи вар.*

Исбаты. Ајдындыр ки, (15) тәнлијинин характеристик системини

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (16)$$

шәклиндә јазмаг олар

Гејд едәк ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары үзәриндә гојулан шәртләрә вә (16) нормал системинин башлангыч шәртләрдән асылылығы теоремләринә әсасән, истәнилән $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m) \in G_{m+1}$ нөгтәси үчүн һәмин системин $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ шәртләрини өдәјән јеканә $x_i = \varphi_i(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ һәлли вар. Бу һәлл $t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G_{m+2} областында тә'јин олунуб вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга Линделјоф теореминә әсасән, $\varphi_i(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары һәр бир гејд олунмуш t үчүн тә'јин олундуғу областда $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләринә нәзәрән

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + f_1(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \cdots + f_m(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)\frac{\partial u}{\partial \xi_m} = 0 \qquad (17)$$

тәнлијини өдәјир (бах: VI фәсил, § 3).

Гејд олунмуш t_0 үчүн

$$\psi_i(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m) = \varphi_i(t_0, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

функсијаларыны дүзәлдәк. Бу функсијаларын һамысы $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләринә нәзәрән мүәјјән $G'_{m+1} \subset G'_{m+1}$ областында тә'јин олунублар, бу областда (17) хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлләридир вә

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(\tau, \xi_2, \ldots, \xi_m)} > 0$$

шәрти өдәнир. Бурадан алыныр ки, $\psi_1(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots$ $\psi_m(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ функсијалары G_{m+1} областында (17) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир. Одур ки, $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләрини ујғун олараг $t, x_1, \ldots, x_m$ дәјишәнләри илә әвәз етсәк,

$$\psi_i(t, x_1, \ldots, x_m) = \varphi_i(t_0, t, x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (18)$$

бәрабәрликләри илә тә'јин олунан $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots,$ $\psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ функсијалары (15) тәнлијинин фундаментал интеграллар системи олур. Теорем исбат олунду.

Бу теоремә вә 1-чи теоремә әсасән алыныр ки, (15) тәнлијинин G_{m+1} областында үмуми һәлли вар. Бундан башга $x_1 = \varphi_1(t, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, x_m = \varphi_m(t, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ функсијалары (16) системинин $x_i(t_0) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ шәртләрини өдәјән һәлли олдуғундан, (18) бәрабәрликләриндән ајдындыр ки,

$$\psi_i(t_0, x_1, \ldots, x_m) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (19)$$

шәртләри өдәнир.

Мисал 5.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i x_i + \beta_i t) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

тәнлијинин фундаментал интеграллар системини гураг; бурада

$$\alpha_i = \text{const} \neq 0, \ \beta_i = \text{const}, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ујғун характеристик систем

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i + \beta_i t, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

шәклиндәдир вә бу системин $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ шәртләрини өдәјән һәлли

$$\varphi_i(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m) = e^{\alpha_i(t-\tau)}\left[\xi_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(\tau + \frac{1}{\alpha_i}\right)\right] - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(t + \frac{1}{\alpha_i}\right),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

олар. Теоремә әсасән

$$\psi_i(t, x_1, \ldots, x_m) = \varphi_i(0, t, x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= e^{-\alpha_i t}\left[x_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(t + \frac{1}{\alpha_i}\right)\right] - \frac{\beta_i}{\alpha_i^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

функсијалары бахылан тәнлијин фундаментал интеграллар системи олар. Доғрудан да, асанлыгла јохламаг олар ки, бу функсијаларын һәр бири бахылан тәнлији өдәјир. Дикәр тәрәфдән

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)t} > 0$$

олдуғундан, һәмин функсијалар функсионал асылы дејилдир.

в) *Коши мәсәләсинин һәлли.* Исбат едиләк теоремләр бир даһа көстәрир ки, хәтти тәнлијин һәлли бир ихтијари функсијадан асылыдыр вә тәнлијин мүәјјән һәллини гурмаг үчүн һәмин ихтијари функсијаны сечмәк лазымдыр. Бу функсијаны сечмәк үсулларындан бири верилмиш тәнлик үчүн Коши мәсәләсини һәлл етмәкдән ибарәтдир. Коши мәсәләсинин һәллинин варлығыны көстәрмәздән әввәл бә'зи анлајышлар верәк.

$m+1$ өлчүлү фәзанын $t = t_0$ мүстәвисинин тамамилә G_{m+1} областында јерләшән ачыг, әлагәли һиссәсини L илә, G_{m+1} областынын (18) бәрабәрликләриндә тә'јин олунан $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ функсијаларынын варлығыны тә'мин едән вә (16) системинин L-дән кечән интеграллары илә өртүлән һиссәсини исә $G_{m+1}(L)$ илә ишарә едәк. $G_{m+1}(L)$ областына (15) тәнлијинин *характеристик мејданы* дејилир.

Теорем 3. *Тутаг ки, (15) тәнлијинин (18) бәрабәрликләри илә тә'јин олунан $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ интеграллары $G_{m+1}(L)$ областында $a_1 < \psi_1 < b_1, \ldots, a_m < \psi_m < b_m$ шәртләрини өдәјирләр, $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ исә $R = \{a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_m < x_m < b_m\}$ областында кәсилмәз диференсиалланан функсијадыр. Онда (15) тәнлијинин $\varphi(t_0, x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ шәртини өдәјән вә $G_{m+1}(L)$ областында тә'јин олунан јеканә $z = \varphi(t, x_1, \ldots, x_m)$ һәлли вар. Бу һәлл*

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_m) = g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)) \qquad (20)$$

дүстуру илә верилир.

Исбаты. Теоремин шәртинә көрә $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функсијасы R областында диференсиалланан олдуғундан, 1-чи теоремә әсасән $z = g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m))$ функсијасы (15) тәнлијинин һәллидир вә (19) бәрабәрликләринә әсасән, $t = t_0$ олдугда

$$g(\psi_1(t_0, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t_0, x_1, \ldots, x_m)) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

шәрти өдәнир. Јә'ни (20) функсијасы Коши мәсәләсинин һәллидир.

Һәллин јеканәлијини көстәрмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, $G_{m+1}(L)$ областында Коши мәсәләсинин башга бир $z = \tilde{\varphi}(t, x_1, \ldots, x_m)$ һәлли дә вар. Онда үмуми һәллин тә'рифинә әсасән, R областында кәсилмәз диференсиалланан елә $\tilde{\Phi}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ функсијасы вар ки,

$$\tilde{\varphi}(t, x_1, \ldots, x_m) = \tilde{\Phi}(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)).$$

Дикәр тәрәфдән, (19) шәртинә әсасән, $t = t_0$ олдугда,

$\tilde{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ олдуғундан, алырыг ки,

$$\tilde{\varphi}(t, x_1, \ldots, x_m) = g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m))$$

олмалыдыр. Бу исә көстәрир ки, һәлл јеканәдир. Теорем исбат олунду.

Мисал 6.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + x\frac{\partial z}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

тәнлијинин $\varphi(0, x, y) = g(x, y)$ шәртини өдәјән һәллини тапаг.

Бунун үчүн әввәлчә

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

характеристик системинин $x(\tau) = \xi$, $y(\tau) = \eta$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини гураг:

$$x = \varphi_1(t, \tau, \xi, \eta) = \xi e^{t-\tau}, \quad y = \varphi_2(t, \tau, \xi, \eta) = e^{t-\tau}[\eta + \xi(t-\tau)].$$

Бурадан (18) бәрабәрликләринә әсасән алыныр ки,

$$\psi_1(t, x, y) = \varphi_1(0, t, x, y) = xe^{-t}, \quad \psi_2(t, x, y) = \varphi_2(0, t, x, y) = e^{-t}(y - xt)$$

функсијалары бахылан тәнлијин фундаментал интеграллар системидир. Онда (20) дүстуруна әсасән

$$z = g(xe^{-t}, (y - xt)e^{-t})$$

функсијасы бахылан тәнлијин $\varphi(0, x, y) = g(x, y)$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли олур.

Тәрсинә. Тутаг ки, $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ функсијалары (15) тәнлијинин (19) шәртини өдәмәјән фундаментал интеграллар системидир. Бу функсијаларын көмәји илә (15) тәнлијинин (19) шәртини өдәјән фундаментал интеграллар системини гурмаг үчүн

$$\begin{cases} \psi_1(t_0, x_1, \ldots, x_m) = \gamma_1, \\ \psi_2(t_0, x_1, \ldots, x_m) = \gamma_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_m(t_0, x_1, \ldots, x_m) = \gamma_m \end{cases} \tag{21}$$

системини дүзәлдәк. Шәртә көрә $\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \neq 0$ олдуғундан, (21) системинин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дәјишәнләринә нәзәрән јеканә

$$x_1 = \omega_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \quad x_2 = \omega_2(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \ldots, x_m = \omega_m(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \tag{22}$$

һәлли вар вә $\omega_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \ldots, \omega_m(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ кәсилмәз диференсиалланан функсијалардыр. Бу функсијаларын көмәји илә

$$\tilde{\psi}_i(t, x_1, \ldots, x_m) = \omega_i(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

функсијаларыны дүзәлдәк. Онда 1-чи теоремә әсасән $\tilde{\psi}_i(t, x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары (15) тәнлијинин интеграллары олур вә (21), (22) мүнасибәтләриндән ајдындыр ки,

$$\tilde{\psi}_i(t_0, x_1, \ldots, x_m) = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{19'}$$

шәртләри өдәнир. Һәм дә $t = t_0$ олдугда $\frac{D(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = 1$ олдуғундан, $(t_0, x_1, \ldots, x_m)$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында $\tilde{\psi}_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \tilde{\psi}_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ интеграллары (15) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир. Онда 3-чү теоремә әсасән, (15) тәнлијинин $\varphi(t_0, x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ шәртини өдәјән һәлли

$$z = g(\tilde{\psi}_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \tilde{\psi}_m(t, x_1, \ldots, x_m)) = g(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m), \ldots, \omega_m(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m))$$

дүстуру илә тә'јин олунар.

Мисал 7. $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ $(x \neq 0)$ тәнлијинин $\varphi(0, x, y) = x^2y$ шәртини өдәјән һәллини гураг.

Ујғун характеристик систем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{x}, \\ \dot{y} = -\frac{y^2}{x^2}. \end{cases}$$

Бурадан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

олдуғундан, $xy = c_1$ системин биринчи интегралыдыр. Бу интегралдан, y-и тә'јин едәрәк системин биринчи тәнлијиндә јазыб һәлл етсәк, $x^3 = 3c_1t + c_2$. Беләликлә,

$$xy = c_1, \quad x^3 - 3xyt = c_2$$

системин биринчи интеграллары олар. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\psi_1(t, x, y) = xy$, $\psi_2(t, x, y) = x^3 - 3xyt$ функсијалары бахылан тәнлијин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир.

Бу интеграллар (19) шәртләрини өдәмир. Она көрә дә $t_0 = 0$ гәбул едәрәк

$$xy = \gamma_1, \quad x^3 = \gamma_2$$

системини дүзәлдәк. Бурадан

$$x = \omega_1(\gamma_1, \gamma_2) = \sqrt[3]{\gamma_2}, \quad y = \omega_2(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\gamma_1}{\sqrt[3]{\gamma_2}}.$$

Гејдә әсасән

$$\bar{\psi}_1(t, x, y)=\sqrt[3]{x^3-3xyt},\ \bar{\psi}_2(t, x, y)=\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3-3xyt}}$$

функсијалары бахылан тәнлијин (19) шәртләрини өдәјән интеграллардыр. Онда, бахылан тәнлијин $\varphi(0, x, y)=x^2y$ шәртини өдәјән һәлли

$$z=xy\sqrt[3]{x^3-3xyt}$$

олар.

§ 3. ИКИ СӘРБӘСТ ДӘЈИШӘН ҺАЛЫ ҮЧҮН КВАЗИХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) *Һәндәси изаһ.* Тутаг ки,

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z) \qquad (23)$$

тәнлији верилмишдир, бурада $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ әмсаллары вә $R(x, y, z)$ сәрбәст һәдди мүәјјән G_3 областында кәсилмәз диференсиалланан функсијалардыр вә бу областда $|P(x, y, z)|+|Q(x, y, z)|>0$ шәрти өдәнир.

Мә'лумдур ки, бу тәнлијин $z=\varphi(x, y)$ интеграл сәтһинә $(x, y, z)\in G_3$ нөгтәсиндә чәкилән тохунан мүстәвинин тәнлији

$$\varphi_x(x, y)(X-x)+\varphi_y(x, y)(Y-y)=Z-z \qquad (24)$$

олур вә (x, y, z) нөгтәсинә бу мүстәвинин *дашыјычы нөгтәси*, $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$ әдәдләринә исә *истигамәтверичи әмсаллар* дејилир.

Верилмиш $(x, y, z)\in G_3$ нөгтәсиндән кечән вә p, q истигамәтверичи әмсаллары

$$P(x, y, z)p+Q(x, y, z)q=R(x, y, z) \qquad (25)$$

тәнлијини өдәјән

$$p(X-x)+q(Y-y)=Z-z \qquad (26)$$

мүстәвиләринә бахаг.

Ајдындыр ки, (x, y, z) нөгтәсини гејд едиб, p, q истигамәтверичи әмсалларына (25) шәртини өдәмәклә мүхтәлиф гијмәтләр версәк, (26) тәнлији мүстәвиләр дәстәси тәшкил едәр вә (24) шәртинә әсасән, бу мүстәвиләр дәстәсиндән бир мүстәви $z=\varphi(x, y)$ сәтһинә (x, y, z) нөгтәсиндә тохунан олар.

Верилмиш $(x, y, z)\in G_3$ нөгтәсиндән кечән вә истигамәтверичи вектору $(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$ олан

$$\frac{X-x}{P(x, y, z)}=\frac{Y-y}{Q(x, y, z)}=\frac{Z-z}{R(x, y, z)} \qquad (27)$$

дүз хәтти, (25) шәртинә әсасән, (26) мүстәвиләр дәстәси үзә-

риндә јерләшир, ја'ни һәмин мүстәвиләр дәстәсинин кәсишмә хәтти олур. Бу дүз *хәттә Монж оху* дејилир.

Демәли, (25) тәнлији һәр бир $(x, y, z)\in G_3$ нөгтәсиндә Монж оху илә тә'јин олунан истигамәт мүәјјән едир вә (26) мүстәвиләр дәстәси бу истигамәтдән кечир.

Беләликлә, (23) тәнлијини һәлл етмәк, һәндәси олараг елә $z=\varphi(x, y)$ һамар сәтһи тапмаг демәкдир ки, онун һәр бир (x, y, z) нөгтәсиндә тохунан мүстәвиси бу нөгтәнин тә'јин етдији (26) мүстәвиләр дәстәсинин ичәрисиндә олсун. Ајдындыр ки, (x, y, z) нөгтәсиндән чыхан $(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$ вектору $z=\varphi(x, y)$ сәтһинә һәмин нөгтәдә чәкилән тохунан мүстәви үзәриндә јерләшир.

Һәр бир (x, y, z) нөгтәсиндә тохунан вектору $(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$ олан әјријә (23) тәнлијинин *характеристик әјриси* вә ја *характеристикасы* дејилир.

Мә'лумдур ки, үч өлчүлү фәзада верилмиш әјринин һәр һансы (x, y, z) нөгтәсиндә тохунанынын истигамәтверичи вектору (dx, dy, dz) илә тә'јин олунур. Бурадан, тә'рифә әсасән алырыг ки, характеристик әјринин һәр бир (x, y, z) нөгтәсиндә $(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$, (dx, dy, dz) векторлары коллинеар векторлардыр, јә'ни

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)}. \qquad (28)$$

Демәли, (28) системи характеристикаларын диференсиал тәнлији олур. Бу система (23) тәнлијинин *характеристик системи* дејилир.

Теорем 4. *(23) тәнлијинин һәр бир интеграл сәтһи, бир параметрдән асылы характеристик әјриләрлә өртүлмүшдүр вә тәрсинә бир параметрдән асылы олан характеристик әјриләрин әмәлә кәтирдији һәр бир һамар сәтһ бу тәнлијин интеграл сәтһидир.*

Исбаты. Тутаг ки, $z=\varphi(x, y)$ функсијасы (23) тәнлијинин G_2 областында һәллидир. $z=\varphi(x, y)$ интеграл сәтһи үзәриндә јерләшән вә һәр бир нөгтәсиндә тохунан вектору $(P(x, y, \varphi(x, y)),\ Q(x, y, \varphi(x, y)),\ R(x, y, \varphi(x, y)))$ олан әјри гураг. Белә әјринин xOy мүстәвисинә пројексијасынын диференсиал тәнлији

$$\frac{dx}{P(x, y, \varphi(x, y))}=\frac{dy}{Q(x, y, \varphi(x, y))} \qquad (29)$$

олар. Бу тәнлији дә, G_2 областынын һәр бир нөгтәсинин әтрафында

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y, \varphi(x, y))}{P(x, y, \varphi(x, y))} \text{ вә ја } \frac{dx}{dy}=\frac{P(x, y, \varphi(x, y))}{Q(x, y, \varphi(x, y))}$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ функсијалары үзәринә гојулан шәртләрә әсасән алырыг ки, һәр бир $(x, y) \in G_2$ нөгтәсиндән (29) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Бу тәнлијин үмуми һәллинин $y = \omega(x, c)$ шәклиндә олдуғуну фәрз едиб,

$$\begin{cases} y = \omega(x, c), \\ z = \varphi(x, \omega(x, c)) \end{cases} \qquad (30)$$

фәза әјриләри аиләсинә бахаг. Шәртә көрә $z = \varphi(x, y)$ функсијасы (23) тәнлијинин һәлли олдуғундан, бурадан алырыг ки,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{Q}{P} =$$

$$= \frac{1}{P}\left[P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = \frac{R(x, \omega(x, c), \varphi(x, \omega(x, c)))}{P(x, \omega(x, c), \varphi(x, \omega(x, c)))}.$$

Бу исә о демәкдир ки, (30) фәза әјриләри аиләси һәм дә

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \text{ вә ја } \frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \qquad (31)$$

тәнлијини өдәјир. Бурадан алырыг ки, (30) аиләси (28) системинин һәллидир. Бу көстәрир ки, $z = \varphi(x, y)$ интеграл сәтһи бир параметрдән асылы олан (30) характеристик әјриләр аиләси илә өртүлмүшдүр.

Тәрсинә, тутаг ки, $z = \varphi(x, y)$ һамар сәтһи характеристик әјриләрдән дүзәлдилмишдир. Бу сәтһ үзәриндә ихтијари (x, y, z) нөгтәси көтүрәк. Онда (23) тәнлијинин бу нөгтәдән кечән вә $z = \varphi(x, y)$ сәтһи үзәриндә јерләшән характеристик әјриси вардыр. Ајдындыр ки, (x, y, z) нөгтәсиндә бу характеристик әјријә чәкилән (27) тохунан дүз хәтти, (25) шәртинә әсасән, (26) мүстәвиләр дәстәси үзәриндә јерләшир. Дикәр тәрәфдән, (x, y, z) нөгтәсиндә $z = \varphi(x, y)$ сәтһинә чәкилән тохунан мүстәви (24) тәнлијә илә тә'јин олундуғундан, бу мүстәви (26) мүстәвиләр дәстәсинә дахилдир. Онда һәллин һәндәси изаһына көрә, $z = \varphi(x, y)$ сәтһи (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олур. Теорем исбат олунду.

Гејд едәк ки, P, Q, R функсијалары үзәринә гојулан шәртләрдән алыныр ки, һәр бир $(x, y, z) \in G_3$ нөгтәсиндән (23) тәнлијинин јеканә характеристик әјриси кечир. Она көрә дә һәр һансы характеристик әјринин мүәјјән интеграл сәтһ илә ортаг нөгтәси варса, о тамамилә һәмин сәтһ үзәриндә јерләшир.

Инди исә интеграл сәтһин бир параметрдән асылы характеристик әјриләр аиләсинин көмәјилә гурулмасы мәсәләсинә бахаг.

Тутаг ки, $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$ функсијалары (28) характеристик системинин G_3 областында кәсилмәз диференсиалланан вә функсионал асылы олмајан интеграллардыр. Онда G_3 областында

$$\begin{cases} P(x, y, z)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} + Q(x, y, z)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} + R(x, y, z)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0, \\ P(x, y, z)\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} + Q(x, y, z)\dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} + R(x, y, z)\dfrac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (32)$$

ејниликләри өдәнир вә

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

матрисинин рангы икијә бәрабәрдир.

Һәр бир $(x, y, z) \in G_3$ нөгтәси үчүн (32) бәрабәрликләринә P, Q, R функсијаларына нәзәрән чәбри тәнликләр системи кими бахыб һәлл етсәк,

$$\frac{P(x, y, z)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Q(x, y, z)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial z} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{R(x, y, z)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix}} \qquad (33)$$

мүнасибәтләрини аларыг.

Мә'лумдур ки, c_1, c_2 сабитләринин мүмкүн гијмәтләриндә

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2 \qquad (34)$$

бәрабәрликләринин һәр бири бир сәтһ тәсвир едир вә бу сәтһләрин кәсишмә хәтти (23) тәнлијинин характеристик әјриси олур.

Ајдындыр ки, c_1, c_2 сабитләри мүәјјән

$$\Phi(c_1, c_2) = 0 \qquad (35)$$

гануну үзрә дәјишдикдә, (34) мүнасибәтләри бир параметрдән асылы әјриләр аиләси тәшкил едир. Көстәрәк ки, $\Phi(u_1, u_2)$ ихтијари кәсилмәз диференсиалланан вә $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right| + \left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right| > 0$ шәртини өдәјән функсија олдугда

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0 \qquad (36)$$

бәрабәрлијиндән тә'јин олунан сәтһ, (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олур. Бунун үчүн (36) бәрабәрлијиндә z-ә x, y дәјишәнләринин функсијасы кими бахыб, x вә y-ә нәзәрән төрәмәләрини тапаг:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}\right] + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}\right] = 0.$$

һәр бир $(x, y, z) \in G_3$ нөгтәси үчүн бу бәрабәрликләрә $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}$ мәчһулларына нәзәрән чәбри тәнликләр системи кими бахаг. Шәртә көрә $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}$ төрәмәләринин һәр икиси бирдән сыфр олмадығындан,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

вә ја

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad (37)$$

олмалыдыр. Бурада (33) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, (23) тәнлијини аларыг. Бу да көстәрир ки, (36) бәрабәрлијиндән тә'јин олунан сәтһ (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олур.

б) *Үмуми Коши мәсәләси.* Тутаг ки, графики G_3 областында јерләшән l һамар әјриси верилмишдир вә

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ z = h(s),\ s \in (\alpha, \beta) \qquad (38)$$

бу әјринин параметрик шәкилдә тәнлијидир; бурада $|\varphi'(s)| + |\psi'(s)| > 0$ вә l әјрисинин xOy мүстәвиси үзәриндәки проjексијасы l_0 өз-өзүнү кәсмир. Јухарыда гејд олундуғу кими (23) тәнлијинин l әјрисиндән кечән вә l_0 проjексијасынын мүәјјән әтрафында тә'јин олунан һәллинин тапылмасы мәсәләсинә үмуми Коши мәсәләси дејилир.

Теорем 5. *Тутаг ки, P, Q, R функсијалары вә (38) әјриси јухарыда гојулан шәртләри өдәјир. Онда 1) $\Delta(s) = P(\varphi(s), \psi(s), h(s))\psi'(s) - Q(\varphi(s), \psi(s), h(s))\varphi'(s) \neq 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ олдугда үмуми Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар; 2) $\Delta(s) = 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ вә l характеристик әјри олдугда үмуми Коши мәсәләсинин сонсуз сајда һәлли вар, 3) $\Delta(s) = 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ вә l характеристик әјри олмадыгда исә үмуми Коши мәсәләсинин һәлли јохдур.*

Исбаты. Параметр дахил етмәклә (28) характеристик системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases} \qquad (39)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Теоремин шәртләри дахилиндә һәр бир $s \in (\alpha, \beta)$ үчүн (39) системинин

$$x(t_0) = \varphi(s),\ y(t_0) = \psi(s),\ z(t_0) = h(s) \qquad (40)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән вә t_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бу һәлли

$$x = \Phi(t, s),\ y = \Psi(t, s),\ z = H(t, s) \qquad (41)$$

илә ишарә едәк. Һәллин параметрләрдән вә башланғыч шәртләрдән асылылығы һаггында теоремләрә әсасән (41) функсијалары $D_\delta = \{|t - t_0| < \delta;\ \alpha < s < \beta\}$ ($\delta > 0$) областында тә'јин олунуб онлар кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга, (41) функсијаларынын (39) системинин һәлли олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(t, s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} & \frac{\partial \Psi}{\partial s} \end{vmatrix} = P(\Phi, \Psi, H)\frac{\partial \Psi}{\partial s} - Q(\Phi, \Psi, H)\frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

јакобианы $t = t_0$ олдугда $\Delta(s)$-ә бәрабәр олур. Она көрә $\Delta(s) \neq 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ олдугда $0 < \delta_1 < \delta$ шәртини өдәјән елә δ_1 әдәди вар ки, $D_{\delta_1} = \{|t - t_0| < \delta_1,\ \alpha < s < \beta\}$ областында $\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(t, s)} \neq 0$ олур. Бурадан алырыг ки, (41) бәрабәрликләриндән биринчи икиси t, s дәјишәнләринә нәзәрән һәлл олунандыр,

$$t = T(x, y),\ s = S(x, y). \qquad (42)$$

Бу функсијалар l_0 проjексијасынын мүәјјән әтрафында тә'јин олунуб вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә

$$z = H(T(x, y), S(x, y)) \equiv F(x, y) \qquad (43)$$

функсијасы да l_0-ын әтрафында тә'јин олунуб вә бу әтрафда кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Дикәр тәрәфдән

$$\frac{dz}{dt} = R \quad \text{вә} \quad \frac{dz}{dt} = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} = PF_x + QF_y$$

олдуғундан, алырыг ки, $z = F(x, y)$ функсијасы (23) тәнлијинин һәллидир.

Ајдындыр ки, (41) мүнасибәтләриндә $t = t_0$ јазсаг $z(t_0) = F(\varphi(s), \psi(s)) = h(s)$, $s \in (\alpha, \beta)$ олар. Бурадан алырыг ки, l әјриси $z = F(x, y)$ сәтһи үзәриндә јерләшир. Демәли, $z = F(x, y)$ функсијасы үмуми Коши мәсәләсинин һәлли олур. Дикәр тәрәфдән, $\Delta(s) \neq 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ олдуғундан, l әјриси (23) тәнлијинин характеристик әјриси ола билмәз.

Дөрдүнчү теоремә әсасән, һәр бир интеграл сәтһ характеристик әјриләрлә өртүлдүјүндән l әјрисиндән кечән

вә l_0-ын әтрафында тә'јин олунан һәр бир интеграл сәтһинә,
бу әјридән кечән характеристик әјриләрин һәндәси јери кими
бахмаг олар. Бурадан да үмуми Коши мәсәләсинин һәллинин
јеканәлији алыныр (һәр бир нөгтәдән кечән характеристик
әјри јеканәдир).
Тутаг ки, l әјриси бојунча $\Delta(s)=0$. Бу һалда (23) тәнли-
јинин l әјрисиндән кечән һамар $z=g(x,y)$ интеграл сәтһи
варса, l әјриси бу тәнлик үчүн характеристик әјри олур. Доғ-
рудан да, $\Delta(s)=0$, $s\in(\alpha,\beta)$ шәртиндән алыныр ки,

$$\varphi'(s)=\kappa(s)P(\varphi(s),\psi(s),h(s)),$$
$$\psi'(s)=\kappa(s)Q(\varphi(s),\psi(s),h(s)),\ s\in(\alpha,\beta), \tag{44}$$

бурада $\kappa(s)$ мүтәнасиблик әмсалыдыр.
Шәртә көрә $z=g(x,y)$ сәтһи l әјрисиндән кечдијиндән,

$$h(s)=g(\varphi(s),\psi(s)),\ s\in(\alpha,\beta)$$

олмалыдыр. Бурадан, (44) бәрабәрликләринә әсасән

$$h'(s)=g_x\varphi'(s)+g_y\psi'(s)=\kappa(s)P(\varphi(s),\psi(s),h(s))g_x+$$
$$+\kappa(s)Q(\varphi(s),\psi(s),h(s))g_y$$

бәрабәрлији алыныр. Фәрзијјәмизә әсасән $z=g(x,y)$ функ-
сијасы (23) тәнлијинин һәлли олдуғундан, ахырынчы бәрабәр-
ликдән

$$h'(s)=\kappa(s)R(\varphi(s),\psi(s),h(s)).$$

Бу бәрабәрлијә вә (44) бәрабәрликләринә әсасән алырыг ки,
l әјриси бојунча

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

мүнасибәтләри өдәнир. Бу исә көстәрир ки, l әјриси (23) тән-
лијинин характеристик әјрисидир.
Инди l әјриси үзәриндә һәр һансы $(\varphi(s_0),\psi(s_0),h(s_0))$,
$s_0\in(\alpha,\beta)$ нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдән l_1 әјриси кечирәк.
Тутаг ки,

$$x=\varphi_1(\tau),\ y=\psi_1(\tau),\ z=h_1(\tau),\ \tau\in(\tau_1,\tau_2)$$

һәмин әјринин параметрик шәкилдә тәнлијидир вә

$$\Delta_1(\tau)=P(\varphi_1(\tau),\psi_1(\tau),h_1(\tau))\psi_1'(\tau)-Q(\varphi_1(\tau),\psi_1(\tau),$$
$$h_1(\tau))\varphi_1'(\tau)\neq 0,\ \tau\in(\tau_1,\tau_2).$$

Онда теоремин исбат олунмуш һиссәсинә әсасән, (23) тәнли-
јинин l_1 әјрисиндән кечән јеканә интеграл сәтһи вар. Гурмаға
әсасән, бу интеграл сәтһ илә l характеристик әјрисинин бир
ортаг нөгтәси вар. Она көрә дә l әјриси һәмин сәтһин үзә-
риндә јерләшир. Лакин l характеристик әјрисиндән кечән вә
$\Delta_1(\tau)\neq 0$, $\tau\in(\tau_1,\tau_2)$ шәртини өдәјән сонсуз сајда l_1 әјриләри
гурмаг мүмкүн олдуғундан алырыг ки, l характеристик әјри-
синдән кечән сонсуз сајда интеграл сәтһи вар.

Беләликлә, $\Delta(s)=0$, $s\in(\alpha,\beta)$ олдугда l әјрисиндән кечән вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан $z=g(x,y)$ функсијасынын (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олмасындан алыныр ки, l әјриси бу тәнлијин характеристик әјрисидир. Она көрә дә $\Delta(s)=0$, $s\in(\alpha,\beta)$ вә l характеристик әјри олмадыгда үмуми Коши мәсәләсинин кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан һәлли јохдур. Теорем исбат олунду.

Теоремин исбат едәркән апарылан мүһакимәләр көстәрир ки, үмуми Коши мәсәләсини һәлл етмәк үчүн ашағыдакы әмәлијјатлары апармаг лазымдыр:

1) верилмиш тәнлијин характеристик системинин функсионал асылы олмајан вә диференсиалланан $\psi_1(x,y,z)$, $\psi_2(x,y,z)$ интегралларыны тапмаг;

2) $\psi_1(x,y,z)=c_1$, $\psi_2(x,y,z)=c_2$ бәрабәрликләриндә $x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$, $z=h(s)$ јазараг s параметрини јох едирик. Онда c_1, c_2 сабитләри арасында мүәјјән $\Phi(c_1,c_2)=0$ асылылығы алыныр;

3) бу асылылыгда c_1, c_2 әвәзинә, ујғун олараг, тапылмыш $\psi_1(x,y,z)$, $\psi_2(x,y,z)$ интегралларыны јазырыг. Алынан

$$\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0$$

тәнлијиндән тә'јин олунан $z=F(x,y)$ функсијасы үмуми Коши мәсәләсинин һәлли олур.

Мисал 8. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=2z$ тәнлијинин $l:\{x=s,\ y=s-2,\ z=1-2s,\ -\infty<s<+\infty\}$ әјрисиндән кечән интеграл сәтһини тапмалы.

Бурада $\Delta(s)=2$ олдуғундан, теоремә әсасән, бахылан үмуми Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар. Бу тәнлијин характеристик системини гураг:

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Бурадан

$$\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dz}{2z},\quad \frac{dx+dy+2dz}{x+y+2z}=\frac{dx-dy}{x-y}$$

системини аларыг вә

$$\frac{(x-y)^2}{z}=c_1,\quad \frac{x+y+2z}{x-y}=c_2$$

һәмин системин үмуми интегралыдыр. Онда, истәнилән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан вә ејнилик кими сабит олмајан $\Phi(u_1,u_2)$ функсијасы үчүн $\Phi\left(\frac{(x-y)^2}{z},\ \frac{x+y+2z}{x-y}\right)=0$ бахылан хүсуси төрәмәли тәнлијин гејри-ашкар шәкилдә үмуми һәллидир.

Тә'јин олунмуш интегралларда l әјрисинин тәнлијинин нәзәрә алсаг,

$$\frac{4}{1-2s}=c_1,\quad -s=c_2$$

мүнасибәтләри алыныр. Бурадан s параметрини јох етсәк, c_1, c_2 сабитләри арасында $c_1+2c_1c_2-4=0$ мүнасибәтини аларыг. Демәли, үмуми Коши мәсәләсинин һәлли

$$4z-(x-y)(3x+y+4z)=0$$

мүнасибәти илә тә'јин олунур.

Мисал 9. $(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=z(1+x^2)$ тәнлијинин

$$l:\{x=s,\ y=\sqrt{1+s^2},\ z=e^s,\ -\infty<s<+\infty\}$$

әјрисиндән кечән интеграл сәтһини тапаг. Бу мәсәлә үчүн $\Delta(s)=0$, $-\infty<s<+\infty$ вә l әјриси верилән тәнлијин характеристик әјрисидир. Јә'ни $x=s$, $y=\sqrt{1+s^2}$, $z=e^s$ функсијалары

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{z(1+x^2)}$$

характеристик системинин һәллидир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, $\psi_1(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$, $\psi_2(x,y,z)=ze^{-x}$ функсијалары характеристик системин фундаментал интегралларыдыр. Онда бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}},\ ze^{-x}\right)=0$$

олар. Бурада $\Phi(u_1,u_2)$ ихтијари диференсиалланан функсијадыр.

Ајдындыр ки, $f(1)=1$ шәртини өдәјән истәнилән диференсиалланан $f(u)$ функсијасы үчүн

$$z=e^x f\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

үмуми Коши мәсәләсинин һәллидир. Демәли, бахылан мәсәләнин сонсуз сајда һәлли вар.

§ 4. ЧОХ СӘРБӘСТ ДӘЈИШӘН ҺАЛЫ ҮЧҮН КВАЗИХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) *Үмуми мә'лумат.* Тутаг ки,

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1,x_2,\dots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=R(x_1,x_2,\dots,x_n,z) \qquad (45)$$

тәнлији верилмишдир. Бурада $P_i(x_1,x_2,\dots,x_n,z)$, $R(x_1,x_2,\dots,x_n,z)$, $i=1,2,\dots,n$ $(n>2)$ функсијалары $x_1,x_2,\dots,x_n,z$ дәјишәнләринин $n+1$ өлчүлү фәзасынын мүәјјән G_{n+1} областында кәсилмәздирләр вә һәр бир $(x_1,x_2,\dots,x_n,z)\in G_{n+1}$ нөгтәсиндә $P_i(x_1,x_2,\dots,x_n,z)$, $i=1,2,\dots,n$ әмсалларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир.

Хүсуси һалда, P_i, R, $i=1,2,\dots,n$ функсијалары z дәјишәниндән асылы олмадыгда, (45) тәнлији хәтти тәнлик олур. Демәли, (45) тәнлијини өјрәнмәклә һәм дә хәтти тәнлији өјрәнмиш олуруг.

Ики сәрбәст дәјишән һалында олдуғу кими, параметр дахил етмәклә (45) тәнлијинин характеристик системини

$$\begin{cases}\frac{dx_i}{dt}=P_i(x_1,x_2,\dots,x_n,z),\ i=1,2,\dots,n,\\ \frac{dz}{dt}=R(x_1,x_2,\dots,x_n,z)\end{cases}\qquad (46)$$

шәклиндә јаза биләрик.

Ајдындыр ки, (46) системи автоном системдир. Она көрә, бу системин һәлләри $x_1,x_2,\dots,x_n,z$ дәјишәнләринин фәзасында n параметрли әјриләр аиләси тәшкил едир. Бу әјриләр аиләсинә (45) тәнлијинин характеристик әјриләр аиләси дејилир.

Ики сәрбәст дәјишән һалында олдуғу кими, исбат етмәк олар ки, P_i, R, $i=1,2,\dots,n$ функсијаларынын G_{n+1} областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри варса, (45) тәнлијинин һәр бир $z=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ интеграл сәтһи $n-1$ параметрдән асылы характеристик әјриләр аиләси илә өртүлмүшдүр вә тәрсинә, $n-1$ параметрдән асылы характеристик әјриләр аиләсинин әмәлә кәтирдији һәр бир һамар $z=\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ сәтһи (45) тәнлијинин интеграл сәтһи олур. Һәр һансы характеристик әјринин мүәјјән бир интеграл сәтһ илә ортаг нөгтәси варса, о тамамилә һәмин сәтһ үзәриндә јерләшир.

б) *Квазихәтти тәнлијин хәтти бирчинс тәнликлә әлагәси.* Квазихәтти (45) тәнлијинә ујғун

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1,x_2,\dots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial x_i}+R(x_1,x_2,\dots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0\qquad (47)$$

хәтти бирчинс тәнлијинә бахаг. Бу тәнликләрин һәлләри арасында әлагә ашағыдакы ики теоремлә верилир.

Теорем 6. *Тутаг ки, $u=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n,z)$ функсијасы (47) хәтти бирчинс тәнлијинин G_{n+1} областында һәллидир вә мүәјјән G_n областында тә'јин олунан $\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасы үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнир: а) $\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функсијасынын G_n областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар; б) ихтијари $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in G_n$ үчүн*

$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in G_{n+1}$; *в)* $\varphi_z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *төрәмәси* G_n *областынын һеч бир алт областында ејнилик кими сыфыра чеврилмир; г)* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *функсијасы* G_n *областында сабитдир.*

Онда $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функсијасы* G_n *областында квазихәтти (45) тәнлијинин һәллидир.*

Исбаты. $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ функсијасы (47) тәнлијинин һәлли олдуғундан, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in G_{n+1}$ үчүн

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\,\varphi_{x_i} + R(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\,\varphi_z = 0. \quad (48)$$

г) шәртинә әсасән $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ үчүн

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = c \quad (c = \mathrm{const}).$$

Бурадан x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ дәјишәнинә нәзәрән төрәмә алаг:

$$\varphi_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi) + \varphi_z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\psi_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (49)$$

Онда (48) ејнилијиндә $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ көтүрүб, (49) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг,

$$\varphi_z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\left\{\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\psi_{x_i} - R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\right\} = 0$$

ејнилијини аларыг. Бурадан в) шәртинә әсасән алырыг ки, $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы G_n областында (45) тәнлијини өдәјир. Теорем исбат олунду.

Бу теоремә әсасән (47) тәнлијинин $\varphi_z \neq 0$ шәртини өдәјән һәр бир $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ һәлли үчүн

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c \quad (50)$$

бәрабәрлијинин тә'јин етдији $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы (45) квазихәтти тәнлијинин һәлли олур.

Теорем 7. *Тутаг ки,*

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \quad (51)$$

функсијалары G_{n+1} *областында (47) хәтти бирҹинс тәнлијин фундаментал интеграллар системидир вә* $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функсијасы* G_n *областында квазихәтти (45) тәнлијинин һәллидир, белә ки,* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ *үчүн* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in G_{n+1}$. *Онда (47) хәтти бирҹинс тәнлијинин* G_{n+1} *областынын һеч бир алт областында ејнилик кими сабит олмајан елә* $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ *һәлли вар ки,* G_n *областында*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$$

ејнилији өдәнир.

Исбаты. (51) фундаментал интеграллар системи вә $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ һәллинин көмәји илә G_n областында тә'јин олунан

$$\Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (52)$$

функсијаларыны дүзәлдәк. Бурадан

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \quad (53)$$

Дикәр тәрәфдән G_n областында

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \psi_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi) = 0$$

ејниликләри өдәнир. Ахырынҹы ејнилији $\frac{\partial \psi_i}{\partial z}$-ә вуруб, әввәлки ејниликләрлә тәрәф-тәрәфә топлајаг. Онда (53) бәрабәрликләринә әсасән

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ејниликләрини аларыг. Демәли, (52) функсијалары G_n областында

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

хәтти бирҹинс тәнлијинин интеграллары олур. Бу тәнлијин асылы олмајан интегралларынын сајы $n-1$ олдуғундан, (52) функсијалары G_n областында функсионал асылыдыр. Она көрә дә n өлчүлү фәзада кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан вә һеч бир алт областда ејнилик кими сабит олмајан елә $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функсијасы вар ки, G_n областында

$$F(\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0 \quad (54)$$

ејнилији өдәнир.

Ајдындыр ки, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = F(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z))$ функсијасы G_{n+1} областында (47) хәтти бирҹинс тәнлијинин һәлли олур вә (51) функсијалары (теорем 1) функсионал асылы олмадығындан, бу һәлл G_{n+1} об-

ластынын һеч бир алт областында ејнилик кими сыфыр олмур. Һәм дә (52) вә (54) мүнасибәтләринә әсасән G_n областында

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$$

ејнилијини өдәјир. Теорем исбат олунду.

Демәли, исбат олунан теоремин шәртләри дахилиндә (45) квазихәтти тәнлијинин һәр бир һәллини (47) бирчинс тәнлијинин һәллиндән алмаг олар. Лакин теорем шәртләри өдәнмәдикдә (45) квазихәтти тәнлијинин (47) хәтти бирчинс тәнлијинин һәллиндән алынмајан һәлли дә ола биләр.

Мисал 10. $z = y - x^2$ функсијасы

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \sqrt{z - y + x^2})\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - 2x \qquad (55)$$

тәнлијинин һәллидир, лакин бу һәлли

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \sqrt{z - y + x})\frac{\partial u}{\partial y} + (1 - 2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (56)$$

хәтти бирчинс тәнлијинин һәллиндән алмаг олмаз. Буну көстәрмәк үчүн (56) тәнлијинин

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1 - \sqrt{z - y + x^2}} = \frac{dz}{1 - 2x}$$

характеристик системинин $z \geqslant y - x^2$ шәртини өдәјән (x, y, z) нөгтәләр чохлуғунда асылы олмајан $\psi_1(x, y, z) = 2\sqrt{z - y + x^2} - x$, $\psi_2(x, y, z) = z + x^2 - x$ интегралларыны тапырыг. Бу функсијалар $z > y - x^2$ шәртини өдәјән (x, y, z) нөгтәләр чохлуғунда (56) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир. Бу нөгтәләр чохлуғуну G_3 илә ишарә едәк. Онда G_3 областында (56) тәнлијинин үмуми һәлли

$$u = \Phi(2\sqrt{z - y + x^2} - x, z + x^2 - x) \qquad (57)$$

шәклиндә олар; бурада $\Phi(u_1, u_2)$ ихтијари кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан функсијадыр. 7-чи теоремин исбатында олдуғу кими $\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)$ интеграллары вә $z = y - x^2$ һәлли васитәсилә дүзәлдилмиш

$$\Psi_1(x, y) = -x, \ \Psi_2(x, y) = y - x$$

функсијалары функсионал асылы дејилләр (буна сәбәб $z = y - x^2$ һәлли үчүн $(x, y, y - x^2)$ нөгтәләринин G_3 областынын сәрһәддиндә јерләшмәсидир).

Тутаг ки, һеч бир алт областда ејнилик кими сабит олмајан елә $\Phi_1(u_1, u_2)$ функсијасы вар ки,

$$\Phi_1(2\sqrt{z - y + x^2} - x, z + x^2 - x) = 0$$

бәрабәрлијиндән $z = y - x^2$ һәллини алмаг олар. Бурада $z = y - x^2$ јазсаг, $\Phi_1(-x, y - x) = 0$ олар. Бу исә $\Psi_1 = -x$, $\Psi_2 = y - x$ функсијаларынын функсионал асылы олмамасына зиддир. Демәли, (55) тәнлијинин $z = y - x^2$ һәлли, (56) тәнлијинин (57) үмуми һәллиндән алынмыр.

в) *Коши мәсәләси.* Тутаг ки,

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z) \qquad (58)$$

шәклиндә квазихәтти тәнлик верилмишдир; бурада $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$, $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары $t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z$ дәјишәнләринин G_{m+2} областында кәсилмәздир.

Ајдындыр ки, $z = x_{m+1}$, $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = f_{m+1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ гәбул едиб, (58) тәнлијинә ујғун хәтти бирчинс тәнлији

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m+1} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (59)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Мә'лумдур ки, (58) тәнлијинин

$$\Psi(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

шәртини өдәјән $z = \Psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә Коши мәсәләси дејилир, бурада t_0 верилмиш әдәд, $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ исә верилмиш функсијадыр. Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 8. *Тутаг ки, 1) $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$ функсијалары $G_{m+2} = \{|t - t_0| < a; -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \ldots, m+1\}$ областында кәсилмәздир, кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ хүсуси төрәмәләри вар вә $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant A$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ $(A = const > 0)$ шәрти өдәнир; 2) $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функсијасынын $G_m = \{-\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \ldots, m\}$ областында кәсилмәз $g_{x_i}(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ төрәмәләри вар вә $|g_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m)| \leqslant c$. Онда (58) тәнлијинин $\Psi(t_0, x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ башланғыч шәртини өдәјән вә $G_{m+1} = \{|t - t_0| < h; -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \ldots, m\}$ областында тә'јин олунан јеканә $z = \Psi(t, x_1, \ldots, x_m)$ һәлли вар; бурада $h = \min\{a, \alpha\}$, $\alpha = \frac{1}{(m+1)A}\ln\left(1 + \frac{m+1}{m(c+1)}\right)$.*

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә һәр бир $\tau \in (t_0 - a, t_0 + a)$ вә истәнилән $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}$ үчүн

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}),\ i = 1,2,\ldots,m+1 \quad (60)$$

системинин $x_i(\tau) = \xi_i$, $i=1,2,\ldots,m+1$ шәртләрини өдәјән јеганә
$$x_i = \varphi_i(t,\tau,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m+1}),\ i=1,2,\ldots,m+1 \quad (61)$$
һәлли вар. Һәллин башланғыч шәртләрдән асылылығы теоремләринә әсасән, бу һәлл, $G_{m+2} = \{|t-t_0|<a, |\tau-t_0|<a; -\infty<\xi_i<+\infty, i=1,2,\ldots,m+1\}$ областында өз аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир, кәсилмәз $\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial\tau}, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}$, $i,j=1,2,\ldots,m+1$ төрәмәләри вә гарышыг $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\partial\tau}, \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\partial\xi_j}$, $i,j=1,2,\ldots,m+1$ төрәмәләри вар.

Гејд олунмуш $\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}$ үчүн
$\varphi_{ij}(t) = \frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi_1,\ldots,\xi_{m+1})}{\partial\xi_j}$ вә $f_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(t,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m+1})}{\partial x_j}$, ишарә едәк. Онда $\varphi_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\ldots,m+1$ функсијалары
$$\dot\Phi_{ij} = \sum_{s=1}^{m+1} f_{is}(t)\Phi_{sj} \quad (62)$$
тәнликләр системинин
$\Phi_{ij}(\tau)=\delta_{ij}$, $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$, $i\ne j$, $i,j=1,2,\ldots,m+1$
башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли олар. Бурадан еквивалент интеграл тәнликләрә кечәк:
$$\varphi_{ij}(t) = \delta_{ij} + \sum_{s=1}^{m+1}\int_\tau^t f_{is}(s)\varphi_{sj}(s)ds,\ i,j=1,2,\ldots,m+1. \quad (63)$$
Шәртә көрә $|f_{ij}(t)|<A$ олдуғундан, ахырынчы мүнасибәтдән
$$\sum_{i=1}^{m+1}|\varphi_{ij}(t)| \le 1 + (m+1)A\left|\int_\tau^t \sum_{i=1}^{m+1}|\varphi_{ij}(s)|ds\right|,\ j=1,2,\ldots,m+1$$
бәрабәрсизлији алынар. Бу бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк,
$$\sum_{i=1}^{m+1}|\varphi_{ij}(t)| \le \exp[(m+1)A|t-\tau|],\ j=1,2,\ldots,m+1. \quad (64)$$
Бу бәрабәрсизликләрә әсасән, (63) бәрабәрсизликләриндән
$$|\varphi_{ij}(t)-\delta_{ij}| \le A\left|\int_\tau^t\sum_{s=1}^{m+1}|\varphi_{sj}(s)|ds\right| \le \frac{1}{m+1}\left\{\exp\left[(m+1)A|t-\tau|\right]-1\right\},$$
$$i,j=1,2,\ldots,m+2$$
бәрабәрсизликләрини аларыг.

Тутаг ки, $|t-\tau|<h$. Онда h әдәдинин тә'јининә әсасән $|\varphi_{ij}(t)-\delta_{ij}|<\frac{1}{m(c+1)}$, $|t-\tau|<h$, $i,j=1,2,\ldots,m+1$. Бурадан алыныр ки, $|t-\tau|<h$ олдугда
$$\varphi_{ii}(t) > 1-\frac{1}{m(c+1)},\ i=1,2,\ldots,n,$$
$$|\varphi_{ij}(t)| < \frac{1}{m(c+1)},\ i\ne j \quad (65)$$
бәрабәрсизликләри өдәнир.

Икинчи параграфда олдуғу кими,
$$\psi_i(t,x_1,\ldots,x_m,z) = \varphi_i(t_0,t,x_1,\ldots,x_m,z),\ i=1,2,\ldots$$
$$\psi(t,x_1,\ldots,x_m,z) = \varphi_{m+1}(t_0,t,x_1,\ldots,x_m,z)$$
ишарә едәк. Онда
$$\psi_i(t_0,x_1,x_2,\ldots,x_m,z)=x_i,\ i=1,2,\ldots,m,$$
$$\psi(t_0,x_1,x_2,\ldots,x_m,z)=z \quad (66)$$
шәртләри өдәнәр вә $\psi_1(t,x_1,\ldots,x_m,z),\ldots,\psi_m(t,x_1,\ldots,x_m,z)$, $\psi(t,x_1,\ldots,x_m,z)$ функсијалары $G'_{m+2} = \{|t-t_0|<h, -\infty<x_i<+\infty, i=1,2,\ldots,m, -\infty<z<+\infty\}$ областында (59) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едәр.

Ајдындыр ки, $F(t,x_1,\ldots,x_m,z)\equiv\psi(t,x_1,\ldots,x_m,z) - g(\psi_1(t,x_1,\ldots,x_m,z),\ldots,\psi_m(t,x_1,\ldots,x_m,z))$ функсијасы G'_{m+2} областында (59) тәнлијинин һәллидир. Бурада (65) шәртләрини вә $|g_{x_i}(x_1,x_2,\ldots,x_m)|\le c$, $i=1,2,\ldots,m$ шәртини нәзәрә алсаг, G'_{m+2} областында
$$F_z(t,x_1,x_2,\ldots,x_m,z) = \psi_z - \sum_{i=1}^m g_{x_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial z} \ge \psi_z -$$
$$-\sum_{i=1}^m|g_{x_i}|\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\right| > 1-\frac{1}{m(c+1)} - cm\frac{1}{m(c+1)} = \frac{m-1}{m(c+1)}$$
бәрабәрсизлијинин өдәндијини аларыг. Онда гејри-ашкар функсијанын варлығы һаггында теоремә әсасән
$$\psi(t,x_1,x_2,\ldots,x_m,z) - g(\psi_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_m,z),\ldots,\psi_m(t,x_1,x_2,\ldots,x_m,z)) = 0 \quad (67)$$
тәнлији, G_{m+1} областында тә'јин олунан јеганә
$$z=\Psi(t,x_1,x_2,\ldots,x_m) \quad (68)$$
функсијасы тә'јин едир вә бу функсија (58) тәнлијинин һәлли олур. Диҝәр тәрәфдән, (67) бәрабәрлијиндә $t=t_0$ көтүрсәк (66) шәртләринә әсасән

$$z - g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

олдуғуну аларыг, јә'ни (68) функсијасы

$$\Psi(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

шәртини өдәјир.

Беләликлә, (68) функсијасы гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли олур. Көстәрәк ки, бу һәлл јеканәдир. 1-чи теорема әсасән (59) тәнлијинин G_{m+2} областында үмуми һәлли $u = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_m, \psi)$ олдуғундан, (58) тәнлијинин үмуми һәлли ғејри-ашкар функсија кими

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_m, \psi) = 0$$

бәрабәрлијиндән тә'јин олунур. 7-чи теорема әсасән исә Коши мәсәләсинин һәлли, бурадан $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1})$ функсија-сыны сечмәклә алыныр. Тутаг ки, Коши мәсәләсинин һәлли $\Phi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \varphi_m, \psi) = 0$ бәрабәрлијиндән тә'јин олунур. Онда $t = t_0$ олдугда

$$\Phi_1(x_1, x_2, \ldots x_m, z) = z - g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

олмалыдыр. Бурадан ајдындыр ки, $\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1})$ функсијасы биргијмәтли тә'јин олунур вә демәли, Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.

Мисал 11. $\frac{\partial z}{\partial t} + (x + e^t)\frac{\partial z}{\partial x} = 2tz$ тәнлијинин $\Psi(0, x) = g(x)$ шәртини өдәјән $z = \Psi(t, x)$ һәллини тапаг. Бунун үчүн әввәлчә

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^t, \\ \dot{z} = 2tz \end{cases}$$

характеристик системинин $x(\tau) = \xi$, $z(\tau) = \eta$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини тапаг: $x = \varphi_1(t, \tau, \xi, \eta) = e^t(t - \tau) + \xi e^{t-\tau}$, $z = \varphi_2(t, \tau, \xi, \eta) = \eta e^{t^2-\tau^2}$.

Теоремин исбатында олдуғу кими

$$\psi_1(t, x, z) = \varphi_1(0, t, x, z) = xe^{-t} - t,$$

$$\psi_2(t, x, z) = \varphi_2(0, t, x, z) = ze^{-t^2}$$

ишарә едәк вә

$$\psi(t, x, z) - g(\psi_1(t, x, z)) = ze^{-t^2} - g(xe^{-t} - t)$$

функсијасыны дүзәлдәк. Онда

$$ze^{-t^2} - g(xe^{-t} - t) = 0$$

бәрабәрлијиндән тапылан

$$z = e^{t^2} g(xe^{-t} - t)$$

функсијасы гојулмуш Коши мәсәләсинин јеканә һәлли олур.

Теоремин шәртләри өдәнмәдикдә Коши мәсәләсинин һәлли јеканә олмаја да биләр. Буна (55) тәнлијинин $\Psi(0, y) = y$ шәртини өдәјән $z = \Psi(x, y)$ һәллинин тапылмасы мәсәләси мисал ола биләр. Ајдындыр ки, $z = y - x^2$ функсијасы бу шәрти өдәјән һәллдир. Лакин бу мәсәләнин (57) үмуми һәллиндән алынан башга һәлли дә вар. Һәмин һәлли тапмаг үчүн (55) тәнлијинин $\psi_1(x, y, z) = 2\sqrt{z - y + x^2} - x$, $\psi_2(x, y, z) = z + x^2 - x$ интегралларынын көмәјилә $x_0 = 0$ олдугда (66) шәртини өдәјән интегралларыны тапаг. Бунун үчүн

$$\begin{cases} \psi_1(0, y, z) = 2\sqrt{z - y} = \gamma_1, \\ \psi_2(0, y, z) = z = \gamma_2 \end{cases}$$

системини y, z-ә нәзәрән һәлл едәк: $y = \gamma_2 - \frac{\gamma_1^2}{4}$, $z = \gamma_2$. Онда $\bar{\psi}_1(x, y, z) = y - x - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{z - y + x^2}$, $\psi_2(x, y, z) = z + x^2 - x$ интеграллары (66) шәртини өдәјәр вә теорема әсасән Коши мәсәләсинин һәлли

$$z + x^2 - x - \left[y - x - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{z - y + x^2}\right] = 0$$

тәнлијиндән тә'јин олунмалыдыр. Бу тәнлији $\left(\sqrt{z - y + x^2} - \frac{x}{2}\right)^2 = 0$ шәклиндә јазараг z-ә нәзәрән һәлл етсәк, алынан $z = y - \frac{3}{4}x^2$ функсијасы да бахылан тәнлијин $x = 0$ олдугда $z = y$ шәртини өдәјән һәлли олар.

§ 5. ПФАФФ ТӘНЛИЈИ

Тутаг ки, x, y, z дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән областында тә'јин олунмуш $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функсијалары верилмишдир вә областын һәр бир нөгтәсиндә бу функсијалардан heч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Һәр бир $(x, y, z) \in G$ нөгтәсинә $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ векторуну гаршы гојаг. Белә векторлар чохлуғу G областында векторлар саһәси әмәлә кәтирир.

G областында јерләшән вә ихтијари нөгтәсиндә тохунанынын истигамәти саһәнин һәмин нөгтәдәки истигамәти илә ејни олан хәтләрә саһәнин *вектор хәтләри* дејилир.

Бир чох физики мәсәләләрин һәлли саһәнин вектор хәтләринә ортогонал олан сәтһләр аилләсинин тапылмасына кәтирилир. Ихтијари һамар сәтһин (x, y, z) нөгтәсиндә чәкилән тохунаны (dx, dy, dz) вектору илә мүәјјән олундуғундан, векторлар саһәсинә ортогонал олан сәтһләр үчүн

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \qquad (69)$$

мүнасибәти өдәнмәлидир.

Беләликлә, саһәнин вектор хәтләринә ортогонал олан сәтһләр аиләсинин тапылмасы мәсәләси (69) тәнлијинин интеграл сәтһләринин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Бу тәнлијә *Пфафф тәнлији* дејилир. Пфафф тәнлијинин интеграл сәтһләринин варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 9. *Тутаг ки, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функсијаларынын G областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар вә областын һәр бир нөгтәсиндә һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Онда (69) тәнлијинин интеграл сәтһинин варлығы үчүн G областында*

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0 \qquad (70)$$

ејнилијинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Бу ејнилик өдәндикдә һәр бир $(x_0, y_0, z_0) \in G$ нөгтәсиндән (69) тәнлијинин јеканә интеграл сәтһи кечир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, (69) тәнлијинин $(x_0, y_0, z_0) \in G$ нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһи вар. Үмумилији позмадан $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ гәбул едиб, (x_0, y_0, z_0) нөгтәсинин мүәјјән U әтрафында (69) тәнлијини

$$dz = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy \qquad (71)$$

шәклиндә јазаг; бурада

$$A(x, y, z) = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)}, \quad B(x, y, z) = -\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)}. \qquad (72)$$

Гејд едәк ки, $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ гәбул етдијимиздән, (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһ, (x_0, y_0) нөгтәсинин јахын әтрафында $z = z(x, y)$ шәклиндә верилә биләр. Дикәр тәрәфдән, ики дәјишәнли функсијанын там диференсиалы

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

дүстуру илә верилдијиндән вә dx, dy диференсиаллары асылы олмадығындан, бу сәтһ үчүн

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \end{cases} \qquad (73)$$

ејниликләри өдәнир.

Гејд едәк ки, (73) мүнасибәтләринин һәр биринә z-ә нәзәрән хүсуси төрәмәли тәнлик, икисинә бирликдә исә тәнликләр системи кими бахмаг олар. Әкәр (73) тәнликләринин һәр бирини өдәјән $z = \psi(x, y)$ сәтһи варса, бу системә *ујушан систем*, сәтһә исә онун *интеграл сәтһи* дејилир.

Демәли, (69) тәнлијинин һәр бир $z = z(x, y)$ интеграл сәтһи һәм дә (73) системинин интеграл сәтһидир.

Теоремин шәртинә көрә U әтрафында $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ функсијаларынын кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә дә, (73) ејнилијиндән x, y-ә нәзәрән төрәмә алсаг,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = A_y(x, y, z) + A_z(x, y, z)B(x, y, z), \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B_x(x, y, z) + B_z(x, y, z)A(x, y, z) \end{cases}$$

ејниликләрини аларыг. Бурадан ајдындыр ки, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ гарышыг төрәмәләри U-да кәсилмәздир. Онда Шварс теореминә әсасән аларыг ки,

$$A_y + A_z B = B_x + B_z A \qquad (74)$$

шәрти өдәнир. Бурада (72) ифадәләрини нәзәрә алсаг, (70) шәртинин өдәндијини аларыг.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, (70) шәрти өдәнир вә верилмиш $(x_0, y_0, z_0) \in G$ нөгтәсиндә $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Көстәрәк ки, бу заман (69) тәнлијинин (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндән кечән јеканә $z = z(x, y)$ интеграл сәтһи вар.

Зәрурилијин исбатындакы мүһакимәләрдән ајдындыр ки, (73) системинин (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһи һәм дә (69) тәнлијинин интеграл сәтһидир. Она көрә дә (73) системинин ујушан олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир.

Бунун үчүн (73) системинин биринчи тәнлијиндә y-и параметр һесаб едәрәк

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z) \qquad (75)$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$z(x_0) = h(y) \qquad (76)$$

шәртини өдәјән һәллинә бахаг; бурада $h(y)$ һәләлик намә'лум һамар функсијадыр. Теоремин шәртләри дахилиндә (75), (76) мәсәләсинин (x_0, y_0) нөгтәсинин јахын әтрафында јеканә

$$z = \varphi(x, y, x_0, h(y)) \qquad (77)$$

һәлли вар.

Һәллин параметрләрә нәзәрән дифференсиалланмасы һаггында теоремә әсасән (VI фәсил, § 3), $z = \varphi(x, y, x_0, u)$ функсијасынын бүтүн аргументләрә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга $\varphi(x, y, x_0, u)$ функсијасынын y параметринә нәзәрән $\varphi_y(x, y, x_0, h(y))$ төрәмәси

$$\frac{d}{dx}(\varphi_y) = A_z(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y))\varphi_y + A_y(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y))) \quad (78)$$

варнасиjаларла тәнлиjинин

$$\varphi_y|_{x=x_0} = 0 \quad (79)$$

шәртини өдәjән һәлли, u аргументинә нәзәрән $\varphi_u(x, y, x_0, h(y))$ төрәмәси исә

$$\frac{d}{dx}(\varphi_u) = A_z(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y))) \varphi_u \quad (80)$$

варнасиjаларла тәнлиjинин

$$\varphi_u|_{x=x_0} = 1 \quad (81)$$

шәртини өдәjән һәллидир (VI фәсил, § 3).

Теоремин шәртләринә әсасән, (78), (79) вә (80), (81) хәтти мәсәләләринин јеканә һәлләри вар. Бурадан алыныр ки, кәсилмәз $\varphi_{yx}(x, y, x_0, h(y))$, $\varphi_{ux}(x, y, x_0, h(y))$ төрәмәләри вар вә $\varphi_u(x, y, x_0, h(y)) \neq 0$.

Дикәр тәрәфдән, (76) шәртиндән ајдындыр ки,

$$\varphi(x_0, y, x_0, h(y)) = h(y). \quad (82)$$

Бурадан y-ә нәзәрән төрәмә алсаг,

$$\varphi_y(x_0, y, x_0, h(y)) + \varphi_u(x_0, y, x_0, h(y))\, h'(y) = h'(y) \quad (83)$$

олар. Инди $h(y)$ функсиjасыны елә сечәк ки, (77) функсиjасы (73) тәнликләриндән икинчисини дә өдәсин. Бунун үчүн (77) функсиjасыны (73) системинин икинчи тәнлиjиндә јазаг. Онда $h(y)$-ә нәзәрән

$$\varphi_y(x, y, x_0, h(y)) + \varphi_u(x, y, x_0, h(y))h'(y) = B(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y)),$$

тәнлиjи алынар вә $\varphi_u(x, y, x_0, h(y)) \neq 0$ олдуғундан, ону

$$h'(y) = \frac{B(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y))) - \varphi_y(x, y, x_0, h(y))}{\varphi_u(x, y, x_0, h(y))} \quad (84)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу тәнлиjин сол тәрәфи анҹаг y-дән асылы олдуғундан, сағ тәрәфи дә анҹаг y-дән асылы олмалыдыр. Әкс һалда (84) тәнлиjиндән $h(y)$ функсиjасыны тә'јин етмәк олмаз.

Көстәрәк ки, (70) шәрти өдәндикдә (84) тәнлиjинин сағ тәрәфиндәки

$$H(x, y) = \frac{B(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y))) - \varphi_y(x, y, x_0, h(y))}{\varphi_u(x, y, x_0, h(y))}$$

функсиjасы x-дән асылы деjил. Ајдындыр ки, бу функсиjанын x-ә нәзәрән төрәмәси вар вә

$$H_x = \frac{1}{\varphi_u^2}[(B_x + B_z\varphi_x - \varphi_{yx})\varphi_u - (B - \varphi_y)\varphi_{ux}].$$

Бурада φ, φ_y вә φ_u функсиjаларынын үјғун олараг (75), (78) вә (80) тәнликләринин һәлләри олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$H_x = \frac{1}{\varphi_u}[B_x + B_z A - A_y - A_z B]$$

олар. Одур ки, (74) шәртинә әсасән $H_x \equiv 0$. Демәли, (84) тәнлиjинин сағ тәрәфи x-дән асылы деjил. Она көрә дә (84) тәнлиjинин сағ тәрәфиндә x әвәзинә x_0 көтүрә биләрик. Онда (79), (81), (82) шәртләринә әсасән

$$\varphi_y(x_0, y, \varphi(x_0, y, h(y))) = 0, \quad \varphi_u(x_0, y, \varphi(x_0, y, h(y))) = 1,$$
$$B(x_0, y, \varphi(x_0, y, h(y))) = B(x_0, y, h(y))$$

олдуғундан, (84) тәнлиjи

$$h' = B(x_0, y, h) \quad (85)$$

шәклинә дүшәр. Бу тәнлиjин $h(y_0) = z_0$ шәртини өдәјән јеканә $h = \psi(y, y_0, z_0)$ һәлли вар. Ону (77) дүстурунда јазсаг, алынан

$$z = \varphi(x, y, x_0, \psi(y, y_0, z_0))$$

сәтһи (69) тәнлиjинин (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһи олур. Интеграл сәтһинин јеканәлиjи онун гурулма гајдасындан ајдындыр. Теорем исбат олунду.

Теорем көстәрир ки, (70) шәрти өдәнмәдикдә (69) тәнлиjинин интеграл сәтһләри јохдур. Јухарыда бахылан физики мәсәлә илә әлагәдар олараг бу о демәкдир ки, (70) шәрти өдәнмәдикдә, саһәнин векторлар хәттинә ортогонал олан һамар сәтһләр јохдур. Лакин бу заман саһәнин векторлар хәттинә ортогонал олан әјриләр ола биләр. Бу хәтләрә Пфафф тәнлиjинин *интеграл әјриләри* деjилир.

Пфафф тәнлиjинин интеграл әјриләрини ашағыдакы гајда илә тапмаг олар. Ејнилик кими сабит олмајан вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан $\Phi(x, y, z)$ функсиjасы көтүрүб

$$\Phi(x, y, z) = 0 \quad (86)$$

мүнасибәтини јазаг. Ајдындыр ки, (86) тәнлиjи бир һамар сәтһ тә'јин едир. Бу сәтһ үзәриндә (x_0, y_0, z_0) нөгтәси көтүрүб, нөгтәнин јахын әтрафында (86) мүнасибәтиндән x, y, z дәјишәнләриндән бирини о бириләри васитәсилә ифадә етмәк олар. Хүсуси һалда, сәтһин тәнлиjи

$$z = \varphi(x, y) \quad (87)$$

шәклиндә олан һала бахаг. (87) әвәзләмәсини Пфафф тәнлиjиндә нәзәрә алсаг,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (88)$$

тәнлиjи алынар; бурада

$$M(x, y) = P(x, y, \varphi(x, y)) + R(x, y, \varphi(x, y))\varphi_x(x, y),$$

$$N(x,y)=Q(x,y,\varphi(x,y))+R(x,y,\varphi(x,y))\varphi_y'(x,y).$$

Тутаг ки, $y=\omega(x,c)$ аиләси (88) тәнлијинин үмуми һәллидир. Онда

$$y=\omega(x,c),$$
$$z=\varphi(x,\omega(x,c))$$

әјриләр аиләси Пфафф тәнлијинин интеграл әјриләри олур.

Мисал 12. $(y+3z^2)dx+(x+y)dy+6xzdz=0$ тәнлијиндә (70) шәрти өдәндијиндән, бу тәнлијин интеграл сәтһини тапмаг үчүн

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y+3z^2}{6xz},\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x+y}{6xz}\end{cases}$$

системинин интеграл сәтһини тапаг.

Системин биринчи тәнлијиндә y-ә параметр кими бахсаг, алынан

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{y+3z^2}{6xz}$$

тәнлијинин үмуми һәлли

$$xy+3xz^2=h(y)$$

олар. Бурада $h(y)$ функсијасыны елә сечәк ки, системин икинчи тәнлији дә өдәнсин. Онда $h'(y)=-y$ тәнлији алыныр вә онун һәлли $h(y)=-\frac{y^2}{2}+c$ олур. Демәли, бахылан тәнлијин интеграл сәтһләри $y^2+2xy+6x^2z=c$ олар.

Мисал 13. $ydx+(z-y)dy+xdz=0$ тәнлијини өдәјән вә $2x-y-z=1$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән әјриләри тапаг.

Асанлыгла јохламаг олар ки, бахылан тәнлик үчүн (70) шәрти өдәнмир. Одур ки, тәнлијин анчаг интеграл әјриләри вар вә бу әјриләри тапмаг үчүн x, y, z дәјишәнләри арасында бир мүнасибәт верилмәлидир. Бу мүнасибәт, интеграл әјриләринин $2x-y-z=1$ мүстәвиси үзәриндә јерләшмәси шәртидир. Бурадан алынан $z=2x-y-1$ ифадәсини тәнликдә јазсаг

$$(2x+y)dx+(x-2y-1)dy=0$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнлик исә $x=\xi+\frac{1}{5}$, $y=\eta-\frac{2}{5}$ əвəзләмәси илә

$$(2\xi+\eta)d\xi+(\xi-2\eta)d\eta=0$$

бирчинс тәнлијинә кәтирилир вә онун үмуми һәлли $\xi^2+\xi\eta-\eta^2=c$ шәклиндәдир. Бурадан да алыныр ки, бахылан тәнлијин $2x-y-z=1$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән интеграл әјриләри $x^2+xy-y-y^2=c$ $(c>0)$ аиләси олур.

Чалышмалар

1. Верилмиш функсијанын верилмиш тәнлији өдәдијини көстәрин:

а) $z=at+bx+cy$, $\quad t\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z;$

б) $z=\varphi(x\cdot y)$, $\quad x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0;$

в) $z=xy\,\varphi(x+y)$, $\quad xy\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z;$

бурада $\varphi(u)$ кәсилмәз төрәмәси олан ихтијари функсијадыр.

2. Ашағыдакы тәнликләрин үмуми һәлләрини тапын:

а) $\frac{\partial z}{\partial t}+x\sin t\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\quad$ *Чаваб:* $z=\Phi\left(xe^{\cos t}, ye^{-t}\right);$

б) $\frac{\partial z}{\partial t}+(x+t)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\quad$ *Чаваб:* $z=\Phi\left((1+t+x)e^{-t}-1,\ ye^{-t}\right);$

в) $(ax^2+bxy)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(a_1x^2+2axy+\frac{3}{2}by^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\quad$ *Чаваб:* $z=\Phi\left(b\frac{y^3}{x^3}+\frac{2y}{x^2}+\frac{2a_1}{x}\right);$

г) $(t^2+tx)\frac{\partial z}{\partial t}+x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\quad$ *Чаваб:* $z=\Phi\left(xy, \ln x+\frac{x}{t}\right);$

д) $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-y)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$, $\quad$ *Чаваб:* $\Phi(x+y-z, 2xy-z^2)=0;$

е) $t\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$, $\quad$ *Чаваб:* $z=t^2\Phi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right).$

3. Верилмиш тәнликләрин көстәрилән башланғыч шәртини өдәјән һәлләрини тапын:

а) $(x^2+2xy)\frac{\partial z}{\partial x}-(x^2-2xy-3y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $z|_{x=1}=g(y)$,

Чаваб: $z=g\left(0{,}5\sqrt{5+4\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x^2}-\frac{4}{x}}-0{,}5\right);$

б) $\frac{\partial z}{\partial t}+(t+y)\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $z|_{t=0}=x+y$,

Чаваб: $z=(1+t+x+y)e^{-t}-1;$

в) $\frac{\partial z}{\partial t}+\left(x+\frac{y}{t}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{x}{t}+y\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ z|_{t=1}=g(x, y)$.

Чаваб. $z=g\left(\frac{x+y+t^2(x-y)}{2t}e^{t-1},\right.$
$\left.\frac{x+y-t^2(x-y)}{2t}e^{1-t}\right)$;

г) $\frac{\partial z}{\partial t}+(x-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ z|_{t=0}=x+y$,

Чаваб: $z=(x+y)e^{-t}$;

д) $\frac{\partial z}{\partial t}+2t\frac{\partial z}{\partial x}=z,\ z|_{t=0}=g(x)$. *Чаваб:* $z=e^t g(x-t^2)$;

е) $\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial z}{\partial x}=x,\ z|_{t=0}=g(x)$. *Чаваб:* $z\cos t-x\sin t-$
$-g(x\cos t+z\sin t)=0$.

4. Верилмиш тәнликләрин көстәрилән әјриләрдән кечән интеграл сәтһләрини тапмалы:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2,\ x=-s,\ y=2s+1,\ z=\operatorname{tg}s,\ -\frac{\pi}{2}<s<\frac{\pi}{2}$,

Чаваб: $z=\operatorname{tg}(3x+2y-2)$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z,\ x=s,\ y=e^s,\ z=e^{-s},\ -\infty<s<+\infty$,

Чаваб: $z=e^{-x}f(ye^{-x})$; бурада $f(u)$ функсијасы диференсиалланан вә $f(1)=1$ шәртини өдәјән ихтијари функсијадыр.

в) $(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2,\ x=s,\ y=-s,\ z=-s^3$,
$-\infty<s<+\infty$, *Чаваб:* $z=\frac{x+y+2x^2y}{x^2+xy+2}$;

г) $z\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=z^2+(x+y)^2,\ x=s,\ y=s-1,\ z=s+1$,
$-\infty<s<+\infty$. *Чаваб:* $z=\left\{e^{x-y-1}\left[\frac{5}{4}(x+y+\right.\right.$
$\left.\left.+1)^2-x-y+1\right]-(x+y)^2\right\}^{1/2}$

д) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2,\ x=s,\ y=s+1,\ z=\operatorname{tg}s,\ -\frac{\pi}{2}<s<\frac{\pi}{2}$;

Чаваб: $z=\operatorname{tg}(x+f(x-y+1))$; бурада $f(u)$ функсијасы диференсиалланан вә $f(0)=0$ шәртини өдәјән ихтијари функсијадыр.

5. $(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=0$ Пфафф тәнлијинин интеграл сәтһләр аиләсини тапмалы.

Чаваб: $xy+xz+yz=c$.

6. $dx-zdy+xdz=0$ Пфафф тәнлијинин $x=y^2z$ сәтһи үзәриндә јерләшән интеграл әјриләр аиләсини тапмалы.

Чаваб: $y^2ze^{z+\frac{1}{y}}=c$.

XI ФӘСИЛ

МЕЈЛ ЕДӘН АРГУМЕНТЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Әввәлки фәсилләрдә верилмиш садә мисаллар көстәрир ки бир чох физики мәсәләләрин һәлли ади диференсиал тәнликләрә кәтирилир. Белә мәсәләләрдә просесин дәјишмә сүр'əти системин анчаг бахылан андакы вәзијјәтиндән асылы олур. Она көрә алынан диференсиал тәнликләрә ахтарылан функсија вә онун төрәмәләри аргументин ејни гијмәтләриндә дахил олур. Лакин бә'зи физики системләрин даһа дәриндән өјрәнилмәси көстәрир ки, просесин дәјишмә сүр'əти системин тәкчә һәмин андакы вәзијјәтиндән дејил, һәм дә онун кечмиш вә һәтта кәләчәк вәзијјәтләриндән дә асылы ола биләр. Бу чүр просесләри тәсвир едән диференсиал тәнликләрә ахтарылан функсијанын өзү вә төрәмәләри аргументин мүхтәлиф гијмәтләриндә дахил олур. Белә тәнликләрә мејл едән аргументли диференсиал тәнликләр дејилир.

Сон заманлар автоматик идарәетмә нәзәријјәсинә, ракет техникасына, биофизикаја вә с. саһәләрә кениш тәтбигләри илә әлагәдар олараг мејл едән аргументли диференсиал тәнликләрин өјрәнилмәсинә даһа чох диггәт верилир.

Бу фәсилдә мејл едән аргументли диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин үмуми анлајышлары верилир вә белә тәнликләрин бә'зи һәлл үсуллары өјрәнилир.

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР

а) *Мејл едән аргументли тәнликләр.* Ахтарылан функсијанын өзү вә төрәмәләри аргументин мүхтәлиф гијмәтләриндә дахил олан

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m_0)}(t), x(h_1(t)), \dot{x}(h_1(t)), \ldots, x^{(m_1)}(h_1(t)), \ldots, \tag{1}$$
$$x(h_n(t)), \dot{x}(h_n(t)), \ldots, x^{(m_n)}(h_n(t)))=0$$

тәнлијинә *мејл едән аргументли диференсиал тәнлик* дејилир; бурада t сәрбәст дәјишән, $x(t)$ ахтарылан функсија, $h_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ верилмиш функсијалар, $x^{(j)}(h_i(t))$ исә $x(t)$ функсијасынын j-чу тәртиб төрәмәсинин $z=h_i(t)$ нөгтәсиндәки гијмәтидир.

Чох заман $h_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары $h_i(t)=t-\tau_i(t)$ шәклиндә көтүрүлүр. Бу һалда (1) тәнлији

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m_0)}(t), x(t-\tau_1(t)), \dot{x}(t-\tau_1(t)), \ldots, \quad (2)$$

$$x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_n(t)), \dot{x}(t-\tau_n(t)), \ldots,$$

$$x^{(m_n)}(t-\tau_n(t))) = 0$$

шәклинә дүшүр. Бурада $\tau_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијаларына *аргументин мејли*, $\tau_i(t)\geqslant 0$ олдугда исә *аргументин кечикмәси дејилир*. Хүсуси һалда, $\tau_i(t)$ сабит олдугда (2) тәнлијинә бә'зән *диференсиал-фәрг тәнлик дејилир*.

Бу фәсилдә $\tau_i(t)\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, n$ олдуғу фәрз олунур вә

$$x^{(m_0)}(t)=f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m_0-1)}(t), x(t-\tau_1(t)),$$

$$\dot{x}(t-\tau_1(t)), \ldots, x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_n(t)), \quad (3)$$

$$x(t-\tau_n(t)), \ldots, x^{(m_n)}(t-\tau_n(t)))$$

шәклиндә тәнликләр өјрәнилир.

б) *Башланғыч мәсәләнин гојулушу.* Тутаг ки, бир сабит кечикмәси олан

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau)), \ \tau>0 \quad (4)$$

мејл едән аргументли диференсиал тәнлији верилмишдир; бурада $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы t, x_1, x_2 дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G областында тә'јин олунмуш функсијадыр.

Мүәјјән (t_0, T) интервалында диференсиалланан $\varphi(t)$ функсијасы үчүн

1) $(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau))\in G$, $\quad t\in(t_0, T)$

2) $\dot{\varphi}(t)=f(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau))$, $\quad t\in(t_0, T)$

шәртләри өдәнәрсә, $x=\varphi(t)$ функсијасына (4) тәнлијинин һәмин интервалда *һәлли* дејилир.

Ајдындыр ки, t аргументи (t_0, T) $(t_0+\tau<T)$ интервалында дәјишдикдә, $t-\tau$ аргументи $(t_0-\tau, T-\tau)$ интервалында дәјишәр. Она көрә дә (4) тәнлијинин (t_0, T) интервалында һәлли олан $x=\varphi(t)$ функсијасы һәм дә $(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалында тә'јин олунмалыдыр. Демәли, (4) тәнлијинин (t_0, T) интервалында мүәјјән һәллини тапмаг үчүн $(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалында әлавә шәрт верилмәлидир.

$(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалында верилмиш $\varphi_0(t)$ функсијасына бәрабәр олан вә (t_0, T) интервалында (4) тәнлијини өдәјән функсијанын тапылмасы мәсәләсинә *башланғыч мәсәлә*, t_0 нөгтәсинә *башланғыч нөгтә*, $(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалы на *башланғыч чохлуг*, $\varphi_0(t)$ функсијасы на исә *башланғыч функсија* дејилир.

Чох вахт (4) тәнлијинин һәллини $[t_0, T)$ јарыминтервалында тапмаг лазым кәлир. Бу һалда t аргументи $[t_0, t_0+T]$, $(t_0+\tau<T)$ парчасында дәјишдикдә, $t-\tau$ аргументи $[t_0-\tau, t_0]$ парчасында дәјишир. Она көрә (4) тәнлијинин $[t_0, T)$ јарыминтервалында һәллини тапмаг үчүн башланғыч чохлуг олараг $E_{t_0}=[t_0-\tau, t_0]$ парчасы, башланғыч функсија олараг бу парчада тә'јин олунан мүәјјән $\varphi_0(t)$ функсијасы көтүрүлүр.

Инди (3) тәнлији үчүн башланғыч мәсәлә гојаг. Бу мәгсәдлә $t\in(t_0, T)$ олдугда $t-\tau_i(t)$ функсијасынын t_0-дан кичик гијмәтләр чохлуғуну E_i илә ишарә едәк, јәни

$$E_i=\{z: z=t-\tau_i(t)<t_0, \ t_0<t<T\}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Бу чохлуглардан дүзәлдилмиш $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ чохлуғуна *башланғыч чохлуг*, һәмин чохлугда тә'јин олунан вә $p=\max_{1\leq i\leq n}\{m_i\}$ тәртибдән төрәмәси олан $\varphi_0(t)$ функсијасына *башланғыч функсија* дејилир.

Әлавә олараг, тутаг ки, t_0 нөгтәсиндә

$$x(t_0)=x_0, \ \dot{x}(t_0)=x_1, \ldots, x^{(m_0-1)}(t_0)=x_{m_0-1} \quad (5)$$

башланғыч шәртләри верилмишдир.

Башланғыч чохлугда $\varphi_0(t)$ функсијасына бәрабәр олан, t_0 нөгтәсиндә (5) шәртләрини вә (t_0, T) интервалында (3) тәнлијини өдәјән функсијанын тапылмасы мәсәләсинә *башланғыч мәсәлә* дејилир.

Хүсуси һалда $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ чохлуғу бош олдугда, (3) тәнлији үчүн башланғыч мәсәлә, бу тәнлијин (5) шәртләрини өдәјән һәллини тапмагдан ибарәтдир.

Гејд едәк ки, (3) тәнлијинин $[t_0, T)$ јарыминтервалында һәллини тапмаг үчүн, адәтән, башланғыч чохлуг олараг t_0 илә $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ чохлуғунун бирләшмәсиндән ибарәт олан E_{t_0} чохлуғу, башланғыч функсија олараг E_{t_0} чохлуғунда p тәртибдән төрәмәси олан $\varphi_0(t)$ функсијасы вә $x_0=\varphi_0(t_0)$, $x_1=\dot{\varphi}_0(t_0), \ldots$, $x_p=\varphi_0^{(p)}(t_0)$ көтүрүлүр.

Бә'зи практики мәсәләләри һәлл едәркән алынан мејл едән аргументли диференсиал тәнликләрдә кечикмә һәм дә ахта-

рылан функсиjа вә онун төрәмәләриндән асылы олур. Белә тәнликләр үчүн башланғыч чохлуг тә'јин етмәк даһа мүрәккәбдир. Она көрә дә belә тәнликләри арашдыраркән чох заман *башланғыч чохлуг* олараг, $(-\infty, t_0]$ јарымоху көтүрүлүр, башланғыч мәсәлә исә јухарыдакы гајда илә гојулур.

в) *Мејл едән аргументли тәнликләрин тәснифаты.* Јухарыда (3) тәнлији үчүн гојулмуш башланғыч мәсәләнин һәллинин варлығы вә хассәләри m_0 вә $p = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{m_i\}$ әдәдләри арасында мүмкүн олан 1) $m_0 > p$, 2) $m_0 = p$, 3) $m_0 < p$ мүнасибәтләринин һансынын өдәнмәсиндән асылы олур. Бунунла әлагәдар олараг (3) тәнлији үч синфә бөлүнүр: 1) $m_0 > p$ олдугда (3) тәнлијинә *кечикән аргументли,* 2) $m_0 = p$ олдугда *нејтрал тип,* 3) $m_0 < p$ олдугда исә *габаглајан аргументли* диференсиал тәнлик дејилир.

Бу синифләрин һәр биринә дахил олан тәнликләрин һәлләринин варлығы вә хассәләри ејни характерли олурлар.

Тә'рифә әсасән

$$\dot{x}(t) = x(t-1)$$

тәнлији кечикән аргументли,

$$\dot{x}(t) = x(t) - \dot{x}(t-1)$$

тәнлији нејтрал тип,

$$\dot{x}(t) = \ddot{x}(t-1) + x(t)$$

тәнлији исә габаглајан аргументли диференсиал тәнликдир.

Гејд едәк ки, тәтбиги мәсәләләрдә ән чох кечикән аргументли диференсиал тәнликләрә тәсадүф олунур вә белә тәнликләр даһа кениш өјрәнилмишдир.

§ 2. АДДЫМ ҮСУЛУ

а) *Бир сабит кечикмәси олан кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t \geqslant t_0 \tag{4}$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \tag{6}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапмаг тәләб олунур; бурада $\tau > 0$ сабит кечикмәдир, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_{t_0} парчасында, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы исә $G = \{t \geqslant t_0, \ -\infty < x_i < +\infty, \ i = 1, 2\}$ чохлуғунда кәсилмәздир.

Әввәлчә (4), (6) мәсәләсинин $I_1 = [t_0, \ t_0 + \tau]$ парчасында һәллинә бахаг. Ајдындыр ки, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ олдугда $t_0 - \tau \leqslant$

$\leqslant t - \tau \leqslant t_0$. Она көрә $t \in I_1$ үчүн $x(t-\tau) = \varphi_0(t-\tau)$ олур вә бахылан мәсәлә

$$\dot{x} = f(t, x, \varphi_0(t-\tau)) \tag{7}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) \tag{8}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир.
Бурада $g_0(t, x) = f(t, x, \varphi_0(t-\tau))$ функсијасы $G_0 = \{t_0 \leqslant t \leqslant$
$\leqslant t + \tau, \ -\infty < x < +\infty\}$ золағында кәсилмәз олдуғундан,
һәллин варлығы һаггында Пеано теореминә әсасән, (7), (8)
мәсәләсинин мүәјјән $[t_0, \ t_0 + \alpha]$, $(0 < \alpha \leqslant \tau)$ парчасында тә'јин
олунан һеч олмаса бир һәлли вар.
Тутаг ки, $\alpha < \tau$ олдугда һәлл I_1 парчасына давам етдирилә-
ләндир. Давам етдирилән һәлли $\varphi_1(t)$ илә ишарә едәк вә (4),
(6) мәсәләсинин $I_2 = [t_0 + \tau, \ t_0 + 2\tau]$ парчасында һәллини та-
паг. Бу парчада $x(t-\tau) = \varphi_1(t-\tau)$ олдуғундан, бахылан
мәсәлә

$$\dot{x} = f(t, x, \varphi_1(t-\tau)) \tag{9}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau) \tag{10}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир.
Бурада $g_1(t, x) = f(t, x, \varphi_1(t-\tau))$ функсијасы $G_1 = \{t_0 + \tau \leqslant$
$\leqslant t \leqslant t_0 + 2\tau; \ -\infty < x < +\infty\}$ золағында кәсилмәз олдуғун-
дан, (9), (10) мәсәләсинин һәлли вар. Тутаг ки, (9), (10) мә-
сәләсинин $\varphi_2(t)$ һәлли I_2-дә тә'јин олунмушдур. Онда $I_3 =$
$= [t_0 + 2\tau, \ t_0 + 3\tau]$ парчасында $x(t-\tau) = \varphi_2(t-\tau)$ олар вә
бу парчада бахылан мәсәләнин һәлли

$$\dot{x} = f(t, x, \varphi_2(t-\tau)) \tag{11}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0 + 2\tau) = \varphi_2(t_0 + 2\tau) \tag{12}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтириләр.
Просеси бу гајда илә ардычыл давам етдирмәклә гурулан

$$x = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in E_{t_0}, \\ \varphi_1(t), & t \in I_1, \\ \varphi_2(t), & t \in I_2, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \tag{13}$$

функсијасы (4), (6) мәсәләсинин һәлли олур.
Башланғыч мәсәләнин һәллинин көстәрилән гајда илә та-
пылмасы үсулуна, *аддым үсулу* вә ја *ардычыл интеграллама
үсулу* дејилир.
Аддым үсулунун маһијјәти, һәр бир сонлу парчада мејл
едән аргументли диференсиал тәнликдән ади диференсиал
тәнлијә кечмәкдән ибарәтдир. Бу үсул илә гурулан һәллин
һамарлығыны өјрәнмәк үчүн фәрз едәк ки, $f(t, x_1, x_2)$ функ-

26—86

сиjасынын G чохлуғунда истәнилән тәртибдән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Гоjулан шәртләр дахилиндә (4), (6) мәсәләсинин јеканә һәлли вар

Һәллин һамарлығы һаггында теоремә әсасән (бах: II фәсил, теорем 11) (7), (8) мәсәләсинин $\varphi_1(t)$ һәллинин l_1 парчасында кәсилмәз төрәмәси вар. Лакин (13) дүстуру илә тәјин олунан функсијанын t_0 нөгтәсиндә төрәмәси олмаја биләр. Һәстәрәк ки, $\varphi_0(t)$ функсијасынын E_{t_0}-да кәсилмәз төрәмәси варса, һәллин t_0 нөгтәсиндә кәсилмәз төрәмәсинин варлығы үчүн

$$\dot{\varphi}_0(t_0-0)=f(t_0,\ \varphi_0(t_0),\ \varphi_0(t_0-\tau)) \tag{14}$$

шәрти өдәнмәлидир.

Доғрудан да, (13) функсијасынын t_0 нөгтәсиндә сол төрәмәси $\dot{\varphi}_0(t_0-0)$, сағ төрәмәси исә $\dot{\varphi}_1(t_0+0)=f(t_0,\varphi_0(t_0),\varphi_0(t_0-\tau))$ олур. Бу төрәмәләрин бәрабәрлијиндән (14) шәрти алыныр.

Һәллин һамарлығы һаггында теореми (9), (10) мәсәләсинин һәллинә тәтбиг едәк. Ајдындыр ки, $g_1(t,\ x)=f(t,\ x,\ \varphi_1(t-\tau))$ функсијасы G_1 золағында кәсилмәздир вә биринчи тәртиб кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә (9), (10) мәсәләсинин $\varphi_2(t)$ һәллинин l_2 парчасында икинчи тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар. Үмумијјәтлә, $t_0+\tau$ нөгтәсиндә (13) функсијасынын икинчи тәртиб төрәмәси јохдур. Лакин $\varphi_0(t)$ функсијасынын кәсилмәз төрәмәси варса вә (14) шәрти өдәнирсә, һәллин $t_0+\tau$ нөгтәсиндә икинчи тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар.

Ејни мүһакимәләри (11), (12) мәсәләси үчүн апарсаг аларыг ки, (13) функсијасынын $(t_0+2\tau,\ t_0+3\tau)$ интервалында үчүнчү тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар. Бундан башга, $t_0+2\tau$ нөгтәсиндә икинчи тәртиб төрәмә кәсилмәздир. Үмумијјәтлә, $t_0+2\tau$ нөгтәсиндә (13) функсијасынын үчүнчү тәртиб төрәмәси јохдур.

Бу мүһакимәни сонракы парчалар үчүн дә апарсаг, аларыг ки, (4), (6) мәсәләсинин һәлли интервалдан-интервала кечдикчә бир ваһид һамарлашыр.

Мисал 1. Аддым үсулуну

$$\dot{x}(t)=x(t-1),\ x(t)=1,\ t\in[0,1]$$

мәсәләсинин һәллинә тәтбиг етсәк, алынан

$$x=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 1+(t-1), & 1<t\leqslant 2,\\ 1+(t-1)+\dfrac{(t-2)^2}{2!}, & 2<t\leqslant 3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

функсијасы бахылан мәсәләнин һәлли олур. Тапылан һәлли

$$x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-k)^k}{k!},\ n<t\leqslant n+1$$

дүстуру илә ифадә етмәк олар.

Тәнлијин сағ тәрәфинин вә башланғыч функсијанын истәнилән тәртибдән төрәмәсинин олмасына бахмајараг, һәллин $t=1$ нөгтәсиндә биринчи тәртиб, $t=2$ нөгтәсиндә икинчи тәртиб вә с. $t=n$ нөгтәсиндә n-чи тәртиб төрәмәси јохдур.

Гејд 1. Тутаг ки, m сајда сабит $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m$ кечикмәси олан

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),\ x(t-\tau_1),\ \dots,\ x(t-\tau_m)) \tag{15}$$

тәнлијинин

$$x(t)=\varphi_0(t),\quad t\in E_{t_0}=[t_0-\tau_m,\ t_0] \tag{15'}$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $0<\tau_1<<\tau_2<\dots<\tau_m$.

Әнәлчә бахылан мәсәләнин һәллини $[t_0,\ t_0+\tau_1]$ парчасында гураг. Ајдындыр ки, $t\in[t_0,\ t_0+\tau_1]$ олдугда $t-\tau_1\in E_{t_0},\dots,t-\tau_m\in E_{t_0}$. Она көрә $[t_0,t_0+\tau_1]$ парчасында $x(t-\tau_1)=\varphi_0(t-\tau_1),\dots,x(t-\tau_m)=\varphi_0(t-\tau_m)$ олур вә бахылан мәсәлә

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ \varphi_0(t-\tau_1),\dots,\varphi_0(t-\tau_m))$$

ади диференсиал тәнлијинин $x(t_0)=\varphi_0(t_0)$ шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Алынан мәсәләнин $[t_0,\ t_0+\tau_1]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллини $\varphi_1(t)$ илә ишарә едәк вә икинчи аддым олараг $[t_0+\tau_1,\ t_0+2\tau_1]$ парчасыны көтүрәк. Бу парчадан олан t-ләр үчүн $t-\tau_i\in[t_0+\tau_1-\tau_i,\ t_0+2\tau_1-\tau_i]$, $i=1,\ 2,\dots,m$ олдуғундан, $x(t-\tau_i)$ гијмәтләри $\varphi_0(t)$ вә $\varphi_1(t)$ функсијалары илә тә'јин олунур. Она көрә дә

$$\psi_1(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & t_0-\tau_m\leqslant t\leqslant t_0\\ \varphi_1(t), & t_0<t\leqslant t_0+\tau_1\end{cases}$$

ишарә етсәк, икинчи аддымда (15), (15') мәсәләсинин һәлли

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ \psi_1(t-\tau_1),\dots,\psi_1(t-\tau_m))$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0+\tau_1)=\psi_1(t_0+\tau_1)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир вә с.

Мисал 2. Аддым үсулу илә

$$\dot{x}(t)=2x(t-0{,}6)-x(t-1)$$

тәнлијинин

$$x(t)=1,\quad -1\leqslant t\leqslant 0$$

шәртини өдәјән һәллини тапаг.

Биринчи аддым олараг $[0,\ 0{,}6]$ парчасыны көтүрмәк лазымдыр. Бу парчада бахылан мәсәлә

$$\dot{x} = 1, \quad x(0) = 1$$

мәсәләсинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ајдындыр ки, $x = 1 + t$ функсијасы ахырынчы мәсәләнин һәллидир. Одур ки,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 1+t, & 0 < t \leqslant 0{,}6 \end{cases}$$

ишарә етсәк, $[0{,}6,\ 1{,}2]$ парчасында бахылан мәсәлә

$$\dot{x} = 2\varphi(t - 0{,}6) - \varphi(t-1)$$
$$x(0{,}6) = 1{,}6$$

мәсәләсинә кәтирилир.

Бурадан

$$\dot{x} = \begin{cases} 2t - 0{,}2, & 0{,}6 < t \leqslant 1, \\ t + 0{,}8, & 1 < t \leqslant 1{,}2 \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x = \begin{cases} t^2 - 0{,}2t + 1{,}36, & 0{,}6 < t \leqslant 1, \\ 0{,}5t^2 + 0{,}8t + 0{,}86, & 1 < t \leqslant 1{,}2. \end{cases}$$

Бу гајда илә һәлли истәнилән сонлу парчаја давам етдирә биләрик.

б) *Бир дәјишән кечикмәси олан кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t - \tau(t))) \tag{16}$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \tag{17}$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр. Бурада $\tau(t) \geqslant 0$, $\varphi_0(t)$ вә $f(t,\ x_1,\ x_2)$ функсијалары ујғун олараг $[t_0,\ T]$, E_{t_0} вә

$$G = \{t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad -\infty < x_i < +\infty, \quad i = 1,\ 2\}$$

чохлугларында кәсилмәздир.

Ашағыдакы һаллара бахаг:

I. Тутаг ки, $\inf\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \tau(t) = \Delta > 0$. Бу һалда, t аргументи $I_1 = [t_0,\ t_0 + \Delta]$, $(t_0 + \Delta < T)$ парчасында дәјишдикдә, $h(t) = t - \tau(t) < t_0$. Она көрә I_1 парчасында (16), (17) мәсәләсинин һәлли

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ \varphi_0(t - \tau(t))) \tag{18}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) \tag{19}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Гојулан шәртләр дахилиндә $g_0(t,\ x) = f(t,\ x,\ \varphi_0(t - \tau(t)))$ функсијасы $G_1 = \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta;\ -\infty < x < +\infty\}$ золағында кәсилмәз олдуғундан, Пеано теореминә әсасән (18), (19) мәсәләсинин мүәјјән $[t_0,\ t_0 + \alpha]$, $(0 < \alpha \leqslant \Delta)$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир $\varphi_1(t)$ һәлли вар. Онда

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in E_{t_0}, \\ \varphi_1(t), & t \in (t_0,\ t_0 + \alpha] \end{cases}$$

функсијасы $[t_0,\ t_0 + \alpha]$ парчасында (16), (17) мәсәләсинин һәлли олур. Бу һәллин I_1 парчасына давам етдирилдијини фәрз едәрәк (16), (17) мәсәләсинә $I_2 = [t_0 + \Delta,\ t_0 + 2\Delta]$, $(t_0 + 2\Delta < T)$ парчасында бахаг. Онда мәсәлә

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ \psi_1(t - \tau(t)))$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0 + \Delta) = \psi_1(t_0 + \Delta)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир вә с.

Беләликлә, $\inf\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \tau(t) = \Delta > 0$ олдугда (16), (17) мәсәләсинин һәллинә аддым үсулу тәтбиг олунур вә һәр аддымда узунлуғу Δ олан парчада һәлли тапмаг мүмкүндүр.

II. Тутаг ки, $\tau(t)$ функсијасы диференсиалланандыр вә $\dot{\tau}(t) < 1$. Бу һалда $h(t) = t - \tau(t)$ функсијасы чидди монотон артан олур. Она көрә $E_{t_0} = [t_0 - \tau(t_0),\ t_0]$ вә $h(t)$ функсијасынын тәрси вар. $h(t)$ функсијасынын тәрсини $\gamma(t)$ илә ишарә едәк. Әввәлчә $\gamma(t_0) > t_0$ олдуғу һала бахаг. Бу һалда $t \in \mathscr{E}_{t_0} = [t_0,\ \gamma(t_0)]$ үчүн $h(t) \leqslant t_0$ олур вә $\mathscr{E}_{t_0}$ белә t-ләри өзүндә сахлајан ән бөјүк парчадыр. Биринчи аддымда (16), (17) мәсәләсинә $\mathscr{E}_{t_0}$ парчасында бахаг. Онда мәсәлә $\mathscr{E}_{t_0}$ парчасында (18), (19) мәсәләсинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ајдындыр ки, $\gamma(t_0) = t_0$ олдугда $\mathscr{E}_{t_0}$ анчаг t_0 нөгтәсиндән ибарәт олур. Дикәр тәрәфдән, $\gamma(h(t_0)) = t_0$ вә $\gamma(t)$ монотон артан функсија олдуғундан, бурадан алырыг ки, $E_{t_0} = \{t_0\}$. Бу исә анчаг $\tau(t_0) = 0$ олдугда мүмкүндүр. Она көрә $\gamma(t_0) = t_0$ олдугда аддым үсулу тәтбиг олунмур вә бу һала *мәхсуси һал* дејилир.

Мәхсуси һал олмадыгда вә (18), (19) мәсәләсинин һәлли олан $x = \varphi_1(t)$ функсијасы $\mathscr{E}_{t_0}$ парчасында тә'јин олундугда, икинчи аддымда (16), (17) мәсәләсинә $\mathscr{E}_{\gamma(t_0)} = [\gamma(t_0),\ \gamma(\gamma(t_0))]$ парчасында бахылыр. Бу парчада бахылан мәсәләнин һәлли

$$\dot{x} = f(t,\ x,\ \varphi_1(t - \tau(t))), \quad x(\gamma(t_0)) = \varphi_1(\gamma(t_0))$$

мәсәләсинин һәллинә кәтирилир вә с.

Г е ј д 2. Бә'зән $\tau(t_0)=0$ олдугда да аддым үсулу тәтбиг олунур.

Мисал 3. $t \geqslant 0$ јарымохунда $\dot{x}(t) \;\; x(t \; \cdot \sqrt{t})$ тәнлијинә баxаг Бурада $\tau(t)=\sqrt{t}$ олдуғундан, $t_0=0$ нөгтәси үчүн $\tau(0)=0$ олур вә јухарыдакы һаллар јарамыр. Лакин, $t \geqslant 0$ үчүн $h(t)=t \; -\sqrt{t}$ функсијасынын $t \cdot \; \sqrt{t} \leqslant 0$ шәртини өдәјән гијмәтләри чохлуғу $E_0 \; \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ олдуғундан, бу тәнлијә ад-
дым үсулу тәтбиг олунур. Тәнлијин $x(t)=1$, $t \in E_0$ шәртини
өдәјән һәллини ики аддым үчүн һесаблајаг Биринчи аддымда
мәсәләјә $\mathscr{E}_0 = [0, 1]$ парчасында бахылыр вә бу парчада

$$x=1, \quad x(0)=1$$

мәсәләси алыныр. Бурадан $x(t)=1+t$, $t \in \mathscr{E}_0$. Икинчи аддымда $t_0=1$ вә $t \geqslant 1$ үчүн $h'(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{t}}<1$ олдуғундан, 2-чи һал јарајыр. Бу заман

$$\gamma(t)=\frac{2t+1+\sqrt{1+4t}}{2}, \quad \mathscr{E}_1=\left[1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Она көрә икинчи аддымда бахылан мәсәлә $\mathscr{E}_1$ парчасында

$$\dot{x}=t-\sqrt{t}+1, \quad x(1)=2$$

мәсәләсинә кәтирилир. Бурадан

$$x(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t+\frac{7}{6}, \quad t \in \mathscr{E}_1.$$

в) *Нејтрал тип тәнликләр.* Бир сабит кечикмәси олан нејтрал тип

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)) \qquad (20)$$

тәнлијинин

$$x(t)=\varphi_0(t), \; t \in E_{t_0} \qquad (20')$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә аддым үсу-
шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә аддым үсулуну тәтбиг едәк. Бурада $f(t, x_1, x_2, x_3)$ функсијасы $G = \{t_0 \leqslant t < +\infty; \; -\infty < x_i < +\infty, \; i=1, 2, 3\}$ чохлуғунда кәсилмәздир, $\varphi_0(t)$ функсијасынын исә E_{t_0} чохлуғунда кәсилмәз төрәмәси вар. Бахылан мәсәлә $I_1=[t_0, t_0+\tau]$ парчасында

$$\dot{x}=f(t, x, \varphi_0(t-\tau), \dot{\varphi}_0(t-\tau))$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0)=\varphi_0(t_0)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир. Ајдындыр ки, гојулан шәртләр дахилиндә бу мәсәләнин һәлли вар. Тутаг ки, $x=\varphi_1(t)$ функсијасы һәмин мәсәләнин I_1 парчасында

тә'јин олунмуш һәллидир. Онда $I_2=[t_0+\tau, t_0+2\tau]$ парчасында (20), (20′) мәсәләсинин һәллини тә'јин етмәк үчүн

$$\dot{x}=f(t, x, \varphi_1(t-\tau), \dot{\varphi}_1(t-\tau))$$

тәнлијинин

$$x(t_0+\tau)=\varphi_1(t_0+\tau)$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр вә с.

Гојулан шәртләрдән ајдындыр ки, һәллин $(t_0-\tau, t_0)$, $(t_0, t_0+\tau)$, $(t_0+\tau, t_0+2\tau)$, ... интервалларында кәсилмәз төрәмәләри, t_0, $t_0+\tau$, $t_0+2\tau$, ... нөгтәләриндә исә сол вә сағ төрәмәләри вар. Лакин һәллин t_0, $t_0+\tau$, $t_0+2\tau$, ... нөгтәләриндә төрәмәси олмаја биләр.

Доғрудан да, t_0 нөгтәсиндә һәллин сол төрәмәси $\dot{\varphi}_0(t_0-0)$-а, сағ төрәмәси исә $\dot{\varphi}_1(t_0+0)=f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau), \dot{\varphi}_0(t_0-\tau))$-ја бәрабәрдир. Она көрә дә анчаг

$$\dot{\varphi}_0(t_0-0)=f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau), \dot{\varphi}_0(t_0-\tau)) \qquad (21)$$

шәрти өдәндикдә t_0 нөгтәсиндә һәллин төрәмәси вар.

Ајдындыр ки, $t_0+\tau$ нөгтәсиндә һәллин сол төрәмәси $f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot{\varphi}_0(t_0-0))$-а, сағ төрәмәси исә $f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot{\varphi}_1(t_0+0))$-а бәрабәрдир. Бурадан ајдындыр ки, (21) шәрти өдәндикдә

$$f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot{\varphi}_0(t_0-0)) =$$
$$= f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot{\varphi}_1(t_0+0))$$

олур вә демәли, $t_0+\tau$ нөгтәсиндә һәллин кәсилмәз төрәмәси вар.

Бу гајда илә көстәрмәк олар ки, (21) шәрти өдәндикдә һәллин $t_0+2\tau$, $t_0+3\tau$, ... нөгтәләриндә кәсилмәз төрәмәси вар. Лакин, үмумијјәтлә, (20′), (21) мәсәләсинин һәлли интервалдан интервала кечдикчә, һамарлашмыр. Бу хассәсинә көрә нејтрал тип тәнликләр кечикән аргументли тәнликләрдән фәргләнирләр.

Гејд едәк ки, ујғун мүһакимәләри дәјишән кечикмәли нејтрал тип тәнликләр үчүн дә апармаг олар.

Мисал 4. Тутаг ки, $\dot{x}(t)=\dot{x}\left(\frac{t}{3}\right)+t$ тәнлијинин $x(t)=1$, $\frac{1}{3} \leqslant t < 1$ шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур.

Бу тәнлик үчүн $h(t)=\frac{t}{3}$ олдуғундан, $\gamma(t)=3t$. Она көрә $[1, 3]$ парчасында бахылан мәсәлә $\dot{x}(t)=t$ тәнлијинин $x(1)=1$ шәртини өдәјән һәллини тапмаға кәтирилир. Бурадан $x=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$.

Онда [3, 9] парчасында бахылан мәсәлә $\dot{x} = \frac{4t}{3}$ тәнлијинин $x(3) = 5$ шәртини өдәјән һәллини тапмаға кәтирилир. Демәли, [3, 9] парчасында $x = \frac{2t^2}{3} - 1$ вә с.

г) *Габағлајан аргументли тәнликләр.* Аддым үсулуну

$$x(t) = f(t, x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә тәтбиг едәк.

Тутаг ки, $\varphi_0(t)$ функсијасынын E_{t_0} парчасында κ тәртибә гәдәр, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасынын исә $G = \{t_0 \leqslant t < +\infty; -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2\}$ чохлуғунда $\kappa - 1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар.

Биринчи аддымда, јә'ни $(t_0, t_0+\tau]$ јарыминтервалында мәсәләнин һәлли

$$\varphi_1(t) = f(t, \varphi_0(t-\tau), \dot{\varphi}_0(t-\tau))$$

олур вә $x = \varphi_1(t)$ функсијасынын $(t_0, t_0+\tau]$ јарыминтервалында, үмумијјәтлә, $\kappa - 1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәси вар.

Икинчи аддымда, јә'ни $(t_0+\tau, t_0+2\tau]$ јарыминтервалында бахылан мәсәләнин һәлли

$$\varphi_2(t) = f(t, \varphi_1(t-\tau), \dot{\varphi}_1(t-\tau))$$

олур вә с. Ајдындыр ки, $x = \varphi_2(t)$ функсијасынын $(t_0+\tau, t_0+2\tau]$ јарыминтервалында, үмумијјәтлә, $\kappa - 2$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәси вар. Бу гајда илә аларыг ки,

$$\varphi_\kappa(t) = f(t, \varphi_{\kappa-1}(t-\tau), \dot{\varphi}_{\kappa-1}(t-\tau))$$

функсијасы $(t_0+(\kappa-1)\tau, t_0+\kappa\tau]$ јарыминтервалында бахылан мәсәләнин һәллидир вә онун $(t_0+(\kappa-1)\tau, t_0+\kappa\tau]$ јарыминтервалында, үмумијјәтлә, төрәмәси јохдур.

Беләликлә, $(t_0, t_0+\kappa\tau]$ јарыминтервалында бахылан мәсәләнин һәлли

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0, \\ \varphi_1(t), & t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \\ \varphi_2(t), & t_0 + \tau < t \leqslant t_0 + 2\tau, \\ \dots & \dots \\ \varphi_\kappa(t), & t_0 + (\kappa-1)\tau < t \leqslant t_0 + \kappa\tau. \end{cases}$$

шәклиндә гурулур.

Ајдындыр ки, $\varphi_1(t_0+0) \neq f(t_0, \varphi_0(t_0-\tau), \dot{\varphi}_0(t_0-\tau))$ олдугда һәлл $t = t_0$ нөгтәсиндә, $\varphi_2(t_0+\tau+0) \neq f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+0), \dot{\varphi}_1(t_0+0))$ олдугда $t = t_0 + \tau$ нөгтәсиндә кәсилир вә с.

Бу мүһакимәләрдән алыныр ки, t артдыгча бир интервалдан гоншу интервала кечдикдә бахылан мәсәләнин һәллинин һамарлығы, үмумијјәтлә, бир ваһид азалыр.

§ 3. ҺӘЛЛИН ВАРЛЫҒЫ ВӘ ДАВАМЫ ҺАГГЫНДА

Бу параграфда

$$x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))), \quad t > t_0 \qquad (16)$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \qquad (17)$$

шәртини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында теорем исбат олунур, сонра исә һәллин давамы мәсәләси арашдырылыр.

Теорем 1. *Тутаг ки, 1) $\varphi_0(t)$ башланғыч функсијасы E_{t_0} чохлуғунда кәсилмәздир; 2) мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $\tau(t)$ функсијасы $[t_0, t_0+h]$ парчасында кәсилмәздир вә $\tau(t) \geqslant 0$, 3) $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы гапалы $\overline{D} = \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h; \varphi_0(t_0) - b \leqslant x_i \leqslant \varphi_0(t_0) + b, i = 1, 2\}$ областында кәсилмәздир вә x_1, x_2 аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир.*

$$|f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2)| \leqslant N[|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|].$$

Онда (16), (17) мәсәләсинин $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар; бурада $\alpha = \min\left\{h, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \sup\limits_{\overline{D}} |f(t, x_1, x_2)|$.

Исбаты. Теореми сыхылмыш ин'икас принсипинин көмәји илә исбат едәк (бах; II фәсил). Бунун үчүн Ф илә $X = E_{t_0} \cup [t_0, t_0+\alpha]$ чохлуғунда кәсилмәз, E_{t_0}-да $\varphi_0(t)$ функсијасына бәрабәр олан вә $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ олдугда $|\varphi(t) - \varphi_0(t_0)| \leqslant b$ шәртини өдәјән $\{\varphi(t)\}$ функсијалар аиләсини ишарә едәк. Һәр бир $\varphi(t) \in Ф$ үчүн $A(\varphi(t))$ функсијасыны

$$A(\varphi(t)) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s)))\,ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha \qquad (22)$$

$$A(\varphi(t)) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

дустуру илә тә'јин едәк.

Бу гајда илә, Ф чохлуғунда бир A оператору тә'јин етмиш олуруг.

Ајдындыр ки, (22) дүстуру илә тә'јин олунан $A(\varphi(t))$ функсијасы X чохлуғунда кәсилмәздир. Шәртә көрә $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ үчүн $(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau(t))) \in \overline{D}$ вә $|f(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau(t)))| \leqslant M$ олдуғундан, $|A(\varphi(t)) - \varphi_0(t_0)| \leqslant M\alpha \leqslant b$. Бурадан алыныр ки, A оператору Ф чохлуғунда тә'сир едир. Бундан башга

$f(t, x_1, x_2)$ функсијасы кәсилмәз олдуғундан, A оператору Φ чохлуғунда кәсилмәздир.

Дикәр тәрәфдән, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы Липшис шәртини өдәдијиндән, истәнилән $\varphi(t), \psi(t) \in \Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(t)) - A(\psi(t))| \leqslant \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s))) -$$

$$- f(s, \psi(s), \psi(s-\tau(s)))| \, ds \leqslant N \int_{t_0}^{t} [\, |\varphi(s) - \psi(s)| +$$

$$+ |\varphi(s-\tau(s)) - \psi(s-\tau(s))| \,] ds \leqslant 2N \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2N(t - t_0) \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} |\varphi(t) - \psi(t)| .$$

Бу бәрабәрсизлијә әсасән алырыг ки,

$$|A^2(\varphi(t)) - A^2(\psi(t))| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, A(\varphi(s)), A(\varphi(s-\tau(s)))) - \right.$$

$$\left. - f(s, A(\psi(s)), A(\psi(s-\tau(s))))] \, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2N \int_{t_0}^{t} |A(\varphi(s)) - A(\psi(s))| \, ds \leqslant (2N)^2 \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} |\varphi(t) - \psi(t)| \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} (s - t_0) ds = \frac{[2N(t-t_0)]^2}{2!} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} |\varphi(t) - \psi(t)| .$$

Бурадан да, ријази индуксија үсулу илә көстәрмәк олар ки, истәнилән κ тәбии әдәди үчүн

$$|A^{\kappa}(\varphi(t)) - A^{\kappa}(\psi(t))| \leqslant \frac{[2N(t-t_0)]^{\kappa}}{\kappa!} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Мә'лумдур ки, кифајәт гәдәр бөјүк κ-лар үчүн $\frac{[2N(t-t_0)]^{\kappa}}{\kappa!} \leqslant \frac{(2N\alpha)^{\kappa}}{\kappa!} = q < 1$. Демәли белә κ-лар үчүн, A операторунун κ-чы итерасијасы

$$|A^{\kappa}(\varphi(t)) - A^{\kappa}(\psi(t))| \leqslant q \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

шәртини өдәјир. Бу исә көстәрир ки, мүәјјән κ_0 нөмрәси вар ки, A^{κ_0} оператору сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләрини өдәјир Она көрә дә үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s))) ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

интеграл тәнлијинин Φ чохлуғунда јеканә кәсилмәз һәлли вар. Дикәр тәрәфдән (16), (17) мәсәләсинин һәллинин тапылмасы бу интеграл тәнлијин кәсилмәз һәллинин тапылмасына екви-валент олдуғундан, теорем исбат олунду.

Геjд 3. Пеано теореминин исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, теоремин 1), 2) шәртләри өдәнирсә вә $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы гапалы $\bar{D}$ областында анчаг кәсилмәздирсә (16), (17) мәсәләсинин һеч олмаса бир һәлли вар

Инди исә һәллин давамы мәсәләсини арашдыраг. Тутаг ки, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы t дәјишәнинә нәзәрән $[t_0, t_1]$ парчасында, x_1, x_2 дәјишәнләринә нәзәрән исә $(\varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0 - \tau(t_0)))$ нөгтәсини дахилиндә сахлајан областда тә'јин олунмуш вә аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_{t_0}-да, $\tau(t) \geqslant 0$ функсијасы исә $[t_0, t_1]$ парчасында кәсилмәздир. Онда (16), (17) мәсәләсинин мүәјјән α $(0 < \alpha \leqslant t_1 - t_0)$ үчүн $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунмуш һеч олмаса бир $x = \varphi(t)$ һәлли вар. Ајдындыр ки, $t_0 + \alpha < t_1$ олдугда $x = \varphi(t)$ һәллини $t_0 + \alpha$-дан сағa давам етдирмәк олар.

G илә $f(t, x_1, x_2)$ функсијасынын тә'јин олундуғу чохлуғу ишарә едәк вә ашағыдакы һаллара бахаг:

1) һәлл бүтүн $[t_0, t_1]$ парчасына давам етдирилир;

2) елә $t' \in (t_0 + \alpha, t_1)$ нөгтәси вар ки, һәлл $[t_0, t')$ јарыминтервалына давам етдириләндир вә t дәјишәни солдан t' нөгтәсинә јахынлашдыгда $T(t) = (t, \varphi(t), \varphi(t - \tau(t)))$ нөгтәси G чохлуғунун сәрһәдинә јахынлашыр. Башга сөзлә десәк G чохлуғунун ихтијари F компакт* алт чохлуғу үчүн елә $s \in (t_0, t')$ нөгтәси вар ки, $t \in (s, t')$ олдугда $T(t) \in G \setminus F$.

3) һәлл $[t_0, t')$, $t_0 < t' < t_1$ јарыминтервалына давам етдириләндир вә t дәјишәни солдан t' нөгтәсинә јахынлашдыгда $T(t)$ нөгтәси G чохлуғунун сәрһәдинә сонсуз дәфә јахынлашыб узаглашыр. Башга сөзлә десәк, G чохлуғунун елә F_0 компакт алт чохлуғуну вә t' нөгтәсинә јығылан монотон артан $\{\xi_{\kappa}^{0}\}$ ардычыллығы тапмаг олар ки, $T(\xi_{\kappa}^{0}) \in F_0$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ лакин G чохлуғунун истәнилән F компакт алт чохлуғу вә t' нөгтәсинә јығылан елә монотон артан $\{\xi_{\kappa}^{F}\}$ ардычыллығы тапмаг олар ки, $T(\xi_{\kappa}^{F}) \in G \setminus F$, $\kappa = 1, 2, \ldots$.

Гејд едәк ки, $\tau(t) = 0$ вә ја $\tau(t) > 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ олдугда 3-чү һал ола билмәз. Демәли, ади диференсиал тәнликләр үчүн анчаг 1-чи вә 2-чи һаллар мүмкүндүр.

Гејд 4 Ади диференсиал тәнликләрдән фәргли олараг, кечикән аргументли тәнлијин һәллинин варлығы вә јеканәлији тә'мин олунан шәртләр дахилиндә ики мүхтәлиф һәлл

---

* Истәнилән сонсуз алт чохлуғундан јығылан ардычыллыг сечмәк мүмкүн олан чохлуға компакт чохлуг дејилир.

бир нөгтәдә вә һәтта мүәjјән бир парчада үст-үстә дүшә биләр: Буну көстәрмәк үчүн

$$\dot{x}(t)=\cos t+(\sin t-x(t))f(x(t-1)),\ t>0$$

тәнлиjинин

$$x(t)=\varphi_1(t),\ x(t)=\varphi_2(t),\ t\in E_0=[-1,\ 0]$$

шәртләрини өдәjән һәлләринә бахаг; бурада $f(t)$ функсиjасы һәгиги охда кәсилмәздир, $\varphi_1(t)$ вә $\varphi_2(t)$ функсиjалары исә E_0 парчасында кәсилмәз вә $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$ шәртини өдәjән ихтиjари функсиjалардыр.

Бахылан мәсәләләрә аддым үсулуну тәтбиг етсәк, биринчи аддымда, jә'ни $[0,\ 1]$ парчасында

$$\dot{x}=\cos t+(\sin t-x)f(\varphi_1(t-1)),\quad x(0)=\varphi_1(0)=0,$$

$$\dot{y}=\cos t+(\sin t-y)f(\varphi_2(t-1)),\ y(0)=\varphi_2(0)=0$$

мәсәләләрини аларыг вә онларын jеканә $x=y=\sin t$ һәлли вар. Сонракы аддымларда алынан хәтти тәнликләрин сағ тәрәфләри еjни олдуғундан һәлләр үст-үстә дүшүрләр. Демәли, бахылан тәнлиjин ики мүхтәлиф башланғыч функсиjаjа бир һәлли уjғундур.

§ 4. ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) *Кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки, бир сабит кечикмәси олан

$$\dot{x}(t)+a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau)=f(t),\quad t>t_0\qquad(23)$$

тәнлиjинин

$$x(t)=\varphi_0(t),\quad t\in E_{t_0}=[t_0-\tau,\ t_0]\qquad(24)$$

шәртини өдәjән һәллини тапмаг тәләб олунур. Бурада $\tau>0$ сабит кечикмәдир, $\varphi_0(t)$ башланғыч функсиjасы $[t_0-\tau,\ t_0]$ парчасында, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ функсиjалары исә $[t_0,\ +\infty)$ jарымохунда кәсилмәздир.

Геjд едәк ки, гоjулан мәсәләнин һәллини аддым үсулу илә тә'jин етмәк олар. Доғрудан да, (23), (24) мәсәләси $[t_0,\ t_0+\tau]$ парчасында

$$\dot{x}+a(t)x+b(t)\varphi_0(t-\tau)=f(t)$$

хәтти тәнлиjинин

$$x(t_0)=\varphi_0(t_0)$$

шәртини өдәjән һәллинин тапылмасына кәтирилир. Аjдындыр ки, алынан мәсәләнин $[t_0,\ t_0+\tau]$ парчасында тә'jин олунмуш jеканә $x=\varphi_1(t)$ һәлли вар. Одур ки, (23), (24) мәсәләси $[t_0+\tau,\ t_0+2\tau]$ парчасында

$$\dot{x}+a(t)x+b(t)\varphi_1(t-\tau)=f(t)$$

хәтти тәнлиjинин

$$x(t_0+\tau)=\varphi_1(t_0+\tau),$$

шәртини өдәjән һәллинин тапылмасына кәтирилир вә с.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x_1(t)$, $x_2(t)$ функсиjалары хәтти бирчинс

$$\dot{x}(t)+a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau)=0\qquad(23')$$

т. лиjинин $\varphi_1(t)$ вә $\varphi_2(t)$ башланғыч функсиjаларына уjғун һ. аләри исә, ихтиjари c_1, c_2 әдәдләри үчүн $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ функ- jасы онун $c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ башланғыч функсиjасына уjғун ллидир. Бундан әлавә, $x(t)$ функсиjасы (23′) тәнли- jинин $\varphi_0(t)$ башланғыч функсиjасына, $\widetilde{x}(t)$ функсиjасы исә (23) тәнлиjинин сыфыр башланғыч функсиjасына уjғун олан һәлли исә $x(t)+\widetilde{x}(t)$ функсиjасы (23) тәнлиjинин $\varphi_0(t)$ башланғыч функсиjасына уjғун һәллидир.

Беләликлә, (23) тәнлиjинин $\varphi_0(t)$ башланғыч функсиjасына уjғун һәллинин тапылмасы даһа садә олан ики мәсәләнин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Бу параграфда әсас мәгсәд гошма тәнлик анлаjышындан истифадә етмәклә (23), (24) мәсәләсинин һәллини интеграл шәклиндә көстәрмәкдән ибарәтдир. Онун көмәjи илә тәнлиjин һәлләринин хассәләрини өjрәнмәк вә бир чох нәзәри мәсәләләри араштырмаг мүмкүндүр. Геjд едәк ки, белә көстәрилиш даһа үмуми тәнликләр вә системләр үчүн дә доғрудур.

Тутаг ки, $\Phi(t,s)$ функсиjасы $G=\{t>t_0,\ t_0\leqslant s\leqslant t+\tau\}$ чохлуғунда тә'jин олунуб, һәр бир $t>t_0$ үчүн s дәjишәнинә нәзәрән $[t_0,\ t]$ парчасында кәсилмәздир вә $(t_0,\ t)$ интервалында

$$-\frac{\partial\Phi(t,\ s)}{ds}+\Phi(t,\ s)a(s)+\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)=0\qquad(25)$$

тәнлиjини

$$\Phi(t,s)=\begin{cases}0, & t<s\leqslant t+\tau\\ 1, & s=t\end{cases}\qquad(26)$$

шәртини өдәjән һәллидир. (25) тәнлиjинә (23) тәнлиjинин *гошма тәнлиjи* деjилир.

Әввәлчә аддым үсулунун көмәjи илә (25), (26) мәсәләсинин һәллинин варлығыны көстәрәк Биринчи аддымда бу мәсәләjә $(t-\tau,\ t]$ jарыминтервалында бахаг. Онда (26) шәртинә әсасән, $s\in(t-\tau,\ t]$ үчүн $\Phi(t,\ s+\tau)=0$, $\Phi(t,\ t)=1$ олдуғундан, $(t-\tau,\ t]$ jарыминтервалында $\Phi(t,\ s)$ функсиjасы

$$-\frac{\partial\Phi(t,\ s)}{ds}+\Phi(t,s)a(s)=0,\ \Phi(t,\ t)=1$$

Коши мәсәләсинин һәлли кими тә'јин олунар. Бурадан

$$\Phi(t,s)=\exp\left(-\int_s^t a(\xi)d\xi\right),\quad t-\tau<s\leqslant t.$$

Икинчи аддымда (25), (26) мәсәләсинә $(t-2\tau,\ t-\tau]$ јарыминтервалында бахылыр. Онда $(t-2\tau,\ t-\tau]$ јарыминтервалында

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)a(s)+b(s+\tau)\exp\left(-\int_{s+\tau}^t a(\xi)d\xi\right)=0,$$

$$\Phi(t,\ t-\tau)=\exp\left(-\int_{t-\tau}^t a(\xi)d\xi\right)$$

мәсәләси алыныр вә онун һәлли

$$\Phi(t,\ s)=\exp\left(-\int_s^t a(\xi)d\xi\right)\left[1-\int_s^{t-\tau} b(\eta+\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\int_\eta^{\eta+\tau} a(\xi)d\xi\right)d\eta\right].$$

Бу гајда илә һәр бир $t>t_0$ үчүн сонлу аддымдан сонра $\Phi(t,s)$ функсијасыны $[t_0,\ t]$ парчасында гурмаг олар.

Теорем 2. *Тутаг ки, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_{t_0} парчасында, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ функсијалары исә $[t_0,\ +\infty)$ јарымохунда кәсилмәздир вә $\Phi(t,s)$ функсијасы (25), (26) мәсәләсинин һәллидир. Онда*

$$x(t)=\Phi(t,t_0)\varphi_0(t_0)-\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,s+\tau)\varphi_0(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\Phi(t,s)f(s)ds,\quad t>t_0 \qquad (27)$$

дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасы (23), (24) мәсәләсинин һәллидир.

Бу дүстура *кечикән аргументли диференсиал тәнлик үчүн Коши дүстуру* дејилир.

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә (23), (24) мәсәләсинин $[t_0,\ +\infty)$ јарымохунда тә'јин олунан јеканә $x(t)$ һәлли вар. Бу һәлли (23) тәнлијиндә јазмагла алынан ејниликдә t дәјишәнини s илә әвәз едәк вә һәр тәрәфини $\Phi(t,s)$ функсијасына вуруб t_0-дан t-јә гәдәр интегараллајаг:

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)\dot x(s)ds+\int_{t_0}^t\Phi(t,s)a(s)x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)b(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds. \qquad (28)$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)\dot x(s)ds=\Phi(t,\ t)x(t)-\Phi(t,t_0)x(t_0)-$$

$$-\int_{t_0}^t\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}x(s)ds.$$

Интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә аларыг:

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)b(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds.$$

Лакин шәртә көрә $s\in(t-\tau,\ t)$ үчүн $\Phi(t,\ s+\tau)=0$ олдуғундан

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)b(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,\ s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds.$$

Беләликлә, (28) бәрабәрлијини

$$\Phi(t,\ t)x(t)-\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\left\{-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)a(s)+\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)\right\}x(s)ds=$$

$$=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан да, (24) шәртинә вә $\Phi(t,\ s)$ функсијасынын тә'јининә әсасән (27) дүстуру алыныр. Теорем исбат олунду.

Гејд 5. Теоремин исбат үсулу илә көстәрмәк олар ки,

$$\dot x(t)+A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau(t))=F(t)$$

системинин

$$x(t)=0,\quad t\in E_{t_0}$$

шәртини өдәјән һәлли

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)F(s)ds$$

дустуру илә верилир, бурада $A(t)$, $B(t)$ верилмиш матрис-функсиjалар, $F(t)$ верилмиш вектор-функсиjа, $x(t)$ ахтарылан вектор-функсиjадыр, $\Phi(t, s)$ матрис-функсиjасы

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{ds}+\Phi(t,s)A(s)+\Phi(t,\gamma(s))B(\gamma(s))\dot\gamma(s)=0$$

матрис-системинин

$$\Phi(t,s)=\begin{cases}0, & t<s\leqslant\gamma(t)\\ E, & s=t\end{cases}$$

шәртини өдәjән һәллидир, $\gamma(t)$ исә $h(t)=t-\tau(t)$ функсиjасынын тәрсидир, E ваһид матрисдир.

б) *Һәjәчанланмыш кечикән аргументли тәнликләр.* Јухарыда өjрәнилән (23′) тәнлиjи илә јанашы һәjәчанланмыш

$$\dot y(t)+[a(t)+a_1(t)]y(t)+[b(t)+b_1(t)]y(t-\tau)=0,\quad t>t_0 \quad (29)$$

хәтти бирчинс тәнлиjинә бахаг.

Теорем 3. *Тутаг ки, 1) (23′) тәнлиjинин (24) шәртини өдәjән һәлли $I=[t_0,+\infty)$ јарымохунда мәһдуддур; 2) $a_1(t)$, $b_1(t)$ функсиjалары I јарымохунда кәсилмәздир вә $\int_{t_0}^{\infty}|a_1(t)|dt<+\infty$; $\int_{t_0}^{\infty}|b_1(t)|dt<+\infty$; 3) (25), (26) мәсәләсинин һәлли $G=\{t\geqslant t_0;\ t_0\leqslant s\leqslant t+\tau\}$ чохлуғунда мәһдуддур. $|\Phi(t,s)|\leqslant c$ (c=const).*

Онда (29) тәнлиjинин (24) шәртини өдәjән һәлли I јарымохунда мәһдуддур.

Исбаты. Тутаг ки, $x(t)$ вә $y(t)$ функсиjалары уjғун олараг (23′) вә (29) тәнликләринин (24) шәртини өдәjән һәлләридир. Онда $z(t)=y(t)-x(t)$ функсиjасы

$$\dot z(t)+a(t)z(t)+b(t)z(t-\tau)=-[a_1(t)y(t)+b_1(t)y(t-\tau)],\quad t>t_0$$

тәнлиjинин

$$z(t)=0,\quad t\in E_{t_0}$$

шәртини өдәjән һәлли олар. Бу мәсәләнин һәллини (27) дустуруна әсасән

$$z(t)=-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)[a_1(s)y(s)+b_1(s)y(s-\tau)]ds$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан

$$y(t)=x(t)-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)[a_1(s)y(s)+b_1(s)y(s-\tau)]ds$$

вә интеграллама дәjишәнини әвәз етмәклә аларыг:

$$y(t)=x(t)-\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,s+\tau)b_1(s+\tau)\varphi_0(s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}[\Phi(t,s)a_1(s)+\Phi(t,s+\tau)b_1(s+\tau)]y(s)ds.$$

Теоремин 1) вә 3) шәртләринә әсасән

$$|y(t)|\leqslant c_1+c\int_{t_0}^{t}[|a_1(s)|+|b_1(s+\tau)|]|y(s)|ds,$$

$$c_1=\text{const}>0$$

бәрабәрсизлиjи алыныр. Бу бәрабәрсизлиjә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк, аларыг ки,

$$|y(t)|\leqslant c_1\exp\left(c\int_{t_0}^{t}[|a_1(s)|+|b_1(s+\tau)|]ds\right).$$

Бурадан да, теоремин 2) шәртинә әсасән, $y(t)$ функсиjасынын I јарымохунда мәһдудлуғу алыныр. Теорем исбат олунду.

в) *Неjтрал тип тәнликләр.* Инди исә неjтрал тип

$$\dot x(t)+a(t)\dot x(t-\tau)+b(t)x(t)+c(t)x(t-\tau)=f(t),\quad t>t_0 \quad (30)$$

тәнлиjинин

$$x(t)=0,\quad t\in E_{t_0} \quad (31)$$

шәртини өдәjән һәллинин интеграл ифадәсини тапаг; бурада $\tau>0$ сабит кечикмәдир, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ вә $f(t)$ функсиjалары исә I јарымохунда кәсилмәздир.

Тутаг ки, $a(t)$ функсиjасынын кәсилмәз төрәмәси вар вә $\Phi(t,s)$ функсиjасы $s\in(t_0,t)$, $s\neq t-k\tau$, $k=1,2,\ldots$ үчүн

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{ds}-\frac{\partial}{ds}[\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]+\Phi(t,s)b(s)+$$

$$+\Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)=0 \quad (32)$$

тәнлиjинин

$$\Phi(t,s)=\begin{cases}0, & t<s\leqslant t+\tau\\ 1, & s=t\end{cases} \quad (33)$$

шәртини өдәjән вә

$$\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau) \quad (34)$$

ифадәсинин s-ә нәзәрән $[t_0,t]$ парчасында кәсилмәзлиjини тә'мин едән һәллидир.

Әввәлчә адым үсулу илә көстәрәк ки, (32), (33) мәсәләсинин (34) ифадәсинин кәсилмәзлиjини тә'мин едән һәлли вар

Биринчи аддымда (32), (33) мәсәләсинә $(t-\tau, t)$ интервалында бахаг. Бу интервалда $\Phi(t, s+\tau)=0$ олдуғундан

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)b(s)=0,\quad \Phi(t,t)=1$$

мәсәләси алыныр. Бурадан

$$\Phi(t,s)=\exp\left(-\int_s^t b(\xi)d\xi\right).$$

Онда $s\in(t-2\tau,\ t-\tau)$ үчүн $\Phi(t,\ s+\tau)=\exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\xi)d\xi\right)$ олдуғундан, $(t-2\tau,\ t-\tau)$ интервалында (32) тәнлији

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)b(s)=\frac{\partial}{\partial s}\left[a(s+\tau)\exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\xi)d\xi\right)\right]-$$

$$-c(s+\tau)\exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\xi)d\xi\right)\qquad(35)$$

шәклинә дүшүр. Бу тәнлијин елә һәллини тапмаг лазымдыр ки, һәмин һәлл үчүн (34) ифадәси $s=t-\tau$ нөгтәсиндә кәсилмәз олсун. Јә'ни

$$\lim_{s\to t-\tau+0}[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]=$$
$$=\lim_{s\to t-\tau-0}[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]$$

бәрабәрлији өдәнсин. Бурадан $\Phi(t,s)$ функсијасынын $s\in(t-\tau,\ t)$ үчүн алынмыш ифадәсинә вә (33) шәртинә әсасән алырыг ки,

$$\Phi(t,\ t-\tau-0)=\exp\left(-\int_{t-\tau}^t b(\xi)d\xi\right)-a(t).\qquad(36)$$

Демәли, алынмыш (35) тәнлијинин (36) башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр вә ајдындыр ки, бу мәсәләнин $(t-2\tau,\ t-\tau)$ интервалында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар.

Бу гајда илә, гејд олунмуш t $(t>t_0)$ үчүн $[t_0,\ t]$ парчасында јеканә $\Phi(t,\ s)$ функсијасы гурулур.

Гурма гајдасындан ајдындыр ки, $s=t,\ t-\tau,\ t-2\tau,\ldots$ нөгтәләри $\Phi(t,s)$ функсијасынын биринчи нөв кәсилмә нөгтәләри ола биләр.

Теорем 4. *Тутаг ки,* $a(t)$, $a'(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ *функсијалары* $I=[t_0,+\infty)$ *јарымохунда кәсилмәздир,* $\Phi(t,s)$ *функсијасы исә (32), (33) мәсәләсинин (34) ифадәсиндән* $[t_0,t]$

парчасында s-ә нәзәрән кәсилмәзлијини тә'мин едән һәллидир. Онда (30), (31) мәсәләсинин һәлли

$$x(t)=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds\qquad(37)$$

дүстуру илә верилир.

Исбаты. (30) тәнлијиндән алырыг:

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)[\dot x(s)+a(s)\dot x(s-\tau)+b(s)x(s)+c(s)x(s-\tau)]ds=$$

$$=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds,\quad t>t_0.\qquad(38)$$

Интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә аларыг ки,

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,s)a(s)\dot x(s-\tau)ds=\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)\dot x(s)ds,$$

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)c(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}\Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)x(s)ds.$$

Бурада (31) вә (33) шәртләрини нәзәрә алсаг

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)a(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)x(s)ds,$$

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,s)c(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0}^t\Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)x(s)ds$$

олар. Онда (38) бәрабәрлијини

$$\int_{t_0}^t[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]\dot x(s)ds+\int_{t_0}^t[\Phi(t,s)b(s)+$$

$$+\Phi(t,\ s+\tau)c(s+\tau)]x(s)ds=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds\qquad(39)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Ајдындыр ки, $x(s)$ вә $\Phi(t,s)+\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)$ функсијалары $[t_0,\ t]$ парчасында s-ә нәзәрән кәсилмәздир вә һиссә-һиссә кәсилмәз төрәмәләри вар. Она көрә (39) бәрабәрлијинин сол тәрәфиндәки биринчи топланана һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етмәк олар. Бу заман (31), (33) шәртләринә әсасән аларыг ки,

$$\int_{t_0}^t[\Phi(t,\ s)+\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)]\dot x(s)ds=$$

$$= [\Phi(t,t)+\Phi(t,t+\tau)a(t+\tau)]x(t) -$$
$$-[\Phi(t,t_0)+\Phi(t,t_0+\tau)a(t_0+\tau)]x(t_0) -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial s}[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]x(s)ds =$$
$$= x(t)-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial s}[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]x(s)ds.$$

Онда (39) бәрабәрлији

$$x(t)+\int_{t_0}^{t}\Big\{-\frac{\partial}{\partial s}[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]+\Phi(t,s)b(s)+$$
$$+\Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)\Big\}x(s)ds=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)f(s)ds$$

шәклинә дүшәр.

Бурадан да, $\Phi(t, s)$ функсијасы (32) тәнлијинин һәлли олдуғундан, (37) дүстуру алыныр. Теорем исбат олунду.

§ 8. САБИТ ӘМСАЛЛЫ КЕЧИКӘН АРГУМЕНТЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Аддым үсулу диференсиал-фәрг тәнликләрин һәлләрини анҹаг сонлу парчада тә'јин етмәјә имкан верир. Лакин бу үсул һәллин дајаныглығыны вә сәрбәст дәјишән сонсузлуға јахынлашдыгда хассәләрини өјрәнмәк үчүн әлверишли олмур. Она көрә дә сабит әмсаллы кечикән аргументли тәнликләрин һәлләрини, ади диференсиал тәнликләр нәзәријјәсиндә олдуғу кими, $e^{\lambda t}$ шәклиндә функсијаларын хәтти комбинасијасы кими тапмаг әлверишли олур.

Бу параграфда

$$L(x)\equiv \dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=0 \qquad (40)$$

тәнлијинин $e^{\lambda t}$ шәклиндә һәлләринин тапылмасы мәсәләсинә бахылыр; бурада $\tau>0$, a, $b\neq 0$ һәгиги әдәдләрдир.

Ајдындыр ки, $h(\lambda)=\lambda+a+be^{-\lambda\tau}$ ишарә етсәк, $L(e^{\lambda t}) = h(\lambda)e^{\lambda t}$ олар.

Бурадан алыныр ки, $e^{\lambda t}$ функсијасынын (40) тәнлијинин һәлли олмасы үчүн λ әдәдинин

$$\lambda+a+be^{-\lambda\tau}=0 \qquad (41)$$

трансендент тәнлијинин көкү олмасы зәрури вә кафидир.

(41) тәнлијинә (40) тәнлијинин *характеристик тәнлији*, $h(\lambda)$ функсијасына исә *характеристик квазичохһәдлиси* дејилир. Гејд едәк ки, характеристик тәнлијин һәр бир садә λ көкүнә (40) тәнлијинин $e^{\lambda t}$ һәлли ујғундур вә мүхтәлиф көкләрә ујғун олан һәлләр хәтти асылы дејил. Бундан башга, характеристик тәнлијин $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ комплекс көкүнә (40) тәнлијинин хәтти асылы олмајан $e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$ һәгиги һәлләри ујғундур. Дикәр тәрәфдән

$$h'(\lambda)=1-b\tau e^{-\lambda\tau},\quad h^{(k)}(\lambda)=(-1)^{k}\, b\tau^{k} e^{-\lambda\tau},\quad k=2,3,\dots$$

олдуғундан, (41) характеристик тәнлијинин һәр бир көкү ән чоху ики дәфә тәкрарланан ола биләр.

Тутаг ки, λ_0 әдәди характеристик тәнлијин ики дәфә тәкрарланан көкүдүр, јә'ни $h(\lambda_0)=0$, $h'(\lambda_0)=0$. Онда

$$L(e^{\lambda_0 t})=h(\lambda_0)e^{\lambda_0 t}=0,\quad L(te^{\lambda_0 t})=[th(\lambda_0)+h'(\lambda_0)]e^{\lambda_0 t}=0$$

мүнасибәтләриндән алыныр ки, $e^{\lambda_0 t}$, $te^{\lambda_0 t}$ функсијалары (40) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләридир.

Әкәр $h(\lambda_0)=0$ $h'(\lambda_0)=0$ бәрабәрликләриндән λ_0-ы јох етсәк, аларыг ки, $b\tau e^{a\tau+1}=1$. Бу көстәрир ки, $b\tau e^{a\tau+1}\neq 1$ олдугда (41) тәнлијинин көкләри садә олур.

Характеристик тәнлик трансендент тәнлик олдуғундан, онун комплекс әдәдләр чохлуғунда, үмумијјәтлә, сонсуз сајда көкү вар. Она көрә дә (40) тәнлијинин, үмумијјәтлә, сонсуз сајда хәтти асылы олмајан һәлләри вар. Бу һәлләрин хассәләрини өјрәнәркән характеристик тәнлијин көкләринин комплекс мүстәвидә нечә јерләшдијини билмәк лазым кәлир.

Ајдындыр ки, $\lambda=\alpha+i\beta$, $(\beta\neq 0)$ әдәди характеристик тәнлијин көкү исә, $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ әдәди дә һәмин тәнлијин көкүдүр. Демәли, характеристик тәнлијин көкләри һәгиги оха нәзәрән симметрик јерләшмишдир. Дикәр тәрәфдән, кифајәт гәдәр бөјүк $|\lambda|$-лар үчүн $h(\lambda)=\lambda\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)+be^{-\lambda\tau}$ вә $h_1(\lambda)=\lambda+be^{-\lambda\tau}$ функсијаларынын көкләри бир-биринә јахындыр. Лакин $h_1(\lambda)$ функсијасынын көкләри үчүн

$$|\lambda e^{\lambda\tau}|=|b|$$

мүнасибәти өдәндијиндән, бурадан алынан

$$\ln|b|=\ln|\lambda|+\tau\, Re\,\lambda$$

бәрабәрлији көстәрир ки, $|\lambda|$ сонсузлуға јахынлашдыгда $\mathrm{Re}\,\lambda$ мәнфи сонсузлуға јахынлашмалыдыр. Демәли, $|\lambda|$ сонсуз бөјүдүкҹә (41) тәнлијинин көкләринин һәгиги һиссәси һәгиги охун мәнфи һиссәсинә јахынлашыр. Бурадан алыныр ки, онун анҹаг сонлу сајда көкүнүн һәгиги һиссәси мүсбәт ола биләр.

Тутаг ки, $\lambda_k=\alpha_k+i\beta_k$, $k=1,2,\dots$ әдәдләри характеристик

тәнлијин $m_\kappa (m_\kappa \leqslant 2)$ дәфә тәкрарланан көкләридир, $p_\kappa(t)$ вә $q_\kappa(t)$ исә дәрәҹәләри $(m_\kappa - 1)$-дән бөјүк олмајан ихтијари әмсаллы чохһәдлиләрдир. Онда

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{\alpha_\kappa t}[p_\kappa(t)\cos\beta_\kappa t + q_\kappa(t)\sin\beta_\kappa t] \qquad (42)$$

сырасы јығылдығы вә диференсиалландығы интервалларда (40) тәнлијинин һәлли олур.

Хүсуси һалда $\alpha_\kappa < 0$, $\kappa = 1, 2, \dots$ олдуғда бу сыра $(0, \infty)$ интервалында јығылыр вә ону һәдбәһәд диференсиалламаг олар.

Тутаг ки, $p_\kappa(t)$, $q_\kappa(t)$ чохһәдлиләри елә сечилмишдир ки,

$$\varphi_0(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{\alpha_\kappa t}[p_\kappa(t)\cos\beta_\kappa t + q_\kappa(t)\sin\beta_\kappa t], \quad t\in[t_0-\tau, t_0]$$

шәрти өдәнир. Онда (42) сырасы (40) тәнлијинин $x(t)=\varphi_0(t)$, $t\in[t_0-\tau, t_0]$ шәртини өдәјән һәлли олур.

§ 6. ЛАПЛАС ЧЕВИРМӘСИ ВӘ ОНУН ТӘТБИГЛӘРИ

Хәтти диференсиал тәнликләрин хүсуси һәлләринин тапылмасы үчүн әлверишли үсуллардан бири Лаплас чевирмәси үсулудур. Лаплас чевирмәси васитәсилә тәнлијин верилмиш башланғыч шәрти өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси мүәјјән ҹәбри тәнлијин һәллинә кәтирилир. Сонра исә тәрс чевирмә васитәсилә ҹәбри тәнлијин һәллиндән диференсиал тәнлијин һәлли алыныр.

Бу параграфда әввәлҹә Лаплас чевирмәси вә онун хассәләри өјрәнилир. Сонра исә бу чевирмәнин сабит әмсаллы ади вә кечикән аргументли диференсиал тәнликләрин һәллинә тәтбигләри верилир.

а) *Лаплас чевирмәси.* Тутаг ки, $f(t)$ функсијасы $I=[0,+\infty)$ јарымохунда кәсилмәз, һәгиги функсијадыр вә мүәјјән $M>0$, c һәгиги әдәдләри үчүн

$$|f(t)|\leqslant Me^{ct}, \quad t\in I$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Онда

$$|f(t)e^{-st}\cos\sigma t| \leqslant Me^{-(s-c)t}, \quad |f(t)e^{-st}\sin\sigma t| \leqslant Me^{-(s-c)t}$$

бәрабәрсизликләриндән вә $s>c$ үчүн $\int_0^\infty e^{-(s-c)t}\,dt$ интегралының сонлу олмасындан алырыг ки, $s>c$ олдуғда

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\cos\sigma t\,dt, \quad \int_0^\infty f(t)e^{-st}\sin\sigma t\,dt$$

гејри-мәхсуси интеграллары мүтләг јығылыр.

Бурадан алырыг ки, $p=s+i\sigma$ әдәди үчүн

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\cos\sigma t\,dt - i\int_0^\infty f(t)e^{-st}\sin\sigma t\,dt$$

интегралы да $s>c$ олдуғда мүтләг јығылыр.

Бу гајда илә тә'јин олунан

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt \qquad (43)$$

интегралына $f(t)$ һәгиги функсијасынын *Лаплас чевирмәси* дејилир вә символик оларак $f(t)\doteq F(p)$ кими ишарә олунур.

Беләликлә, Лаплас чевирмәси васитәсилә $f(t)$ һәгиги функсијасына $F(p)$ комплекс функсијасы гаршы гојулур. Бу гаршыгојмада $f(t)$ функсијасы *оригинал (әсл)*, $F(p)$ исә *тәсвир (сурәт, екс)* адланыр.

Лаплас чевирмәсинин бә'зи хассәләрини өјрәнәк.

I. *Хәттилик хассәси.* Тутаг ки, $f_\kappa(t)\doteq F_\kappa(p)$, $\kappa=1,2,\dots,n$ вә $a_1, a_2, \dots, a_n$ ихтијари сабитләрдир. Онда

$$\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa f_\kappa(t)\doteq\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa F_\kappa(p).$$

Доғрудан да, $|f_\kappa(t)|\leqslant M_\kappa e^{c_\kappa t}$, $t\in I$ оларса, $s>c=\max\{c_1, c_2,\dots,c_n\}$ әдәди үчүн $\left|\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa f_\kappa(t)\right| \leqslant \sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa| M_\kappa e^{c_\kappa t} \leqslant \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_\kappa| \times M_\kappa\right) e^{ct}$. Она көрә дә $\operatorname{Re} p > c$ үчүн $\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa f_\kappa(t)$ ҹәминин Лаплас чевирмәси вар вә ҹәмин Лаплас чевирмәси топлананларын Лаплас чевирмәләринин ҹәминә бәрабәрдир.

II. *Охшарлыг хассәси.* Тутаг ки, $f(t)\doteq F(p)$ вә $\alpha>0$. Онда $f(\alpha t)\doteq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Хассәнин доғрулуғу $\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt$ интегралында $z=\alpha t$ әвәзләмәси илә алыныр:

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(z)e^{-\frac{p}{\alpha}z}\,dz = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. *Оригиналын төрәмәси.* Тутаг ки, $f(t)$ функсијасынын $f'(t)$ төрәмәси вар вә $f(t)$-нин өдәдији шәртләри өдәјир. Онда, $f(t)\doteq F(p)$ олдуғда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = [f(t)e^{-pt}]\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Шәртә көрә $\mathrm{Re}\,p = s > c$ олдуғундан, $|f(t)e^{-pt}| \leqslant Me^{-(s-c)t}$ олар вә демәли, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-pt} = 0$. Она көрә

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = p\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt - f(0) = pF(p) - f(0).$$

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки, $f(t)$ функсијасынын n-чи тәртиб төрәмәси үчүн

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

IV. *Тәсвирин төрәмәси.* Тутаг ки, $f(t) \doteq F(p)$. Онда

$$(-1)^n t^n f(t) \doteq F^{(n)}(p)$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\mathrm{Re}\,p > c$ олдугда

$$\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\,dt, \ldots, \int_0^\infty t^n f(t)e^{-pt}dt$$

интеграллары мүтләг јығылырлар. Она көрә, p-јә нәзәрән диференсиалламагла (43) дүстурундан алырыг ки,

$$F'(p) = \int_0^\infty (-1)tf(t)e^{-pt}\,dt, \ldots, F^{(n)}(p) =$$

$$= \int_0^\infty (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt.$$

V. *Орижиналын интеграллаңмасы.* Тутаг ки, $f(t) \doteq F(p)$. Онда

$$\int_0^t f(z)dz \doteq \frac{F(p)}{p}$$

Јә'ни орижиналын интегралынын тәсвири, өзүнүн тәсвирини p-јә бөлмәклә алыныр.

Ајдындыр ки, $g(t) = \int_0^t f(z)dz$ функсијасы $f(t)$ функсијасынын өдәдији шәртләри өдәјир вә $g(0) = 0$, $g'(t) = f(t)$ Онда III хассәјә әсасән $g(t) \doteq G(p)$ олдугда $f(t) = g'(t) \doteq$

$\doteq pG(p)$ олур. Дикәр тәрәфдән, $f(t) \doteq F(p)$ олдуғундан алырыг ки, $F(p) = pG(p)$. Бурадан $G(p) = \frac{F(p)}{p}$.

VI. *Көчүрмә теореми.* Тутаг ки, $f(t) \doteq F(p)$. Онда истәнилән p_0 комплекс әдәди үчүн

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0).$$

Доғрудан да,

$$\int_0^\infty e^{p_0 t} f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-p_0)t}\,dt = F(p - p_0).$$

Лаплас чевирмәсинин бир хассәсини дә верәк. Бунун үчүн *һевисајдын ваһид функсијасы* адланан

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ оларса} \\ 1, & t \geqslant 0 \text{ оларса} \end{cases}$$

функсијасыны дахил едәк.

VII. *Кечикмә теореми.* Тутаг ки, $f(t) \doteq F(p)$. Онда истәнилән $t_0 > 0$ үчүн

$$f(t - t_0)\theta(t - t_0) \doteq e^{-pt_0}F(p).$$

Һевисајд функсијасынын тә'јининә әсасән

$$\int_0^\infty f(t - t_0)\theta(t - t_0)e^{-pt}\,dt = \int_{t_0}^\infty f(t - t_0)e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(z)\,e^{-p(z+t_0)}dz = e^{-pt_0}\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = e^{-pt_0}F(p).$$

Лаплас чевирмәсинин тә'рифинә вә хассәләринә әсасән бә'зи функсијаларын тәсвирини тапаг.

1. $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\,p > 0$. Хүсуси һалда $1 \doteq \frac{1}{p}$. Доғрудан да һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну n дәфә тәтбиг етсәк

$$F(p) = \int_0^\infty t^n e^{-pt}\,dt = -\frac{t^n}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt}\,dt = \cdots$$

$$= \frac{n!}{p^n}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. $\frac{(t-t_0)^n\,\theta(t-t_0)}{n!} \doteq p^{-(n+1)}e^{-pt_0}$, $\mathrm{Re}\,p > 0$.

Дүстурун доғрулуғу 1-чи дүстура вә кечикмә теореминә әсасән алыныр.

3. $e^{p_0 t} \doteq \frac{1}{p-p_0}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

Доғрудан да, Лаплас чевирмәсинин тә'рифинә әсасән

$$F(p)=\int_0^\infty e^{p_0 t} e^{-pt} dt=\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} dt=\frac{1}{p-p_0}.$$

4. $\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \omega$.

Һиперболик синусун тә'јининә әсасән $\operatorname{sh} \omega t=\frac{1}{2} e^{\omega t}-\frac{1}{2} e^{-\omega t}$.
Онда Лаплас чевирмәсинин хәттилик хассәсинә вә 3-чү дүстура әсасән

$$F(p)=\int_0^\infty \operatorname{sh} \omega t\, e^{-pt} dt=\frac{1}{2} \frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{2} \frac{1}{p+\omega}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

5. $\operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \omega$.

Бу дүстурун доғрулуғуну орижиналын төрәмәси теореминә әсасән көстәрәк:

$$\operatorname{ch} \omega t=\frac{1}{\omega}(\operatorname{sh} \omega t)' \doteq \frac{1}{\omega}\, p\, \frac{\omega}{p^2-\omega^2}=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

6. $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p>0$.

Ејлер дүстуруна әсасән $\sin \omega t=\frac{1}{2i}\left[e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right]$, $\cos \omega t = \frac{1}{2}\left[e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right]$ вә бурадан да, 4-чү мисалдакы гајда илә дүстурларын доғрулуғу алыныр.

7. $t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} p_0$.

Бу дүстур 1-чи мисала вә көчүрмә теореминә әсасән алыныр.

8. $t^n \sin \omega t \doteq \frac{n!\, Jm\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$, $t^n \cos \omega t \doteq \frac{n!\, Re\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$,

$\operatorname{Re} p>0$. Бу дүстурларын доғрулуғу Ејлер дүстуруна вә 7-чи дүстура әсасән көстәрилир.

б) *Тәрс чевирмә.* Јухарыда верилән мисалларда $f(t)$ орижиналына әсасән $F(p)$ тәсвирини тапдыг.

Бә'зән верилмиш $F(p)$ тәсвиринә әсасән $f(t)$ орижиналы мә'лум чәдвәлләрдән тапылыр* Лакин нәзәри мәсәләләрин һәллиндә $F(p)$ тәсвиринә көрә $f(t)$ орижиналыны тә'јин етмәк үчүн дүстур вермәк лазым кәлир.

Лемма (Риман—Лебег) *Тутаг ки, $g(t)$ функсијасы (α, β) интервалында мүтләг интегралланандыр. Онда*

$$\lim_{T\to\infty} \int_\alpha^\beta g(t) \sin Tt\, dt=0, \quad \lim_{T\to\infty} \int_\alpha^\beta g(t) \cos Tt\, dt=0.$$

Исбаты. Әввәлчә $g(t)$ функсијасынын мүтләг интегралланан төрәмәси олан һала бахаг. Бу һалда һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_\alpha^\beta g(t) \sin Tt\, dt=-\frac{g(t) \cos Tt}{T}\Big|_\alpha^\beta+\frac{1}{T} \int_\alpha^\beta g'(t) \cos Tt\, dt,$$

$$\int_\alpha^\beta g(t) \cos Tt\, dt=\frac{g(t) \sin Tt}{T}\Big|_\alpha^\beta-\frac{1}{T} \int_\alpha^\beta g'(t) \sin Tt\, dt$$

Бурадан да T сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк леммaнын доғрулуғуну аларыг

Инди исә үмуми һала бахаг. Мә'лумдур ки, (бах мәсәлән, С. М Никольский „Курс математического анализа" т. II, М., 1973, сәh 141) $g(t)$ функсијасы (α, β) интервалында мүтләг интегралланан исә, ихтијари $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә мүтләг интегралланан төрәмәси олан елә $g_\varepsilon(t)$ функсијасы тапмаг олар ки,

$$\int_\alpha^\beta |g(t)-g_\varepsilon(t)|\, dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнәр. Онда

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t) \sin Tt\, dt\right| < \left|\int_\alpha^\beta [g(t)-g_\varepsilon(t)] \sin Tt dt\right|+$$

$$+\left|\int_\alpha^\beta g_\varepsilon(t) \sin Tt\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_\alpha^\beta g_\varepsilon(t) \sin Tt\, dt\right|.$$

Бурадан да, ε-нун ихтијарилијинә вә $g_\varepsilon(t)$-нин мүтләг интегралланан төрәмәсинин варлығына әсасән лемманын биринчи һөкмүнүн доғрулуғу алыныр. Икинчи һөкмүн доғрулуғу ејни гајда илә көстәрилир. Лемма исбат олунду.

---

* *Бах:* мәсәлән, Г. Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., 1965.

Теорем 5. *Тутаг ки, $f(t)$ функсијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир: 1) мүәјјән $c > 0$ әдәди үчүн $\int_0^{\infty} f(t)e^{-ct}dt$ интегралы мүтләг јығылыр; 2) $f(t)$ функсијасынын $t = u > 0$ нөгтәсиндә мәһдуд төрәмәси вар.*

Онда $Re p \geqslant c$ олдугда

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

интегралы јығылыр вә $b > c$ үчүн

$$f(u) = \int_{(b)} F(p)e^{pu}dp;$$

бурада

$$\int_{(b)} F(p)e^{pu}dp = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(p)e^{pu}dp.$$

Исбаты. Теоремин биринчи шәртинә әсасән $b > c$ олдугда

$$F(b+it) = \int_0^{\infty} f(z)e^{-(b+it)z}dz \tag{44}$$

интегралы мүтләг јығылыр. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини $e^{(b+it)u}$-ја вуруб, t-јә нәзәрән $(-T, T)$ $(T > 0)$ интервалында интегралласаг:

$$\int_{-T}^{T} e^{(b+it)u} F(b+it)dt = \int_{-T}^{T} e^{(b+it)u} \left(\int_0^{\infty} f(z)e^{-(b+it)z}dz\right)dt.$$

Бурадан, интегралламa нөвбәсини дәјишмәклә алырыг:

$$\int_{-T}^{T} e^{(b+it)u} F(b+it)dt = e^{bu} \int_0^{\infty} f(z)e^{-bz}\left(\int_{-T}^{T} e^{i(u-z)t}\,dt\right)dz =$$

$$= 2e^{bu} \int_0^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz. \tag{45}$$

Ајдындыр ки, ихтијари $d > 0$ әдәди үчүн бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки интегралы

$$\int_0^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = \int_0^{u-d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz +$$

$$+ \int_{u-d}^{u+d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz + \int_{u+d}^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz \tag{46}$$

шәклиндә јазмаг олар вә леммаја әсасән көстәрмәк олар ки,

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^{u-d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{u+d}^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = 0. \tag{47}$$

Теоремин икинчи шәртинә әсасән кифајәт гәдәр кичик $d > 0$ әдәди үчүн

$$f(z)e^{-bz} = f(u)e^{-bu} + h(u, z)(u-z), \quad u-d \leqslant z \leqslant u+d$$

олар вә бурада $|h(u, z)| \leqslant K$. Она көрә

$$\int_{u-d}^{u+d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = f(u)e^{-bu}\int_{u-d}^{u+d}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz +$$

$$+ \int_{u-d}^{u+d} h(u, z)\sin T(u-z)\,dz.$$

Алынан интеграллары гијмәтләндирәк.

Биринчи интегралда $T(u-z) = v$ әвәз етсәк,

$$\int_{u-d}^{u+d} \frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = \int_{-Td}^{Td}\frac{\sin v}{v}dv$$

олар. Бурадан алыныр ки,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{u-d}^{u+d}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin v}{v}dv = \pi, \tag{48}$$

Икинчи интегралда исә $|h(u, z)\sin T(u-z)| \leqslant K$ олдуғундан

$$\int_{u-d}^{u+d} h(u, z)\sin T(u-z)dz = O(d). \tag{49}$$

Алынан (47), (48), (49) мүнасибәтләрини (46) бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг

$$\lim_{T\to\infty} 2e^{bu}\int_0^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz = 2\pi f(u) + O(d)$$

олар. $d>0$ ихтијари кичик әлаә олдуғундан, бурадан вә (45) бәрабәлијиндән алырыг ки,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}F(b+it)e^{(b+it)u}\,dt=2\pi f(u).$$

Бурадан да теоремин исбаты алыныр.

в) *Ади диференсиал тәнликләр.* Лаплас чевирмәсини

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{x}+a_nx=f(t) \qquad (50)$$

тәнлијинин

$$x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=x_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \qquad (51)$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә тәтбиг едәк; бурада $a_0, a_1, \ldots, a_n$ сабитләрдир, $f(t)$ исә I јарымохунда кәсилмәз вә $|f(t)|\leqslant Me^{ct}$ шәртини өдәјән функсијадыр Хәтти тәнлијин үмуми һәллинин ифадәсинә әсасән алыныр ки, (50), (51) мәсәләсинин $x(t)$ һәллинин вә $\dot{x}(t), x(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ төрәмәләринин Лаплас чевирмәси вар. Она көрә дә $x(t) \doteqdot X(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$ ишарә етсәк, орижиналын төрәмәси хассәсинә әсасән

$$\dot{x}(t)\doteqdot pX(p)-x_0,\ x^{(k)}(t)\doteqdot p^kX(p)-p^{k-1}x_0-p^{k-2}x_1-\cdots-x_{k-1}$$
$$k=2,3,\ldots,n.$$

Она көрә дә (50) тәнлијинин һәр тәрәфинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг етсәк, бу чевирмәнин хәттилик хассәсинә әсасән аларыг:

$$a_0\left[p^nX(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_1-\cdots-x_{n-1}\right]+$$
$$+a_1\left[p^{n-1}X(p)-p^{n-2}x_0-p^{n-3}x_1-\cdots-x_{n-2}\right]+$$
$$+\cdots+a_{n-1}\left[pX(p)-x_0\right]+a_nX(p)=F(p).$$

Бурада

$$P(p)=\left(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\right)x_0+$$
$$+\left(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\right)x_1+\cdots+a_0x_{n-1},$$
$$h(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n$$

ишарә етсәк, сонунчу бәрабәрлији

$$X(p)=\frac{F(p)+P(p)}{h(p)} \qquad (52)$$

шәклиндә јазмаг олар. Онда тәрс чевирмә һаггында теоремә әсасән

$$x(t)=\int_{(b)}\frac{F(p)+P(p)}{h(p)}e^{pt}\,dp$$

олар.

Чох вахт Лаплас чевирмәси нәтичәсиндә алынан (52) ифадәсинин сағ тәрәфи расионал кәср олур вә бу кәсри садә кәсрләрә ајырмагла орижинал тапылыр.

Мисал 1. $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=12e^{3t}$ тәнлијинин $x(0)=2$, $\dot{x}(0)=6$ шәрләртини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси илә тапаг. 2-чи дүстура әсасән $12e^{3t}\doteqdot\frac{12}{p-3}$ олдуғундан, бахылан мәсәләнин һәллинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг етсәк, $X(p)$-јә нәзәрән

$$p^2X(p)-2p-6-3(pX(p)-2)+2X(p)=\frac{12}{p-3}$$

чәбри тәнлији алынар. Бурадан

$$X(p)=\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Сағ тәрәфи садә кәсрләрә ајыраг;

$$\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{4}{p-1}-\frac{8}{p-2}+\frac{6}{p-3}.$$

Демәли,

$$X(p)=\frac{4}{p-1}-\frac{8}{p-2}+\frac{6}{p-3}.$$

Онда 3-чү дүстура әсасән

$$x(t)=4e^t-8e^{2t}+6e^{3t}$$

функсијасы бахылан мәсәләнин һәлли олур.

Мисал 2. $\ddot{x}-x=4\sin t+5\cos 2t$, $x(0)=-1$, $\dot{x}(0)=-2$ мәсәләсини Лаплас чевирмәси илә һәлл едәк. 6-чы дүстура әсасән $\sin t\doteqdot\frac{1}{1+p^2}$, $\cos 2t\doteqdot\frac{p}{4+p^2}$. Она көрә дә мәсәләјә Лаплас чевирмәсини тәтбиг етсәк

$$p^2X(p)+p+2-X(p)=\frac{4}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+4}$$

олар. Бурадан

$$X(p)=-\frac{p^3+2p^2+p+8}{(p^2+1)(p^2+4)},$$

вә ја садә кәсрләрә ајырсаг

$$X(p)=\ldots-\frac{p}{p^2+4}.$$

Онда 6-чы дүстура әсасән

$$x(t)=-2\sin t-\cos 2t$$

функсијасы тәләб олунан һәлл олур.

Мисал 3. $\begin{cases}\dot{x} = 2x + 4y + \cos t,\\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t\end{cases}$

системинин $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ шәртләрини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси илә тапаг. Бунун үчүн $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$ ишарә едәк вә системин һәр ики тәнлијинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг едиб

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$$

олдуғуну нәзәрә алаг. Онда

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) + 4Y(p) + \dfrac{p}{p^2+1},\\ pY(p) = -X(p) - 2Y(p) + \dfrac{1}{p^2+1}\end{cases}$$

системини аларыг. Бурада алынан

$$\begin{cases}(p-2)X(p) - 4Y(p) = \dfrac{p^2+p+1}{p^2+1},\\ X(p) + (p+2)Y(p) = \dfrac{1}{p^2+1}\end{cases}$$

системинин һәлли

$$X(p) = \frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)}, \quad Y(p) = -\frac{p^2+3}{p^2(p^2+1)}.$$

Лакин

$$\frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)} = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1},$$

$$-\frac{p^2+3}{p^2(p^2+1)} = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}$$

олдуғундан

$$X(p) = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}, \quad Y(p) = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}.$$

Онда 1-чи вә 6-чы дүстурлара әсасән

$$x(t) = 3 + 6t - 2\cos t - 3\sin t, \quad y(t) = -3t + 2\sin t$$

функсијалары бахылан мәсәләнин һәлли олур.

г) *Кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = f(t), \quad t > 0 \qquad (53)$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_0 = [-\tau, 0] \qquad (54)$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $\tau > 0$,

a, b сабитләрдир, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_0 чохлуғунда, $f(t)$ исә $I = [0, +\infty)$ јарымохунда кәсилмәздир вә $|f(t)| \leqslant Me^{ct}$, $M > 0$, $c > 0$.

Мәсәләнин һәллинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг едәк. Әввәлчә көстәрәк ки, мүәјјән M_1, c_1 әдәдләри вар ки, (53) (54) мәсәләсинин һәлли

$$|x(t)| \leqslant M_1 e^{c_1 t}, \quad t \in I \qquad (55)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бунун үчүн (53) тәнлијинин һәр тәрәфини $[0, t]$, $(t > 0)$ парчасында интеграллајаг:

$$\int_0^t [\dot{x}(s) + ax(s) + bx(s-\tau)]\,ds = \int_0^t f(s)\,ds.$$

Бурадан, (54) башланғыч шәртинә әсасән

$$x(t) = \varphi_0(0) - b\int_{-\tau}^{0} \varphi_0(s)\,ds - a\int_0^t x(s)\,ds -$$

$$- b\int_0^{t-\tau} x(s)\,ds + \int_0^t f(s)\,ds$$

мүнасибәти алыныр. Бурада $m = \varphi_0(0) - b\int_{-\tau}^{0} \varphi_0(s)\,ds$ ишарә етсәк вә $\int_0^t |f(s)|\,ds \leqslant \frac{M}{c}e^{ct}$, $\left|\int_0^{t-\tau} x(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^t |x(s)|\,ds$, $t > \tau$, олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$|x(t)| \leqslant |m| + \frac{M}{c}e^{ct} + (|a| + |b|)\int_0^t |x(s)|\,ds$$

бәрабәрсизлији алынар. Бу бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг едиб e^{ct} функсијасынын монотон артан олдуғуну да нәзәрә алсаг,

$$|x(t)| \leqslant \left(|m| + \frac{M}{c}e^{ct}\right)e^{(|a|+|b|)t}$$

олар.

Ајдындыр ки, $t \geqslant 0$ олдугда $|m| \leqslant |m|e^{ct}$. Она көрә дә, $M_1 = |m| + \frac{M}{c}$, $c_1 = c + |a| + |b|$ ишарә едиб, сонунчу бәрабәрсизлији

$$|x(t)| \leqslant M_1 e^{c_1 t}, \quad t \in I$$

шәклиндә јазмаг олар.

Бу бәрабәрсизлији (53) тәнлијиндә нәзәрә алсаг, мүәјјән $M_2>0$, $c_2>0$ әдәдләри үчүн

$$|\dot x(t)| \leqslant M_2 e^{c_2 t}, \quad t\in I$$

олдуғуну көстәрмәк олар.

Алынан бәрабәрсизликләр көстәрир ки, (53) тәнлијинин $x(t)$ һәллинин вә $\dot x(t)$ төрәмәсинин Лаплас чевирмәси вар.

Тутаг ки, $Re\, p > c_3 = \max\{c, c_1, c_2\}$. Белә p үчүн (53) тәнлијинин һәр тәрәфини e^{-pt} функсијасына вуруб интеграллајаг:

$$\int_0^\infty \dot x(t) e^{-pt}dt + a\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt + b\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (56)$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_0^\infty \dot x(t)e^{-pt}dt = x(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt =$$

$$= -\varphi_0(0) + p\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

вә интеграллама дәјишәнинин әвәз етмәклә

$$\int_0^\infty x(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\tau}^\infty x(t)e^{-p(t+\tau)}dt =$$

$$= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0(t)e^{-pt}dt + e^{-p\tau}\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

олдуғундан, (56) бәрабәрлијини

$$(p+a+be^{-p\tau})\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \varphi_0(0) - be^{-p\tau}\int_{-\tau}^0\varphi_0(t)e^{-pt}dt + \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурада

$$h(p) = p+a+be^{-p\tau},\; P(p) = \varphi_0(0) - be^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0(t)e^{-pt}dt,$$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

ишарә етсәк,

$$\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt = \frac{P(p)+F(p)}{h(p)}$$

олар вә тәрс чевирмә һаггында теоремә әсасән алырыг ки, (53), (54) мәсәләсинин һәлли

$$x(t) = \int_{(c_4)} \frac{P(p)+F(p)}{h(p)} e^{pt}dp, \quad c_4>c_3, \quad t>0$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Мисал 4. $\dot x(t) - x(t-1) = 1$ тәнлијинин $x(t)=t$, $-1\leqslant t\leqslant 0$ шәртини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси үсулу илә тапаг. Тәнлијин һәр тәрәфини e^{-pt}-јә ($\mathrm{Re}\, p>0$) вуруб интеграллајаг:

$$\int_0^\infty \dot x(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty x(t-1)e^{-pt}dt + \int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt.$$

Бурадан һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етмәклә вә интеграллама дәјишәнинин әвәз етмәклә алырыг:

$$(p-e^{-p})\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt = e^{-p}\int_{-1}^0 te^{-pt}dt + \frac1p$$

Дикәр тәрәфдән, һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_{-1}^0 te^{-pt}dt = -\frac tp e^{-pt}\Big|_{-1}^0 + \frac1p\int_{-1}^0 e^{-pt}dt = \left(\frac1{p^2}-\frac1p\right)e^p - \frac1{p^2}.$$

Демәли, $x(t) \risingdotseq X(p)$ ишарә етсәк,

$$(p-e^{-p})X(p) = \frac1{p^2} - \frac1p - \frac1{p^2}e^{-p} + \frac1p.$$

Бурадан

$$X(p) = \frac{1-e^{-p}}{p^2(p-e^{-p})}.$$

Алынан бәрабәрлијин сағ тәрәфини $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^\infty u^n$ ајрылышына әсасән

$$\frac{1-e^{-p}}{p^2(p-e^{-p})} = \frac1{p^2} + \frac1{p^3}\,\frac{1}{1-p^{-1}e^{-p}} - \frac1{p^2}\,\frac{1}{1-p^{-1}e^{-p}} =$$

$$= \frac{1}{p^2} + \sum_{n=0}^\infty p^{-(n+3)}e^{-np} - \sum_{n=0}^\infty p^{-(n+2)}e^{-np}$$

шәклиндә ајырмаг олар.

Демәли,

$$X(p)=\frac{1}{p^2}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}p^{-(\kappa+3)}e^{-\kappa p}-\sum_{\kappa=0}^{\infty}p^{-(\kappa+2)}e^{-\kappa p}.$$

1-чи вә 2-чи дүстурлара әсасән

$$t\doteq\frac{1}{p^2},\quad \frac{(t-\kappa)^{\kappa+2}\theta(t-\kappa)}{(\kappa+2)!}\doteq p^{-(\kappa+3)}e^{-\kappa p}$$

$$\frac{(t-\kappa)^{\kappa+1}\theta(t-\kappa)}{(\kappa+1)!}\doteq p^{-(\kappa+2)}e^{-\kappa p}$$

олдуғундан, $X(p)$ тәсвиринин орижиналы

$$x(t)=t+\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(t-\kappa)^{\kappa+2}\theta(t-\kappa)}{(\kappa+2)!}-\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(t-\kappa)^{\kappa+1}\theta(t-\kappa)}{(\kappa+1)!},\quad t>0$$

олур. Бурадан Һевисаjдын ваһид функсиjасынын тә'јининә әсасән, истәнилән n тәбии әдәди үчүн, $n-1\leqslant t\leqslant n$, $n=1, 2, \ldots$ олдугда

$$x(t)=t+\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(t-\kappa)^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!}\left[\frac{t-\kappa}{\kappa+2}-1\right]$$

олур. Бу дүстур гојулан мәсәләнин һәллини верир.

Мисал 5. $\dot{x}(t)-2x(t-1)=t,\quad t>0$
$x(t)=1,\quad -1\leqslant t\leqslant 0$

мәсәләсинин һәллини Лаплас чевирмәси үсулу илә тә'јин едәк. 4-чү мисалда олдуғу кими $x(t)\doteq X(p)$ ишарә етсәк, $X(p)$-јә нәзәрән

$$\left(p-2e^{-p}\right)X(p)=1+2e^{-p}\int_{-1}^{0}e^{-pt}\,dt+\frac{1}{p^2}$$

тәнлији алынар. Бурадан

$$X(p)=\frac{p\left(p-2e^{-p}\right)+1+2p}{p^2\left(p-2e^{-p}\right)}.$$

Дикәр тәрәфдән

$$\frac{p\left(p-2e^{-p}\right)+1+2p}{p^3\left(p-2e^{-p}\right)}\doteq\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}\,\frac{1}{1-2p^{-1}e^{-p}}+$$

$$+\frac{2}{p^2}\,\frac{1}{1-2p^{-1}e^{-p}}=\frac{1}{p}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}2^{\kappa}p^{-(\kappa+3)}e^{-\kappa p}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}2^{\kappa+1}p^{-(\kappa+2)}e^{-\kappa p}$$

олдуғундан, јухарыдакы гајда илә алырыг ки,

$$x(t)=1+\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left[\frac{2^{\kappa}(t-\kappa)^{\kappa+2}\theta(t-\kappa)}{(\kappa+2)!}+\frac{2^{\kappa+1}(t-\kappa)^{\kappa+1}\theta(t-\kappa)}{(\kappa+1)!}\right].$$

Бурадан да, истәнилән n тәбии әдәди үчүн

$$x(t)=1+\sum_{\kappa=0}^{n-1}\left[\frac{2^{\kappa}(t-\kappa)^{\kappa+2}}{(\kappa+2)!}-\frac{2^{\kappa+1}(t-\kappa)^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!}\right],$$

$$n-1\leqslant t<n,\quad n=1, 2, \ldots$$

дүстуру алыныр.

Чалышмалар

1. Ашағыдакы мәсәләләрин көстәрилән парчада һәллини аддым үсулу илә тапмалы:

а) $\dot{x}(t)=x(t)+x^2(t-1),\quad 0<t<2$
$x(t)=1,\ -1\leqslant t\leqslant 0.$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}2e^t-1, & 0<t\leqslant 1\\ 2e^t+4e^{2(t-1)}-4te^{t-1}-1, & 1<t\leqslant 2.\end{cases}$

б) $\dot{x}(t)=\dot{x}^2(t-1)+6t,\quad 0<t<2,$
$x(t)=0,\ -1<t<0,$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}3t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 12(t-1)^3+3t^2, & 1<t<2\end{cases}$

в) $\dot{x}(t)=x\left(\frac{t}{2}\right),\ 1<t<4$
$x(t)=t,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}\frac{1}{4}(t^2+3), & 1<t<2,\\ \frac{t^3}{48}+\frac{3t}{4}+\frac{1}{12}, & 2<t\leqslant 4\end{cases}$

г) $\dot{x}(t)=24x\left(\frac{t}{2}\right)\dot{x}\left(\frac{t}{2}\right),\ 1\leqslant t\leqslant 4,$
$x(t)=t,\ \frac{1}{2}\leqslant t<1,$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}6t^3-5, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 54t^4-360t^2+595, & 2\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$

2. Ашағыдакы дүстурларын доғрулуғуну көстәрин:

а) $e^{\alpha t}\sin\beta t\doteq\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$ **б)** $e^{\alpha t}\cos\beta t\doteq\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$

в) $e^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t\doteq\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2},$ **г)** $e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\beta t\doteq\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2},$

ғ) $e^{\alpha t}\cos(t+\beta)\doteq\frac{(p-\alpha)\cos\beta-\sin\beta}{(p-\alpha)^2+1},$

д) $\sin\alpha t\sin\beta t\doteq\frac{2\alpha\beta p}{[p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]}.$

3. Садә кәсрләрә ајырма үсулу илә верилмиш тәсвирләрин орижиналларыны тапмалы:

а) $\frac{p+1}{p^2+2p}$. *Чаваб:* $\frac{1}{2}(1+e^{-2t})$.

б) $\frac{1}{2p^2-2p+5}$. *Чаваб:* $\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3}{2}t$.

в) $\frac{3p-4}{p^2-p-6}$. *Чаваб:* $e^{3t}+2e^{-2t}$.

г) $\frac{3p^2+3p+1}{p^4+p^2}$. *Чаваб:* $3+t-\sin t$.

4. Ашағыдакы ади диференсиал тәнликләрин көстәрилән башланғыч шәртини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси илә тапмалы:

а) $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0,\ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=-3.$

Чаваб: $x=e^{-t}+e^{-2t}$.

б) $\ddot{x}+9x=6\cos 3t,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=9.$

Чаваб: $x=(3+t)\sin 3t$.

в) $4\dddot{x}-8\ddot{x}-\dot{x}-3x=-8e^t,\quad x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=1.$

Чаваб: $x=e^t$.

г) $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y, & x(0)=0,\\ \dot{y}=x+y+e^t, & y(0)=0.\end{cases}$ *Чаваб:* $x=\frac{1}{4}e^{-2t}-e^t+\frac{3}{4}e^{2t},\quad y=-\frac{1}{12}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^t+\frac{3}{4}e^{2t}$

ғ) $\begin{cases}\dot{x}=x+2y, & x(0)=-1,\\ \dot{y}=x-5\sin t, & y(0)=2.\end{cases}$ *Чаваб:* $x=3\sin t-\cos t,\quad y=2\cos t-\sin t.$

5. Аддым үсулу вә Лаплас чевирмәси илә ашағыдакы мәсәләләри һәлл един:

а) $2\dot{x}(t)-x(t-2)=2,\ t>0$
$x(t)=0,\quad -2\leqslant t\leqslant 0.$

Чаваб: $x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-2k)^{k+1}}{2^k(k+1)!},$
$2n-2<t\leqslant 2n,\ n=1,2,\ldots$

б) $\dot{x}(t)=ax(t-\tau),\quad t>0$
$x(t)=1,\ -\tau\leqslant t\leqslant 0\ (\tau>0).$

Чаваб: $x=1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{k+1}(t-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!},$
$n-1\leqslant t<n,\ n=1,2,\ldots$

ӘДӘБИЈЈАТ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения", М., „Наука", 1971.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., „Наука" 1967.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954
4. Беллман Р. Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., „Мир", 1967.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., „Наука", 1967
6. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, „Наука и техника", 1972
7. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка М., „Наука", 1966.
8. Киселев А. И., Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., „Высшая школа". 1965.
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
10. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М., „Наука", 1970.
11. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, „Вышэйшая школа", 1974
13. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, „Вышэйшая школа", 1970.
14. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., „Наука", 1970.
15. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М., „Наука", 1974.
16. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., т. 1, 1953, т. 2, 1954.
17. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.—Л., „Наука", т. II, 1967, т. IV, 1957.
18. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
19. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М. Изд-во иностр. лит. 1962.
20. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., „Мир", 1970.
21. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., „Наука", 1973.
22. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., „Наука", 1965.
23. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., „Наука", 1971.

МУНДӘРИЧАТ

Ахмедов Кошкар Теймир оглы,
Гасанов Кязим Кара оглы,
Ягубов Мамед Ахверди оглы

КУРС ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебник для ВУЗ-ов

(на азербайджанском языке)

Нәшријјат редактору *И. Әлијев*
Чилдинин рәссамы *Ә. Шыхәлијев*
Бәдии редактору *Е. Лазымов*
Техники редактору *Б. Кәримова*
Корректорлары *Л. Һачыјева, С. Гасымова*
ИБ—551

Јығылмаға верилмиш 30/XII 1977-чи ил. Чапа имзаланмыш 25/V 1978 чи-ил. Кағыз форматы 60×90 1/16. Кағыз № 1. Физики вә шәрти ч. в. 27,75. Учот нәшр. вәрәги 22. Сифариш № 260. Тиражы 16000. Чилддә гијмәти 1 ман. 10 гәп.

Азәрбајчан ССР Назирләр Советинин Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тичарәти Ишләри Комитәсинин «Маариф» Нәшријјаты, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азәрбајчан ССР Назирләр Советинин Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тичарәти Ишләри Комитәсинин Јени Китаб мәтбәәси, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.